

**EL DECLIVE DE LOS GRANDES NUMEROS: BENOIT  
MANDELBROT Y LA ESTADISTICA SOCIAL**

**A. Javier Izquierdo Martín;Error! Marcador no definido.  
Depto. Sociología I  
Fac. CC.PP. y Sociología  
UNED**

Una versión de este trabajo se publicó en:

*Empiria*, 1, 1998, 51-84.

*Sobre todas las cosas está el accidente celeste, la inocencia celeste, el azar celeste, la travesura celeste. "Por azar" ... ésa es la más antigua nobleza del mundo y eso es lo que yo devolví a todas las cosas: las liberé de su servidumbre de la finalidad.* (Friedrich Nietzsche, **Así habló Zaratustra**)

*Aquel día oí el diálogo más viejo de la filosofía moderna, el de la razón y los sentidos. En él la razón pasaba revista al saber más viejo del mundo y lo echaba a pique. Aquel día me pregunté por qué un saber inspeccionaba al otro, lo controlaba, tenía poder para sancionarlo y hacerlo obedecer. Aquel día vi morir un saber. Oí morir al empirismo. Ahora escucho su rumor que asciende de las aguas.* (Michel Serres, **Realidades**).

## **1. Puentes sobre aguas turbulentas: de la estadística a los fractales**

Las bases teóricas del análisis estadístico de datos, que se ha constituido como la metodología universal de la investigación científica contemporánea, comenzaron a sentarse allá por las últimas décadas del siglo XIX y primeras del XX, principalmente con el apogeo del cálculo de probabilidades y de una multiplicidad de nuevas aplicaciones matemáticas en los campos de la estadística económica y psico-social, la biología evolutiva y la termodinámica. En la actualidad la disciplina de la estadística matemática ocupa el centro neurálgico del programa de ciencia aplicada que trata de aprehender la relación fundamental entre (a) las estructuras de invarianza probabilística en espacios estocásticos, (b) el flujo entrópico de energía/información en sistemas dinámicos deterministas no lineales, y (c) las medidas de complejidad algorítmica en sistemas de computación. Los físicos matemáticos conocen sintéticamente este área de investigaciones como el estudio de los sistemas complejos (Ruelle, 1989 y 1993; Gleick, 1988).

Una primitiva forma de indeterminación formal del cálculo matemático comienza a caminar con pie firme en física a partir de la segunda mitad del diecinueve, con el estudio analítico de aquellos procesos dinámicos que habían sido excluidos como objetos de la mecánica racional newtoniana: primero en termodinámica con la teoría analítica del calor de Fourier y la energética de Helmholtz; luego en mecánica estadística, con la entropía de Maxwell, Boltzman y Gibbs; y más tarde en mecánica cuántica con las ecuaciones de la teoría de partículas y la teoría ondulatoria, formuladas sucesivamente por Planck, Einstein, Bohr, Schrödinger y Heisenberg (vid. Brush, 1976; Porter, 1986: cap. 7; Prigogine y Stengers, 1990a, caps. 4-6).

El subsiguiente diálogo teórico con los resultados de estas investigaciones aplicadas constituirá el caldo de cultivo para el nacimiento de una nueva generación de herramientas de análisis matemático aplicado. Los principales instigadores de este segundo movimiento serán las investigaciones sobre matemática indeterminista de los sistemas dinámicos llevadas a cabo durante las décadas de 1880 y 1890 por A.M. Lyapunov en San Petersburgo y Henri Poincaré en París (Ekeland, 1988: cap. 2; Prigogine y Stengers, 1990b: caps. 4 y 5). Finalmente, el cuerpo de métodos y técnicas de modelización aplicada correspondientes a estas nuevas ideas teóricas (cálculo topológico, ecuaciones no lineales, procesos estocásticos, computación algorítmica...) será desarrollado durante el primer y segundo cuartos del presente siglo por una comunidad científica más amplia -aunque relativamente cohesionada- que aglutinaba principalmente a expertos en teoría matemática de la probabilidad y en matemática aplicada al análisis estadístico de series temporales y al control de sistemas de ingeniería.

Las figuras más destacadas de este grupo de visionarios del nuevo espíritu tecnocrático posmoderno, fueron el matemático austro-húngaro afincado en Estados Unidos John von Neumann, el lógico y matemático inglés Alan Turing, los matemáticos norteamericanos Norbert Wiener y Claude Shannon, el grupo de probabilistas rusos de la escuela de Moscú -descendiente directa de la escuela de San Petersburgo de Chebishev, Markov y Liapunov- encabezado por Kolmogorov, Tchenshov, Khintchine y Yaglom; y los analistas matemáticos y estadísticos de la nueva escuela parisina -los hijos intelectuales de Henri Poincaré: Louis Bachelier, Henri Lebesgue, Emil Borel, Maurice Fréchet, Paul Lévy y otros.

Será en el seno de este último grupo de investigadores parisinos donde, a principios de la década de 1950, uno de los discípulos aventajados de Paul Lévy en la Ecole Polytechnique de París, el polimatemático de origen polaco Benoît Mandelbrot, emprenderá, al hilo de estas nuevas concepciones científicas emergentes, un vasto programa interdisciplinar de investigaciones en matemática aplicada, que le llevará a transitar por multitud de campos científicos, comenzando por la teoría de la información, la computación y los juegos, siguiendo por la lingüística, la psicología y la economía, y más tarde por la hidrodinámica, la geofísica, la mecánica de fluidos, la cosmología, la ingeniería de materiales, la infografía...

La tarea posterior de sistematización teórica (y de interpretación epistemológica) de la enorme cantidad de resultados obtenidos en sus trabajos aplicados -llevada a cabo con motivo de

un ciclo de conferencias impartido en 1973 en el Collège de France- conducirá a Mandelbrot al establecimiento de un inusitado y fructífero puente de traducción entre tres ramas periféricas y otrora inconexas de las ciencias matemáticas: el análisis estadístico de procesos estocásticos y series temporales (el área excavada durante las décadas de 1920-30 por Lévy, Kolmogorov y Wiener), el análisis geométrico de las formas infinitamente irregulares (cuyos precursores dispersos son las "figuras monstruosas" de Cantor, von Koch, Peano y Sierpinski), y el álgebra conjuntiva de la iteración de funciones en el espacio complejo (desarrollada a principios de este siglo por los matemáticos franceses Gaston Juliá y Pierre Fatou).

Este puente es hoy archifamosamente conocido como la teoría de los "objetos fractales" (Mandelbrot, 1987 y 1997a [1982]; Evertsz, Peitgen y Voss, 1996), una extraña cuasi-matemática de la percepción que es a su vez la descripción mecánica más lograda del singular rastro físico (psicológico) que dejan en nosotros las *operaciones de observación*. La teoría de las formas fractales de Mandelbrot, matrimonio inopinado de morfología y energética (la teoría de procesos estocásticos y el análisis topológico son sus piedras angulares), a la vez que logro extremo de la peculiar capacidad mostrativa que es propia de todo formalismo gramatical, constituye el código expresivo más cercano a aquel juego de lenguaje ideal, puramente ostensivo, mostrativo, que Wittgenstein llamaba la "gramática de lo inefable".

La matemática fractal se alza hoy como uno de los más inteligentes métodos de simulación mecánica (p.e. a través de su implementación en la forma de programas informáticos) de las sutilezas operativas y evolutivas de ese ente inaprensible por definición que llamamos *consciencia*. El uso, cada vez más extendido, de gráficos fractales para describir fenómenos espaciales y temporales tan dispares como la persistencia multiescalar de sonidos disonantes en composiciones musicales (Voss y Clarke, 1975), la propagación a gran escala de pequeños errores de información en corpus lingüísticos gigantescos (Mandelbrot, 1968), la aglomeración imposible de individuos y riquezas en el pequeño interior de los habitats urbanos e industriales (Krugman, 1996), o la súbita hegemonía de grupos de opinión minoritarios en mercados económicos e instituciones políticas (Dupuy, 1992), es el síntoma mayor de la emergencia de una constelación de nuevas formas y técnicas narrativas que nos permiten volver a conjugar en modos distintos el enigma ancestral del orden y el desorden en el universo (Prigogine y Stengers,

1990a; Waldrop, 1992; Gell-Man, 1994).<sup>1</sup>

## 2. El *polytechnicién* improbable

Mandelbrot había nacido en Varsovia en 1924 en el seno de una familia judía de ascendencia lituana. Su árbol familiar contiene varias generaciones de intelectuales y académicos, y el hermano menor de su padre, su tío Szolem Mandelbrojt, que se había afincado como profesor de matemáticas en Francia, llegó a ser un afamado analista algebraico, profesor en el Collège de France (durante la década de 1920 fue además uno de los fundadores del grupo de matemática formalista "Nicolás Bourbaki").

En 1936 la familia Mandelbrot en pleno se traslada a París y el joven Benoît ingresa con 13 años (dos años retrasado) en un *lycée* de enseñanza secundaria tras haber tenido una educación primaria bastante peculiar.<sup>2</sup> Tras el refugio de la familia en la provinciana localidad de Tulle durante la Segunda Guerra Mundial, Mandelbrot retorna a París para presentarse, sin preparación específica alguna, a los exámenes de ingreso en las dos instituciones de enseñanza superior más prestigiosas de toda Francia: la Ecole Normale Superior y la Ecole Polytechnique. Según la leyenda intelectual que el mismo Mandelbrot se ha ido creando en entrevistas y conferencias posteriores, aprobará "heróicamente" ambos exámenes a pesar de su deficiente preparación gracias a su extraordinaria facultad para hallar soluciones geométricas visualmente

---

<sup>1</sup> Según la llamada Segunda Ley de la Termodinámica formulada en física macroscópica, existe un destino cósmico inescapable y exterior a la voluntad humana que, a largo plazo, habrá de conducir a toda configuración energética e informacional conocida de la materia hacia el límite último de su degradación calórica y desorden entrópico. Sin embargo, desde el punto de vista interno de la cultura humana, el cumplimiento de este sino presuntamente indefectible se haya abruptamente tropicado e infinitamente diferido. Testimonio de lo cual sería la presencia duradera y proliferación exhuberante de materia agente y pensante: la vitalidad de un sistema evolutivo capaz de originar en su interior un principio auto-trascendente tal como la ley de la entropía. Cf. infra para un examen más detallado de este problema en relación con la historia de la hipótesis del "Demonio de Maxwell".

<sup>2</sup> "Mi madre era médico y estaba asustada por las epidemias, de modo que intentó mantenerme lejos de la escuela cuando yo era pequeño. Varsovia, donde vivíamos, había sido duramente golpeada por la depresión, y mi tío Loterman, que estaba en paro, se ofreció a ser mi tutor. Nunca me forzó a aprender el abecedario de memoria, ni las tablas de multiplicar, sin embargo de pequeño ya dominaba el ajedrez y los mapas, y pronto aprendí a leer con gran velocidad." (Mandelbrot, 1985: 209).

inductibles a problemas de deducción algebraica.

Tras decidirse finalmente por las enseñanzas de la Polytechnique, comenzará su formación científica avanzada bajo la influencia de grandes luminarias matemáticas de la época, como el analista Gaston Julia y, principalmente, el probabilista Paul Lévy, que por aquel entonces comenzaba a ser reconocido en los círculos matemáticos internacionales (en asociación con el matemático ruso Andrei Kolmogorov) por la formalización del concepto de "variable aleatoria" y la refundamentación de la teoría matemática de la probabilidad sobre las nuevas bases de la teoría conjuntiva de la medida y las integrales de Lebesgue.

Luego de su graduación en la Polytechnique, Mandelbrot inicia sus estudios de posgrado bajo la tutela de Lévy, de quién será adjunto durante su época doctoral. Sus primeras investigaciones matemáticas originales, llevadas a cabo a principios de los 50, se adscriben a un cuadro socio-cognitivo muy preciso: la segunda generación de trabajos matemáticos que se aplicaron al desarrollo y perfeccionamiento de modelos formales no mecanicistas del comportamiento humano, en el contexto del extraordinario auge alcanzado por el ambicioso proyecto de investigación científica interdisciplinar puesto en marcha a principios de la década de 1940 con la publicación de *Theory of Games and Economic Behavior* de John von Neumann y Oskar Morgenstern (1944) y *Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine* de Norbert Wiener (1948).

En los primeros años 50 los doctorandos en estadística matemática como Mandelbrot eran seducidos en masa por las cantos de sirena de la teoría de juegos y la teoría de la información, que ofrecían una nueva e interesante *terra incognita* para la exploración matemática: la inteligencia humana (Heims, 1991). De hecho Mandelbrot se considerará a sí mismo el último de los discípulos de von Neumann, del que fue protegido durante su estancia de un año como profesor invitado en el colegio de matemáticas del Centro de Estudio Avanzado de Princeton en el curso 1953-54, tres años antes de la muerte del gran matemático austro-húngaro.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> "El título de mi tesis doctoral era Juegos de comunicación, en gran medida debido a que durante los años inmediatamente anteriores y posteriores a mi doctorado estuve muy influenciado por los ejemplos de John von Neumann y Norbert Wiener. Acababan de aparecer *Cybernetics*, el libro de Wiener, y *Theory of Games and Economic Behavior* de von Neumann y Morgenstern, y eran precisamente estos trabajos los que yo deseaba llegar a emular algún día. Cada uno de ellos parecía atreverse a intentar la unificación y el desarrollo de un enfoque matemático para el tratamiento de una serie de problemas muy antiguos y complejos que traspasaban varias disciplinas... Desafortunadamente la cibernética nunca

Junto con su aprendizaje matemático en la Ecole Polytechnique bajo la tutela de Paul Lévy, Mandelbrot completó la parte francesa de su formación doctoral con las clases de estadísticos matemáticos como Georges Darmois, Robert Fortét y Maurice Fréchet y físicos como Leon Brillouin y Louis De Broglie, dos de los más afamados exégetas epistemológicos de la mecánica cuántica (interpretación de Copenhague) y estadística en la década de los 40 y los 50. La conexión con los físicos matemáticos franceses que merodeaban en torno al nuevo paradigma cibernético emergente le hizo tomar contacto finalmente con el círculo de científicos húngaros emigrados a Gran Bretaña y Estados Unidos y reunidos en torno a la figura de John von Neumann.

Así, además de con von Neumann en Princeton, estudió ingeniería aeronáutica en el Instituto Tecnológico de California con Théodore von Kármán, una de las mayores autoridades de la época en el estudio de la dinámica de fluidos. También Dennis Gabor, especialista en electrodinámica cuántica y pionero de la investigación sobre el láser y sus aplicaciones (inventor de la holografía), tuvo a su cargo al joven doctorando Mandelbrot en su laboratorio de electrofísica del Imperial College de Londres. Finalmente, las enseñanzas de Leo Szilard, físico y biólogo matemático, introdujeron a Mandelbrot en las aplicaciones de la teoría estadística de la información al estudio científico y la ingeniería cibernética de los sistemas de comunicación y organización biológica.

### **3. Entropía e inducción: la controversia del demonio de Maxwell**

La obra investigadora de varios de los científicos que más influyeron en la formación del joven Mandelbrot -Szilard, De Broglie, von Neumann, Brillouin, Gabor- tenía como punto en común la reflexión sobre un conocido problema de física teórica: el problema del demonio de Maxwell. En las décadas de los 30 y los 40 estos científicos habían propuesto, sobre la base de una batería de nuevas herramientas de análisis formal aportadas por la mecánica cuántica (teoría probabilística de la medida, teoría de la radiación del cuerpo negro y optoelectrónica cuántica),

---

llegó a despegar y la teoría de juegos acabó convirtiéndose en otra más de las áreas de subespecialización matemática." (Mandelbrot, 1985: 212).

nuevas soluciones originales a una prolongada controversia sobre la interpretación literal del terrible aserto de Rudolf Clausius: la segunda ley de la termodinámica que predice el incremento irreversible del desorden en el universo.

El físico británico James Clerck Maxwell (1831-1879), conocido entre otras obras por haber ideado unas famosas ecuaciones matemáticas que describen el fenómeno del electromagnetismo y haber fundamentado, en compañía del físico austriaco Ludwig Boltzmann y del matemático estadounidense Josuah Willard Gibbs, la interpretación probabilista de la termodinámica clásica (la cinética de gases, luego conocida como mecánica estadística), planteó por primera vez en una carta escrita en 1867 la posibilidad hipotética de establecer una salvedad a la ley de la entropía.

Podría imaginarse, afirmaba Maxwell en su carta, la existencia de un dispositivo -físico (una trampilla con un muelle) o biológico (un observador humano)- alojado en el interior de un sistema termodinámico que observase la posición y midiese la velocidad instantánea de cada una de las moléculas individuales de un gas en estado de equilibrio térmico, almacenase la información en una memoria y emplease ese conocimiento inductivo -ie. estadístico- para reducir la entropía total del sistema y de su entorno [ver CUADRO 1]. Dicho de otro modo, mediante el uso de este *dispositivo procesador de información* para manipular sabiamente la localización relativa, a uno u otro lado de una pared divisoria, de los movimientos homogéneamente desordenados de las moléculas del gas, podría llegar a obtenerse *trabajo* -un diferencial de temperatura, un incremento del orden- de forma completamente *gratuita*. Esto es, sin necesidad de un gasto de energía compensador que produjese un incremento de la entropía igual o mayor en el interior o en el exterior del sistema.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> La mecánica estadística de los procesos termodinámicos define la temperatura de un gas como un promedio estadístico -se habla siempre de temperatura media- que resulta de la agregación macroscópica de las diferentes velocidades individuales a las que circulan y, por tanto, a las que chocan entre sí y contra las paredes del recipiente, los miles de millones de moléculas que componen el gas. Por tanto, el estadístico asociado a toda medición de temperatura, la desviación típica de las mediciones locales de temperatura respecto de la temperatura media del recipiente, lo que nos dice es que dentro del gas caliente pueden existir moléculas que circulen a baja velocidad, e igualmente dentro del gas frío existe una probabilidad positiva de encontrar moléculas que circulen a gran velocidad. El dispositivo en cuestión adquiriría en la mente de Maxwell la apariencia antropomórfica de un enanito sentado en el dintel de una puertecita que comunicaba un depósito de gas "caliente" con otro de gas "frío". El hombrecillo imaginado por Maxwell debería ser capaz de (a) detectar la presencia individual de una molécula que pasase junto a él desde cualquiera de los lados de la puerta divisoria, (b) determinar



Así pues, el demonio de Maxwell podría, en teoría, burlarse de esa perogrullada de los físicos de que el calor se conduce siempre desde el cuerpo más caliente hacia el más frío. Desde su alumbramiento a mediados del siglo pasado hasta principios de 1950, la modelización de aquel homúnculo imaginario capaz de domeñar la tendencia natural del universo hacia el más completo desorden aleatorio de la materia conduciendo el calor desde los cuerpos fríos hacia los cuerpos calientes, había pasado por las manos de algunos de los físicos más famosos de nuestro tiempo, como Marian von Smoluchowski y Albert Einstein en las primeras década del siglo, Leo Szilard, Leon Brillouin, Dennis Gabor en la década de los 20 y los 30 y Claude Shannon en los años 40 (cf. Bennett, 1988; Leff y Rex, 1990).

Los sucesivos reparos teóricos puestos a la factibilidad práctica de este "motor perpétuo de segunda especie" que permitiría extender ad infinitum las capacidades productivas de la naturaleza, se han basado en argumentos que vinculan el crecimiento del desorden energético en el exterior del sistema con las peculiaridades físicas de las actividades de *manipulación de información* llevadas a cabo por el demonio.

El científico austriaco Leo Szilard fue el primero que, en un trabajo de 1929 con el sugerente título "Disminución de la energía en un sistema termodinámico por la intervención de seres inteligentes", señaló, por medio de un ingenioso mecanismo que corregía en varios aspectos el esquema de la trampa de Maxwell, que era la disipación energética que producían los actos de medición (de la posición y la velocidad) de la molécula realizados por el demonio lo que permitía salvaguardar el axioma del aumento global de entropía ante los incrementos locales de orden causados por la inteligencia demoniaca.

El interés del trabajo de Szilard residía en que su idea vinculaba entre sí de manera bastante directa los dos eslabones fundamentales del nuevo paradigma indeterminista de la física de nuestro siglo: la mecánica estadística y la mecánica cuántica. Luego de su metamorfosis en el

---

con precisión su posición espacial, y (c) medir con la mayor exactitud posible su velocidad instantánea (esto es, su energía cinética potencial). Finalmente, cuando el demonio supiese que muy cerquita de él, pero desde el lado caliente, estaba pasando una molécula cuya velocidad estimase "lenta" en relación con el promedio general del recipiente, abriría la puerta y la haría pasar al lado frío. Inversamente, cuando, del lado frío, pasase una molécula "veloz", abriría la portezuela y la conduciría desde el compartimento frío hacia el cálido. De este modo el demonio podría ser capaz de calentar la parte inicialmente más caliente y enfriar el compartimento inicialmente más frío; esto es, de producir trabajo en un sistema termodinámico en equilibrio sin gasto alguno de energía.

"motor de Szilard", lo que ponía en juego el desafío planteado por el demonio a las leyes fundamentales de la física macroscópica y microscópica era la comprensión del éxito energético alcanzado por los organismos biológicos. La evolución adaptativa, incesante y exitosa, de las estructuras materiales cada vez más sutiles y escurridizas de los seres vivos (la "consciencia" y la "inteligencia") lanzaba su guante insolente al permanente decaimiento calórico de la naturaleza y su corolario final: la muerte térmica indefectible de toda la vida existente sobre el Universo.

El travieso demonio habría de sufrir a continuación los acosos de toda una vasta literatura sobre la irreversibilidad de la observación en la teoría cuántica de la medida. Los trabajos de Leon Brillouin y Dennis Gabor en la década de los 40 profundizaron en el análisis del mecanismo cuántico específico que producía la degradación energética en el acto de medición del demonio al objeto de intentar fundamentar las causas últimas de la disipación térmica y la irreversibilidad entrópica de los procesos físicos a escala subatómica.<sup>5</sup>

Tras la revolución tecnológica que desencadenaron los esfuerzos de investigación bélica durante la Segunda Guerra Mundial, la polémica del demonio de Maxwell se encauzó por dos vías paralelas. En primer lugar, el estudio de los requerimientos *lógicos* de consistencia y complejidad de cómputo de las actividades científicas formales de investigación empírica. En segundo lugar, el estudio de los requerimientos *físicos* de asentamiento material y consumo energético de los nuevos dispositivos de computación mecánica ideados por los ingenieros

---

<sup>5</sup> Para ello echaron mano de la teoría cuántica de la radiación en los cuerpos negros. Según uno de los corolarios más sorprendentes de la segunda ley de la termodinámica elaborado por el físico alemán Gustav Robert Kirchoff en 1859, el tipo de luz propia de un recinto a temperatura uniforme, por ejemplo un horno, hace imposible ver nada dentro de él. De acuerdo con la teoría cuántica de la radiación, cualquier recinto cuyas paredes y cuyo interior se hallen a temperatura constante está lleno de un "gas" de fotones, un baño informe de radiación. Para distinguir objetos de distinto brillo y color introducidos dentro de un horno es necesario iluminarlos con una fuente lumínica exterior pues, en su ausencia, sólo se ve un resplandor naranja uniforme, desprovisto de contraste, y los cuerpos desaparecen ante nuestros ojos. Esto se debe a que, los cuerpos más oscuros, no reflectantes, emiten más luz para aparecer más brillantes que los cuerpos claros, reflectantes, que la absorben en exceso. De modo que la luz total, reflejada o emitida, que proviene de cada objeto es la misma en todos los casos y no es posible distinguir un objeto de otro. El argumento de Brillouin y Gabor afirmaba que para poder siquiera ver una molécula dentro de un gas en equilibrio, como para poder ver dentro de un horno, el demonio necesitaba distinguirla de las demás y para ello habría de iluminarla, excitandola con un haz de luz proveniente de una fuente de iluminación exterior. Como mínimo habría que enviar un fotón desde la fuente lumínica exterior a la molécula, al disiparse la energía del fotón en calor se produciría un aumento de entropía que como mínimo equilibraría la disminución de entropía que produce el motor de Szilard gracias a la información recabada sobre la molécula difusora.

eléctricos y electrónicos. En particular el flamante nuevo gran invento del espionaje criptográfico: el computador digital (cf. Hodges, 1992, *passim*).

Por la primera vía, la de los matemáticos, la controversia sobre el demonio de Maxwell engendraría las teorías matemáticas de la inducción probabilista, la decisión estadística (teoría de la información), los juegos de estrategia y la computación algorítmica -el cuerpo emergente de conocimiento dentro del que se movería Mandelbrot en sus primeras tribulaciones científicas. La segunda avenida de trabajos, el estudio de los requerimientos energéticos y las limitaciones físicas de la productividad del trabajo de las máquinas computadoras, centra su atención en el consumo eficiente de energía por los ordenadores digitales, el estudio de las operaciones lógicas de carácter reversible (copiar) e irreversible (borrar) y sus fundamentos y consecuencias físicas (Bennett y Landauer, 1985).<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup> Esta segunda apertura de la controversia moderna sobre el demonio de Maxwell fue fruto de una serie de trabajos de investigación llevados a cabo desde principios de los 50 dentro de los laboratorios de investigación de la firma por excelencia de la industria informática, la International Business Machines Corporation (IBM). Dos de los principales teóricos de la física de las máquinas de cálculo lógico, Rolf Landauer y Charles Bennett, han desarrollado sus ideas como investigadores empleados por el Centro de Investigación Thomas J. Watson que IBM posee en la localidad de Yorktown Heights, en el estado de Nueva York. El mismo laboratorio de ingeniería teórica en el que Benoît Mandelbrot trabaja desde 1961. A partir de los resultados que han arrojado estos últimos estudios sobre la termodinámica del procesamiento de datos se ha impuesto una nueva línea de argumentación sobre la relación entre la inteligencia observadora del demonio y el desorden entrópico de los procesos termodinámicos. Según esta nueva hipótesis, la supuesta irreversibilidad termodinámica de la medida cuántica pasa a un segundo plano y se destacan en primer término los procesos de inicialización, borrado o "reseteo" de la memoria donde el demonio almacena los datos de sus mediciones, como las operaciones entrópicas por excelencia. Las actividades de destrucción de información -el borrado, el olvido, la desocupación de la memoria- se convierten así, en última instancia, en la causa fundamental del crecimiento perverso de la entropía provocado por las acciones ordenadoras de seres inteligentes. Las operaciones necesarias para ahorrar espacio libre en almacenes físicos de información (memorias) de capacidad finita son la evaluación de información (aprovechable/desechable) y el borrado de memoria. Estas operaciones informáticas suponen un derroche energético. "Supongamos que se inicializa un registro de memoria de  $n$  bits; en otras palabras, supongamos que el valor de cada uno de ellos se fija en cero, sin importarnos cuál era su valor previo. Antes de esta operación, el registro podía estar en cualquiera de los  $2^n$  estados admisibles. Después de esta operación, el registro se halla en un sólo estado. La operación, por tanto, ha comprimido muchos estados lógicos en un sólo... De acuerdo con la premisa de Landauer, para comprimir un estado lógico en un ordenador se debe comprimir también su estado físico: se debe disminuir la entropía de su soporte físico. De acuerdo con la segunda ley, la disminución de la entropía del soporte físico del ordenador no puede ocurrir sin un incremento de entropía del entorno del ordenador. Por consiguiente, no se puede inicializar un registro de memoria sin generar calor y sin aumentar la entropía del entorno. Así, inicializar una memoria es una operación termodinámicamente irreversible." (Bennett, 1988: 67). Reinicializar de nuevo la memoria del ordenador, borrando todos sus contenidos anteriores y dejándola limpia para albergar nuevas operaciones, es el paradigma de la operación de cómputo irreversible definida por Landauer: "La disipación que requiere la preservación de

Las estructuras bioquímicas de la conciencia humana, en alianza con las inmensas protesis computacionales que le proporcionan las diferentes instituciones culturales y tecnológicas de la sociedad moderna constituyen una reserva prácticamente inagotable de pequeños paquetes de "orden congelado". La disponibilidad de este vasto depósito de recursos de baja entropía donado generosamente por la madre naturaleza a lo largo de un prolongadísimo proceso de evolución física, química, biológica y cultural, puede considerarse *prácticamente gratuita*, cuando menos desde el punto de vista de ese acontecimiento puntual, el más ínfimo y fundamental de todos los sucesos aleatorios ocurrido a lo largo de la historia evolutiva toda del Universo, que es la aparición de la vida y la inteligencia humanas.<sup>7</sup>

De este modo, a través de las sucesivas metamorfosis del demonio de Maxwell -la medida/información como fuente de orden neguentrópico, la inducción estadística como fuente de información, el computo lógicamente reversible como fuente de inducción- la ciencia natural del siglo XX ha acabado llevando a cabo un descubrimiento extraordinario: el *dato* relevante para la comprensión de los fenómenos más complejos y desconcertantes del mundo físico no es otro que la extraordinaria capacidad de almacenamiento memorístico, procesamiento eficiente y

---

la segunda ley y la evitación de que se produzca trabajo molecular en el equilibrio térmico proviene no de la transferencia de información al metro o al aparato de control sino de la subsiguiente reinicialización del aparato." (Landauer, 1991: 26).

<sup>7</sup> "La expulsión del hombre de su posición auto-asumida en el centro de la naturaleza debe mucho al principio copernicano de que no ocupamos una posición privilegiada en el Universo... Aunque no consideremos que nuestra posición en el Universo sea central o especial en todas sus formas esto no quiere decir que no sea especial en alguna de sus formas. Esta posibilidad ha conducido recientemente [al físico norteamericano] Brandon Carter a limitar el dogma Copernicano mediante un "Principio Antrópico" de forma que 'nuestra localización en el Universo es necesariamente privilegiada en la medida en que es compatible con nuestra existencia como observadores'. Los rasgos básicos del Universo, incluyendo propiedades tales como su forma, su tamaño, su edad y las leyes que rigen su cambio, deben ser observados para ser de un tipo tal que permita la evolución de observadores, puesto que si, considerando otro universo posible, la vida inteligente no hubiera podido evolucionar en él, es obvio que nadie estaría aquí preguntándose por la razón de la forma, el tamaño y la edad observados del universo. [...] Cualquier propiedad observada del Universo que inicialmente pueda parecerse increíblemente improbable, sólo puede ser considerada en su verdadera medida después de haber dado cuenta del hecho de que ciertas propiedades del Universo son prerequisites necesarios para la evolución y la existencia de algún observador. Los valores mensurables de muchas cantidades físicas y cosmológicas que definen nuestro universo están circunscritos por la necesidad de que los observemos desde un lugar donde las condiciones sean apropiadas para la ocurrencia de la evolución biológica y en una época cósmica que exceda las escalas temporales astrofísicas y biológicas requeridas para el desarrollo de ambientes bioquímicos capaces de soportar la vida." (Barrow y Tipler, 1986: 2).

recuperación instantánea de información que posee el cerebro humano.

Más exactamente, *los códigos de comunicación* que gobiernan la evolución de la especie humana -una gama de recursos de computación que abarca desde los códigos de ADN de nuestro genoma a los programas de *software* informático pasando por el lapicero y la imprenta- aparece a ojos de la física fundamental como la única tabla real de salvación que podría permitirle al demonio violar la segunda ley de la termodinámica produciendo aumentos locales continuados de orden a partir de la sabia manipulación del desorden exterior existente.

#### **4. La termodinámica del lenguaje: una tesis 'extravagante'**

La extraña tesis doctoral defendida en 1952 por el joven estadístico Benoît Mandelbrot ante un tribunal del Instituto de Estadística de la Universidad de París bajo el título de *Contribution a la théorie mathématique des jeux de communication* (Mandelbrot, 1953), constituye uno de los episodios más interesantes -y menos conocidos- del giro copernicano de las ciencias modernas desencadenado por la demoníaca metáfora de James Clerck Maxwell. Aunque su propio autor ha dicho posteriormente de ella que "fue realizada sin asistencia alguna y estaba muy mal escrita", esta olvidada tesis doctoral es sin embargo un texto sorprendente, magnífico, tremendamente original en muchos sentidos: un auténtico tratado moderno de ciencia reflexiva o *epistemología aplicada* cuyo detenido examen es a todas luces esencial para comprender e interpretar todo el desarrollo posterior de su obra.

La primera parte teórica de la tesis consistía en un paseo conceptual, cuyo hilo conductor son las travesuras sucesivas del demonio de Maxwell, a través de un intrincado laberinto de conexiones de doble sentido entre, por un lado, el estudio físico de los *procedimientos de observación* y los *fenómenos de disipación energética* (analizados respectivamente a través de la teoría cuántica de la medida y la mecánica estadística del equilibrio termodinámico) y, por otro, el estudio matemático de la *inducción estadística* (en la versión del análisis lógico de la probabilidad y los juegos de estrategia) y la *codificación semiótica* (desde el punto de vista de ese arte de la comprensión-comprensión de los signos que en el siglo XIX se denominaba estenografía o taquigrafía, o más generalmente criptografía, y hoy denominaríamos teoría de la computación y complejidad algorítmica).

Para esta primera parte de su tesis Mandelbrot se inspiraba en los trabajos recientes de uno de los colaboradores de von Neumann, el matemático rumano Abraham Wald, que había reinterpretado la metodología matemática de la inducción estadística y el análisis de series temporales a la luz de la teoría de juegos en la forma de un juego de decisión interactivo que enfrenta a un observador limitado contra una naturaleza estratégica.

Postulando una conexión directa entre el modelo cibernético de la teoría de juegos de comunicación de Wald y la controversia clásica antes referida sobre la posibilidad de violación de la segunda ley de la termodinámica asociada con la acción de seres inteligentes reductores netos de entropía, Mandelbrot aventuraba la posibilidad de construir una teoría estrictamente *fenomenológica* (ie. subjetiva) de aquéllos fenómenos físicos en los que se implica "esa clase de movimiento que llamamos calor" [*the kind of motion we call heat*] (Stephen G. Brush).

El estudio tradicional de la propagación calórica se abordaba desde el punto de vista del comportamiento cinético de las moléculas, esto es, de la mecánica estadística del movimiento de las partículas materiales. Los investigadores determinaban así promedios estadísticos de *magnitudes físicas* como la "velocidad", la "energía cinética", la "temperatura", la "presión", etc. Mandelbrot proponía en su tesis llevar hasta sus últimas consecuencias la termodinámica fenomenológica clásica y substituir completamente los principios mecánicos de la cinética de gases por consideraciones relativas a dispositivos *epistémicos* de observación, memoria, inducción y comunicación. En este nuevo marco los promedios estadísticos a estimar empíricamente referirían ahora al contenido de *magnitudes psicológicas* tales como la "probabilidad", la "información", el "ruido", el "desorden", etc.

"[En termodinámica estadística] la relación entre la temperatura y la energía... es la misma que existe entre el parámetro de una distribución de probabilidad y la variable aleatoria. Esta relación se conoce bien en el caso llamado canónico, en el que conocemos la temperatura de un recipiente cuya energía fluctúa. Pero no se conoce bien en el caso llamado microcanónico, en el cual la energía permanece fija; en este caso el concepto de temperatura pierde en principio todo sentido. Para devolverle uno, recurrimos a lo que consideramos una nueva definición... la expresión dada por esta definición es simplemente idéntica al valor *estimado* de la temperatura de un recipiente que presumimos había estado primitivamente en contacto con el sistema considerado; de este modo tenemos como recurso la 'estimación'... lo que implica una 'inducción de causa'... [El principal interés de estas cuestiones] es de orden epistemológico: *permiten basar la termodinámica estadística en consideraciones de teoría de la observación*, independientemente de toda cuestión relativa a partículas elementales subyacentes. Puede considerarse entonces que el carácter estadístico de la [física termodinámica] es irreductible, y no tiene por

qué deberse específicamente al resultado de un número extraordinariamente grande de contribuciones atómicas no aleatorias; esto acerca la termodinámica estadística estilo Copenhague a la teoría cuántica." (Mandelbrot, 1958: 39-40, cursivas del autor).

En la segunda parte de la tesis este marco conceptual se aplicaba a la construcción de un modelo matemático de tipo estocástico para el análisis estadístico macroscópico de las formas eficientes de composición, transmisión y *compresión* estenográfica (ie. criptográfica) de mensajes significativos en el marco de códigos de comunicación discretamente articulados.

Mandelbrot utilizaba aquí la analogía inversa de la termodinámica fenomenológica y planteaba la comunicación humana -las secuencias discursivas se asimilaban aquí a un tipo particular de serie temporal de datos estadísticos- como un problema de flujo calórico y disipación entrópica en un espacio abstracto de árboles jerárquicos infinitamente ramificados. En los dos últimos capítulos del texto Mandelbrot intentaba estimar empíricamente el modelo matemático de aproximación analítico-formal de las estructuras sintácticas que gobiernan ese mecanismo *termodinámico* generador, asombrosamente creativo, que produce las series discursivas más improbables y por tanto más dotadas de sentido (poesías, chistes, ecuaciones) que son capaces de albergar las lenguas naturales fonética y alfabéticamente articuladas.

En la parte final de la tesis Mandelbrot entabla un diálogo con los curiosos trabajos matemáticos en psicolingüística y lingüística estadística llevados a cabo por un extravagante filólogo norteamericano, George Kingsley Zipf, sobre la distribución estadística de las palabras.<sup>8</sup> Lo que establecía la llamada "ley de Zipf" de la frecuencia estadística de aparición de las palabras en las lenguas naturales era una sencilla relación lineal entre el *rango* (la posición ordinal [1º, 2º, 3º...] asignada a las palabras, clasificadas según su longitud medida en caracteres alfabéticos, en un hipotético *ranking* jerárquico), y su *tamaño* o frecuencia de utilización empírica en diferentes muestras de producciones lingüísticas (textos escritos, discursos orales, etc).

La relación rango-tamaño inducida empíricamente por Zipf para el caso de la lengua

---

<sup>8</sup> "Una recensión de un libro que encontré en la papelera de mi tío me inició en una tarea extravagante en todos los sentidos: la de explicar la "ley de Zipf", que consiste en una sorprendente regularidad estadística observada en la frecuencia de las palabras. A muchos matemáticos este tópico de investigación les hubiese parecido cuando menos una chifladura, pero yo vi en él una oportunidad de oro para convertirme en el Kepler de la lingüística estadística." (Mandelbrot, 1985: 212).

inglesa establecía que las palabras cortas son mucho más utilizadas que las largas, y que el rango ordinal otorgado a los distintos tipos de palabras en una escala jerárquica abstracta varía respecto de su abundancia o frecuencia estadística en el lenguaje según una proporcionalidad directa de 1:10. Es decir: si para la muestra lingüística definida por el texto de una novela de 500 páginas la palabra más abundante o de rango 1 aparece 10.000 veces, la de rango 10 aparecerá sólo 100 veces (Simon, 1992: 225-27) [ver CUADRO 2].

Mandelbrot llevó a cabo una generalización teórica que explicitaba esta ley empírica al objeto de poder abarcar casos fenomenológicos ("estructuras estilísticas") más interesantes en los que, por ejemplo, la probabilidad de aparición de palabras muy largas o poco frecuentes o muy rebuscadas (es decir, muy *improbables*) es más alta que la predicha por el modelo de decrecimiento lineal de la frecuencia a lo largo de la escala de rangos. Para tales casos Mandelbrot establecerá un nivel más elevado de "temperatura del habla", significando con ello un valor anormalmente alto de un cierto parámetro estadístico  $1/D$  que mide la "riqueza de vocabulario" de una muestra textual significativa como una relación promedio entre la frecuencia relativa de las palabras de mayor rango (las más empleadas) y las de menor rango (las menos empleadas).

La temperatura o riqueza del habla es un promedio estadístico que mide la concentración relativa de los elementos atómicos de un lenguaje (las palabras), del mismo modo que la temperatura de un líquido es un promedio estadístico de las velocidades de las moléculas elementales que lo componen. Por otra parte  $D$  es el exponente característico de una función logarítmica que relaciona el tamaño o frecuencia de utilización  $N$  de las palabras con su rango o posición relativa  $r$ . Hoy definiríamos este exponente  $D$  como la "dimensión fractal" de un árbol jerárquico de clasificación, cada una de cuyas ramas o niveles representa una palabra con una determinada probabilidad de aparición dentro de un vocabulario finito (cf. Mandelbrot, 1987: 161-63 y 1997a: 481-483).

La ley de Zipf establecía el caso especial con  $D = 1$ ;  $1/D = 1$ . Mandelbrot extenderá esta ley para abarcar asimismo casos con  $D < 1$  que hacen  $1/D > 1$ , que aproximan mejor las complicaciones no lineales de las series estadísticas del vocabulario empírico. Series divergentes de sucesos criptográficos que la agregación de grandes números no es capaz de resolver en momentos estadísticos unívocos y límites centrales estables. La media y la varianza de las distribuciones de frecuencias de las palabras usadas en diferentes muestras o *corpus* lingüísticos



toman en muchos casos valores numéricos que varían de forma arbitraria en relación con el tamaño de la muestra. Son estas series de acontecimientos *estrictamente* aleatorios pero a las que nuestros esquemas cognitivos atribuyen diferentes cualidades -todas ellas contingentes desde un punto de vista técnico, es decir, estadístico- de "orden", "regularidad" o "sentido", las que, por más señas, definen los distintos "estilos" o "modos" idiosincrásicos de expresión dentro de una comunidad lingüística (cf. Mandelbrot, 1968).<sup>9</sup> La generalización del uso del ordenador como herramienta de trabajo en el campo de la teoría y la crítica literaria a partir de la década de los 80, ha devuelto la vida a las olvidadas tesis de Mandelbrot sobre la anómala configuración hiperbólica de orden y desorden estadístico que permite describir las singularidades estilísticas más sorprendentes que asociamos con la creación literaria (Irizarry, 1997a).

La ejecución automática de programas informáticos por dispositivos mecánicos de base electrónica cada vez más baratos y potentes para el procesamiento, almacenamiento y recuperación de información altamente estructurada a grandes velocidades, hace posible en la actualidad llevar a cabo de manera rápida y precisa exploraciones iterativas cada vez más sofisticadas de grandes muestras textuales. La nutrida batería de test estadísticos por computadora disponible en nuestros días, ha permitido a los analistas literarios aislar y extraer algunos de los patrones de orden (estadístico) más sutiles que definen a diferentes géneros, estilos, personalidades y obras literarias. Así, por ejemplo, basándose en una serie de investigaciones empíricas de este tipo que tienen por objeto el enorme corpus de la literatura hispánica antigua, moderna y contemporánea, Estelle Irizarry, profesora de literatura hispánica de la Universidad de Georgetown, ha mostrado de manera transparente la asombrosa homología formal que existe entre ciertos resultados inesperados que arroja el análisis estadístico-computacional de textos literarios (p.e. la confabulación de diversidad y repetición en el discurso poético

---

<sup>9</sup> Esta primitiva área de investigaciones fractales ha sido recuperada posteriormente por los trabajos sobre la estructura estadística de diferentes tipos de sucesiones comunicativas humanas (composiciones musicales, charlas radiofónicas...) llevados a cabo a partir de 1970 por los colaboradores de Mandelbrot en el Thomas J. Watson Research Centre de IBM (vid. Voss y Clarke, 1975). No en vano, la explicitación de la ley de Zipf a la luz del modelo estadístico de las distribuciones de probabilidad hiperbólica realizada por Mandelbrot en su tesis doctoral puede ser considerada uno de los primeros ejemplos de lo que luego habrían de denominarse "fractales estadísticos". El propio Mandelbrot ha señalado en entrevistas posteriores que "los problemas de lingüística sobre los que había trabajado en Francia [durante los 50] implicaban ya un movimiento radical de pensamiento que hoy en día puede situarse bastante bien en el marco fractal." (Mandelbrot, 1986: 578).

surrealista) y los descubrimientos más afamados (atractores extraños fractales, caos determinista) del moderno análisis matemático no lineal (realizado también, en su mayor parte, mediante computadoras) en física de fluidos (cf. Irizarry, 1997b).

## 5. Las palabras y las rentas

Uno de los pilares fundamentales del proyecto científico interdisciplinar de Mandelbrot son sus trabajos en el área de la ciencia económica. Sus primeras investigaciones económicas sobre modelos estadísticos de la distribución de los tamaños del ingreso personal en una economía capitalista de mercado (Mandelbrot, 1960 y 1961) se siguieron directamente de su interés por las distribuciones rango-tamaño en lingüística estadística. "La ciencia económica quedaba muy lejos de todo lo que yo había planeado como mis objetivos académicos. Sin embargo, después de que me hubiese hartado ya de la ley de Zipf en lingüística, me dediqué a leer las otras obras de Zipf y fue a través de ellas como llegué a conocer la ley de distribución de rentas de Pareto." (Mandelbrot, 1985: 214).

La llamada "distribución de rentas de Pareto", que había sido destacada por Zipf como una más de las múltiples aplicaciones de su ley en otros campos de la ciencia, era una hipótesis terriblemente controvertida en el campo de la teoría económica desde su aparición en el *Curse d'économie politique* (1896) del ingeniero, economista y sociólogo italiano Wilfredo Pareto. Pareto había hallado que la distribución histórica de la renta en los países capitalistas podía aproximarse bastante bien mediante una distribución de probabilidad lognormal, excepto para el 3% de las rentas superiores para las que la distribución seguía una función exponencial inversa que incrementaba considerablemente la varianza estadística del conjunto total. Si bien en el caso gaussiano clásico de la estadística social -las alturas de los conscriptos estudiadas por Quetelet- la probabilidad de encontrar un sujeto diez veces más alto que otro era prácticamente nula, en el caso de las rentas económicas la probabilidad de encontrar un individuo diez (o cien, o mil) veces más rico que otro, no era en absoluto despreciable.<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup> Pareto había apuntado una explicación de este fenómeno basada en un mecanismo de retroalimentación positiva: el préstamo a interés y la inversión financiera permitía a las grandes fortunas apalancar el crecimiento de su capital de forma mucho más eficiente que el individuo medio, de modo

Al igual que había hecho anteriormente con la ley de Zipf, en sus primeros artículos publicados en revistas económicas Mandelbrot volvió a servirse del marco abstracto general de la teoría matemática de las *distribuciones estables de probabilidad para sumas de variables aleatorias independientes* elaborada al alimón por su maestro Paul Lévy y por Andrei N. Kolmogorov<sup>11</sup>, para generalizar la ley de rentas de Pareto al objeto de poder dar cuenta de toda la amplia casuística empírica en la que la distribución estadística de los ingresos económicos individuales revela los claros síntomas de una abrupta discontinuidad social, de una desmedida jerarquización clasista subyacente.

Entre 1959 y 1961 Mandelbrot llevó a cabo diversos análisis estadísticos empíricos para justificar la aplicabilidad de las funciones estocásticas estables de Lévy-Pareto (generadoras de distribuciones de probabilidad de carácter hiperbólico) como modelos formales de la estructura

---

que sus ingresos redoblados y vueltos a redoblar se acrecentan exponencialmente con el tiempo en relación a los de las fortunas medias y bajas. Asimismo, en un curioso artículo de 1926 titulado "La distribución de probabilidad de la productividad científica", el biólogo matemático Alfred Lotka formuló una ley de probabilidad hiperbólica análoga a las de Zipf y Pareto pero referida esta vez a la frecuencia de publicación de artículos científicos. La regularidad estadística observada consistía aquí en que cuantos más artículos ha publicado un científico en el pasado más artículos es probable que publique en el futuro, y era explicada por Lotka de una forma eminentemente sociológica: los investigadores más famosos alcanzan puestos académicos más altos y desde ellos 'apalancan' progresivamente su capacidad de publicación mediante el reclutamiento de las capacidades de grupos cada vez más numerosos de estudiantes de posgrado cuya formación controlan. Lo realmente interesante tanto en esta explicación como en la anterior de Pareto, es que vemos aparecer en ellas uno de los puntos esenciales del problema teórico, tan actual, de la compatibilidad/incompatibilidad entre las descripciones estocástica y determinista del comportamiento de un sistema dinámico complejo. El mecanismo de retroalimentación, la dinámica no lineal, es justamente el resorte común que aproxima entre sí la peculiar fenomenología de los "ordenamientos estadísticos" que revelan las distribuciones de probabilidad hiperbólicas y la peculiar fenomenología de los "desórdenes deterministas" que proporcionan los atractores caóticos de baja dimensión en el espacio de fases.

<sup>11</sup> Los trabajos de Lévy y Kolmogorov durante las décadas de 1920-30 mostraron cómo la llamada "distribución normal" (la célebre curva acampanada de Gauss), lejos de ser el caso límite universal o norma general a la que deben acabar remitiéndose todos los comportamientos aleatorios observados empíricamente, no era sino un caso más (uno con una varianza estadística particularmente limitada) de una forma matemática más general, la que define a la familia de las distribuciones límite de probabilidad "estables" o escalarmente auto-afines. Esta familia de distribuciones admite otros muchos casos de comportamiento aleatorio que son en general más ricos e interesantes que los estudiados por los devotos decimonónicos del teorema gaussiano del límite central. Los dos textos matemáticos clásicos que desarrollaron los pormenores técnicos de este tipo de distribuciones estadísticas son *Théorie de l'addition des variables aleatoires* de Lévy (1937-1954) y *Limit distributions for sums of independent random variables* de Kolmogorov y Gnedenko (1954). (Para una esclarecedora introducción a los detalles técnicos más importantes de la definición matemática de función estable de probabilidad, véase Mandelbrot, 1963a: 309-16).

multiplicativa de variación del ingreso económico en las sociedades industriales contemporáneas. Estos análisis mostraban con un grado de elaboración teórica y empírica considerable aquello que Pareto no había hecho sino insinuar hipotéticamente: cómo el flujo temporal del ingreso en las economías capitalistas de mercado, en vez de contenerse completamente y repartirse con suavidad dentro de los límites del tranquilo espacio de los "dos tercios medios" como lo manda la ley de la normalidad gaussiana, suele hallarse siempre relativamente polarizado en sus extremos, desbordado en exceso hacia unos límites inferiores y superiores ensanchados y con demasiado poco espacio para los "ingresos medios" [ver CUADRO 3].

Posteriormente, en 1961, después del aterrizaje definitivo de Mandelbrot en Estados Unidos, primero en el Centro de Investigación Thomas J. Watson de IBM y más tarde en la Universidad de Harvard, un encuentro fortuito con los datos estadísticos que un colega suyo en Harvard, el economista Hendrik Houthakker, había reunido sobre la serie temporal de datos de cotización bursátil del precio del algodón en los mercados centralizados del Medio Oeste norteamericano a lo largo del último siglo, dará origen a uno de sus conjuntos investigadores más fascinantes: la modelización econométrica del sorprendente comportamiento de los precios especulativos en los mercados de inversiones y rentas financieras.<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup> Véanse Mandelbrot, 1963a, 1963b, 1966, 1969, 1971, y las valoraciones generales de estos trabajos en Mandelbrot, 1973b, 1973c, 1982 [1997a]: cap. 37 "Variación de los precios y cambios de escala en economía", 1997b, 1997c y 1997d. "Las investigaciones de Mandelbrot concluían que la operativa de los valores financieros aparejaba realmente riesgos más altos de lo que se creía, que la diversificación podía no funcionar tan bien como lo había indicado Markowitz, que medidas [estadísticas del riesgo] como la varianza podían ser altamente inestables, y que los grandes movimientos de precios podían arracimarse [cluster] más densamente de lo esperado por los analistas. [...] Los sucesos de octubre de 1987 y otros episodios menos dramáticos pero cualitativamente similares, prestan cierta evidencia a las advertencias de Mandelbrot. Pero a pesar de tales hechos, Mandelbrot permanece en la periferia de la teoría financiera, tanto por la inconveniencia que para los analistas supone el aceptar sus argumentos, como por el natural deseo humano de esperar que las fluctuaciones permanezcan confinadas entre límites familiares." (Bernstein, 1992: 131-32, cursivas mías). Mención aparte del inicial interés y el posterior rechazo que suscitaron estos trabajos en economistas financieros y econométricos tan afamados como Eugene Fama o Thomas Sargent, tan sólo mínimas referencias a la plausibilidad de algunas de sus aportaciones menos desviacionistas pueden encontrarse dispersas en la literatura económica contemporánea (vid. p.e. Thurow, 1988: 164 y ss). Pero su principal 'descubrimiento', la idea esencial de la invarianza estadística de escala y la complejidad irrestricta de la historia en el análisis de series temporales de datos económicos, sigue siendo completamente ajeno al modo dominante de modelización estadística de la temporalidad económica (cf. Mirowski, 1990 y 1995). Síntoma de que la consideración académica de los trabajos económicos de Mandelbrot está empezando a cambiar, motivada sobre todo por la sucesión de catástrofes financieras a lo largo de los últimos 10 años, es la reciente revisión, sistematización y actualización crítica de sus ideas al respecto, presentada por el propio Mandelbrot como contribución a una reciente conferencia internacional sobre "Riesgos de los

Este importantísimo capítulo de su obra, del que nos ocuparemos más abajo extensamente, permanece sin embargo largamente inexplorado e inexplorado hasta el día de hoy por la comunidad científica para la que en principio fue diseñado: la de los teóricos econométricos y, principalmente, la de los economistas financieros. Las razones de este curioso olvido tienen que ver, como veremos, con cuestiones que tocan a lo más profundo de las concepciones científicas sobre la vida social.

"A mediados de los 60, una queja que oía con frecuencia entre los economistas era: 'Dado que sabemos que tal y tal expresión estadística muestra un comportamiento convergente en todos los otros campos de la ciencia, ¿cómo puede ser que mi propio campo (se quejaba mi interlocutor) afronte él solito la maldición de tener que enfrentar expresiones estadísticas divergentes?' 'Cuando todos los otros campos de la ciencia pueden ser estudiados con métodos matemáticos bien probados que vienen en manuales familiares ¿por qué tiene que pasar que en mi propio campo necesitemos técnicas nuevas, para las que las únicas referencias son siempre tomos polvorientos escritos en francés, o incluso en polaco, o incomprensibles monografías modernas?'" (Mandelbrot, 1985: 215).

## 6. Noé y José o los demonios del juicio especulativo

En su empresa socioestadística más tenaz y elaborada, aquélla que dedicó al estudio econométrico de la variación de los precios especulativos, Mandelbrot observó dos tipos de comportamiento estadístico -en realidad las dos caras de una misma moneda, la historicidad y creatividad extremas que caracterizan a las formas sociales del azar- que resultaban atípicos e inexplicables en el contexto de las directrices marcadas por los dos axiomas canónicos de la teoría probabilística clásica: la ley de los grandes números y el teorema 'normal' del límite central.

"La desaparición de lo aleatorio [en la teoría matemática de probabilidades] se produce a diversos niveles. En primer lugar, y esto quizá es lo más conocido, las medidas y las observaciones efectuadas en un gran número de fenómenos aleatorios presentan en promedio una gran regularidad. A un nivel de observación más fino, también se pueden considerar las fluctuaciones aleatorias de las medidas individuales, dicho de otro modo, las desviaciones de la media. Estas desviaciones se describen por medio de leyes probabilísticas, que también son

---

derivados y otros nuevos instrumentos financieros" celebrada en la ciudad italiana de Siena en diciembre de 1996 (cf. Mandelbrot, 1997b).

regulares. Todavía más, su comportamiento es ampliamente independiente del detalle de los fenómenos concretos que las originan. Como máximo, se encuentran dos o tres tipos de comportamientos que se pueden calificar de universales." (Bouchaud, 1995: 870).

El primero, al que llamó el 'efecto Noé' o síndrome de la discontinuidad de los precios y la varianza infinita (Mandelbrot, 1973b), contradecía una creencia muy arraigada entre los analistas bursátiles que, desde el trabajo precursor de Bachelier, modelaban el comportamiento temporal de las rentas financieras en la forma de un 'paseo aleatorio'. En modelos estadísticos como los de la difusión lognormal (basado en un movimiento browniano geométrico) o la martingala (basado en una regla lineal de iteración de expectativas), se postula que, aunque las variaciones logarítmicas sucesivas de los precios vibran en direcciones completamente impredecibles, lo hacen, en promedio, a *velocidades constantes*, a saltos homogéneos cuya desviación respecto de la magnitud media está limitada según una relación de proporción inversa que la liga con la amplitud del intervalo temporal.<sup>13</sup>

Sin embargo Mandelbrot observaba que, como en el Diluvio Universal padecido por Noé<sup>14</sup>, ciertos *acontecimientos* bursátiles ocurren de golpe y barren todo a su paso: los precios viajan a veces en el tiempo a saltos discontinuos que son mucho mayores de lo que deberían si su dinámica estuviese regida por las leyes completamente democráticas del movimiento browniano puro. De modo que la varianza de las series agregadas, lejos de estar limitada por la raíz cuadrada del incremento temporal, puede crecer de forma exagerada e impredecible para cada nueva ampliación de la muestra.

---

<sup>13</sup> Imaginémos por ejemplo que la cotización de unas acciones o de un índice bursátil cae tendencialmente de 600 a 550 puntos durante un periodo de tiempo determinado siguiendo un movimiento continuo de velocidad media  $v = 10t$ . Dicha cotización pasaría probablemente por el punto de cotización  $c_1 = 590$  en el instante de cotización  $t_1$ , luego, tal vez, por  $c_2 = 570$  en  $t_2$ , para volver quizá en  $t_3$  a  $c_3 = 580$ , cayendo nuevamente hacia  $c_4 = 560$  en el instante  $t_4$  subsiguiente, y finalmente hasta  $c_5 = 550$  en el instante final  $t_5$ . Pero tanto si sube como si baja aleatoriamente a intervalos temporales continuos de entre 10 y 20 puntos, no debería de ningún modo caer de golpe 50 puntos entre dos momentos de cotización sucesivos y saltarse por las buenas todos los precios intermedios "siguientes".

<sup>14</sup> "Y he aquí que yo traigo un diluvio de aguas sobre la tierra, para destruir toda carne en que haya espíritu de vida debajo del cielo; todo lo que hay en la tierra morirá. Porque pasados aun siete días, yo haré llover sobre la tierra cuarenta días y cuarenta noches; y raeré de sobre la tierra a todo ser viviente que hice. Y sucedió que al séptimo día las aguas del diluvio vinieron sobre la tierra. El año seiscientos de la vida de Noé, en el mes segundo, a los diecisiete días del mes, aquel día fueron rotas todas las fuentes del grande abismo, y las cataratas de los cielos fueron abiertas, y hubo lluvia sobre la tierra cuarenta días y cuarenta noches." (Génesis, VI, 17; VII, 11-12)

"Sabemos que las funciones muestrales del movimiento browniano *son* -casi con toda seguridad, casi en todo momento- continuas. Pero los precios en mercados especulativos *no tienen por qué* ser continuos, y de hecho son ostensiblemente *discontinuos*. La única razón para suponer continuidad es que, a sabiendas o de forma inconsciente, muchas ciencias tienden a copiar los métodos que han resultado válidos y útiles en la física newtoniana. La continuidad sería una hipótesis razonable para diversas magnitudes y tasas "exógenas" que intervienen en la ciencia económica pero están definidas en términos físicos. Pero los precios son otra cosa: en mecánica no hay nada parecido, y ésta no sirve de guía al respecto. El mecanismo típico de la formación de precios implica a la vez conocimiento del presente y anticipación del futuro. Aun suponiendo que los determinantes físicos exógenos de un precio varían de forma continua, las anticipaciones [de los agentes] cambian drásticamente, "de golpe". Cuando una señal física de duración y energía ínfimas, "un plumazo", provoca un cambio brutal de las anticipaciones, y cuando ninguna institución es capaz de inyectar la inercia suficiente para mantener bajo control asuntos tan complicados, un precio determinado en base a anticipaciones [subjetivas] puede desplomarse hasta cero, elevarse hasta perderse de vista, hacer cualquier cosa. (Mandelbrot, 1982: 334-35, cursivas del autor [1997a: 468]).

En un sentido estadístico estricto, en este tipo de modelos *los sucesos más improbables son siempre los más importantes*. Los momentos singulares que determinan la estructura característica de la distribución están definidos por intensas fluctuaciones de baja frecuencia que acumulan una enorme cantidad de energía: grandes acontecimientos legislativos fundantes, crisis institucionales y medidas oficiales correctoras, transformaciones organizacionales, contagios difusivos masivos y polarizaciones sociales repentinas (Orléan, 1990).

La enseñanza principal del 'efecto Noé' es pues la de la inestabilidad esencial, propiamente histórica, de toda estructura (física, biológica o cultural) tenida por estacionaria. Algo así como que las "sólidas" configuraciones de equilibrio que el análisis científico suele identificar en el comportamiento a largo plazo de los sistemas dinámicos complejos, no son sino puras apariencias ilusorias, meros artefactos de la perspectiva (escala) observacional (temporal) adoptada. Si en una serie histórica de precios con parámetros estadísticos *aparentemente* estables para un intervalo muestral cualquiera, aproximáramos visualmente el fino detalle geométrico de su representación gráfica observándolo bien desde una perspectiva mucho más cercana, bien desde una mucho más lejana, las formas constantes del dibujo, las regularidades que provee la agregación estadística, los equilibrios estáticos, se desintegrarían ante nuestros ojos [ver CUADRO 4].

El segundo efecto postulado por Mandelbrot, el 'efecto José' o síndrome del 'espectro-H'

de ruido gaussiano 'fraccionario', contradecía el principio de la independencia temporal a largo plazo de las series económicas postulado por la teoría econométrica ortodoxa (Mandelbrot, 1973c: 354 y ss). La econometría financiera al uso (sobre todo tras la aparición de los modelos neoclásicos de equilibrio de expectativas racionales) sólo admite la existencia de mínimos fenómenos de memoria a corto plazo en las series temporales bajo la forma de correlaciones seriales de pequeña escala (lo que se conoce como 'dependencia markoviana').<sup>15</sup>

En el marco general de la teoría económica del equilibrio general competitivo, la detección de tendencias empíricas persistentes de cambio direccional sostenido en los niveles de precios (i.e. de ciclos económicos) deberá poder ser determinada con total independiencia de la propia historia interna particular de cada serie temporal. Para lo cual será necesario recurrir a ciertos modelos de explicación *sui generis* tan ampliamente difundidos como metodológicamente sospechosos.<sup>16</sup> Por ejemplo, a la completa subordinación del ruido minima-

---

<sup>15</sup> El modelo económico neoclásico de mercados eficientes de capital establece que, si bien los precios pueden fluctuar de forma imprevisible en el corto plazo por causa de la especulación racional, su comportamiento a largo plazo debería estar gobernado, de manera determinista, por una de estas dos fuerzas dominantes: (a) bien endógenamente por las leyes supuestamente inmutables de la mecánica racional del comportamiento económico construidas por los economistas neoclásicos -la maximización simultánea de millones de funciones personales de utilidad bajo restricciones presupuestarias- que conducen de forma indefectible al equilibrio en el margen de todas las fuerzas económicas; (b) bien exógenamente por las macrotendencias institucionales y los avatares imprevisibles de la historia socio-política nacional e internacional (guerras, epidemias, desastres naturales, explosiones demográficas, revoluciones tecnológicas...) En ambos casos, un pasado y un futuro suficientemente alejados entre sí serán siempre asintóticamente independientes, por cuanto la inmanencia ahistórica del mecanismo de precios competitivos de equilibrio diluye en el límite de la eternidad toda tendencia evolutiva aparente, convirtiéndola en una mera "perturbación aleatoria independiente". De este modo, paradójicamente, la tendencia global a largo plazo de cualquier "novedad" o perturbación incontrolable que surja a lo largo del proceso económico es la de irse agregando hacia un mismo estado atractor nivelador de diferencias: el modelo clásico del ruido térmico 'blanco' distribuido normalmente. (cf. Leroy, 1989).

<sup>16</sup> "El fracaso del movimiento browniano como modelo de la variación de precios... tuvo como respuesta la invención de una plétora de "parches" estadísticos ad hoc [para intentar salvarlo]. Ante las pruebas estadísticas que rechazan la hipótesis browniana de un comportamiento gaussiano de los precios, el economista prueba una modificación tras otra hasta que logra trapear el test. Un parche corriente es la censura pura y dura, hipócritamente denominada "rechazo de los extremos estadísticos no representativos". Se distinguen variaciones de precios ordinarias, "pequeñas", y variaciones grandes... Las primeras son consideradas aleatorias y gaussianas, y montañas de ingenio se dedican a su estudio... como si a alguien le importaran. Las otras se tratan aparte como "no estocásticas". Un segundo tipo de parche también muy popular consiste en mezclar varias poblaciones aleatorias: si X no es gaussiana, a lo mejor es una mezcla de dos, tres, o más variables gaussianas. Un tercer parche son las transformaciones no lineales: si X es positiva y claramente no gaussiana, quizá log X sea gaussiana; si X es simétrica y no gaussiana, a lo mejor la arcotangente de X pasa el test. Y aun otro procedimiento



lista que introducen la teoría clásica de errores o los procesos markovianos, respecto del marco determinista del cálculo variacional de extremos marginales de utilidad económica subjetiva en sistemas conservativos de intercambio.<sup>17</sup>

Sin embargo en los diagramas estadísticos abigarrados de Mandelbrot *no* se observaba una ruptura abrupta entre las diversas escalas temporales del proceso social. Muy al contrario, los gráficos de cotizaciones bursátiles mostraban una clara continuidad, bien que aperiódica, entre el corto y el largo plazo, traducida como autosemejanza estadística entre las distintas distribuciones de frecuencias muestrales para escalas temporales diferentes. El aspecto visual de las gráficas comprimidas a la escala logarítmica de la evolución de los precios del día era asombrosamente parecido al de las gráficas de los precios del mes, de los precios del año, del decenio y del siglo (vid. Zajdenweber, 1994 para una contrastación reciente) [ver CUADRO 5].

Como en el suceso bíblico de José y el sueño del faraón con las siete vacas gordas (los siete años de abundancia) y las siete vacas flacas (los siete años de escasez)<sup>18</sup>, existía en las series temporales de precios financieros una clara continuidad e interpenetración indiscernible entre pequeñas tendencias cotidianas ('ciclos cortos', series perecederas de tres o cuatro buenas o malas cosechas) y grandes patrones estadísticos de cambio histórico sostenido ('ciclos largos', fenómenos de opulencias o hambrunas históricas).

---

(que considero suicida viniendo de un estadístico) proclama que el precio sigue un movimiento browniano, pero que los parámetros del movimiento varían sin control. Este último parche no es falsable, de modo que, según el filósofo Karl Popper, no puede tratarse de un modelo científico." (Mandelbrot, 1982: 336 [470]).

<sup>17</sup> O mediante el truco metodológico homólogo de supeditar, sin justificación teórica alguna, las singularidades históricas supuestamente 'independientes' asociadas con la sucesión de acontecimientos políticos 'aberrantes' tales como las guerras o las revoluciones sociales, a la también supuesta inmutabilidad histórica de las estructuras jurídico-políticas 'racionales' de asignación competitiva de derechos de propiedad. Tanto en un caso como en otro se cumple siempre que todos los sucesos impredecibles que perturban el equilibrio económico son (a) completamente independientes e idénticos entre sí, (b) se distribuyen de forma homogénea (normal) a lo largo del tiempo, y (c) el valor medio de su agregación asintótica es cero.

<sup>18</sup> "Entonces respondió José a Faraón: "El sueño de Faraón es uno mismo; Dios ha mostrado a Faraón lo que va a hacer. Las siete vacas hermosas siete años son; y las espigas hermosas son siete años: el sueño es uno mismo. También las siete vacas flacas y feas que subían tras ellas son siete años; y las siete espigas, menudas y marchitas por el viento solano, siete años serán de hambre. Esto es lo que respondo a Faraón. He aquí que vienen siete años de gran abundancia en toda la tierra de Egipto. Y tras ellos seguirán siete años de hambre; y toda la abundancia será olvidada en toda la tierra de Egipto y el hambre consumirá la tierra." (Génesis, XLI, 25-31)

Los pequeños ruidos disimétricos observados a nivel local, en vez de diluirse (normalizarse) con el cambio de escala, se amplificaban y replicaban en la forma de macro-ruidos históricos: enormes ciclos aperiódicos cuya resolución excesivamente 'lenta' (las correlaciones estadísticas que les dan vida tardan demasiado tiempo en desaparecer) impedía precisar claramente, al nivel agregado de las distribuciones límite, la perfecta simetría y regularidad característica de las señales estadísticas en los modelos cuadráticos tradicionales de Gauss-Markov (cf. Lo, 1997).

"La idea [central de mis investigaciones económicas] era: en el estudio de los precios no había ninguna diferencia de naturaleza entre las variaciones a corto y largo plazo... Esto iba en contra de las ideas recibidas, según las cuales las variaciones cotidianas se deben a la especulación, y los cambios a largo plazo a las leyes fundamentales de la economía... Este trabajo fue muy mal recibido por aquéllos que se habían acostumbrado a un cierto paralelismo entre los métodos intelectuales adoptados en economía y los que se practicaban desde hacía mucho tiempo en física. *Porque en aquella época, el sistema que yo estaba desarrollando todavía no se había introducido en física.*" (Mandelbrot, 1986: 578, cursivas mías).

El mensaje del efecto José es exactamente el mismo que el del efecto Noé solo que visto desde otro ángulo, a saber: la crítica radical del principio científico clásico de causalidad estable y discernible. Del mismo modo que todo equilibrio aparente acaba disuelto por un gran "Diluvio Universal", la sospechosa duración de los periodos de vacas flacas y vacas gordas no tiene más entidad sustantiva, más razón causal de ser, que la de la pura *casualidad* hiperbólica, jerárquicamente estructurada.

Las estructuras espúreas -"ilusiones perceptivas"- producidas por la concatenación no lineal del azar son ahora esas mismas grandes fluctuaciones que apelan, también ellas, al principio de realidad: las macrotendencias históricas, los ciclos largos, las desviaciones catastróficas, el orden lejos del equilibrio.

"En líneas generales, un patrón de sucesos es científicamente significativo y puede ser considerado con posibilidades de tener continuidad, sólo si en cierto sentido su 'probabilidad' de haber ocurrido por casualidad es muy pequeña... Pero, cuando se trabaja en un campo en el que el ruido de fondo es paretiano, debemos reconocer que la carga de pruebas con la que nos enfrentamos se encuentra más cerca de aquélla característica de la historia y la autobiografía que de la física... [A]lgunos modelos estocásticos... son capaces de generar trayectorias en las que tanto el ojo entrenado como el profano distinguen el tipo de detalle que generalmente asociamos con las relaciones causales... pero estas estructuras deben ser consideradas

*ilusiones perceptivas*. (Mandelbrot, 1963b: 433-34, cursiva del autor).

La coherencia metafísica, el sentido teleológico o la racionalidad positiva atribuidos al discurrir de la historia por ciertas tradiciones de la filosofía idealista occidental, son reformulados aquí a la luz de un principio de interpretación metafórica diferente: como puras ilusiones ópticas o artefactos fantasmáticos.<sup>19</sup>

## 7. Indeterminismo de segundo orden o los límites del probabilismo social

*Todo el valor epistemológico de la teoría de probabilidades se basa en esto: los fenómenos aleatorios considerados en su acción colectiva a gran escala, crean una regularidad no aleatoria.* (B.V. Genedenko y A.N. Kolmogorov, **Limit distributions for sums of independent random variables**)

*Esas manos férreas de la necesidad que sacuden el cubilete de los dados juegan una partida durante un lapso infinito de tiempo: de manera que tiene que haber tiradas que se parecen exactamente a la finalidad y a la racionalidad en todos sus grados.* (Friedrich Nietzsche, **La genealogía de la moral**)

Los análisis estadísticos de distintos tipos de series temporales de fenómenos socioculturales realizados por Mandelbrot (el flujo de las palabras en las lenguas naturales, la distribución del ingreso económico en las sociedades capitalistas, la variación de los precios

---

<sup>19</sup> El discurso filosófico sobre la "racionalidad de la historia" no sería sino el producto de una clara necesidad práctica, el efecto de una política estratégica de producción de realidad: un conjunto de elaboraciones míticas y creaciones imaginarias destinadas a empedrar con suelo duro ese substrato de conocimiento fenomenológico radicalmente elusivo que Mandelbrot identificara con los síndromes estadísticos de la variación y la memoria infinitas. "Una vez que hemos empezado a admitir la invasión de la realidad por fenómenos de apariencia aleatoria, se hace necesario ver ahora cómo el observador se encuentra inextricablemente incluido en los fenómenos que estudia. Es la vida económica aleatoria o determinista? ¿Está el vaso medio lleno o medio vacío?... La teoría neoclásica existe para pintar el retrato de un orden económico determinista, regido por leyes, independiente de las interpretaciones y las maquinaciones de los actores económicos... Pero podríamos haber arribado a un punto en la historia intelectual de la humanidad en el que nuestras imágenes del mundo natural son tan anómicas y espantosas que los economistas no pueden seguir por más tiempo imitando a los físicos, pues ello acabaría por poner en peligro su papel y función en la vida social." (Mirowski, 1990: 306). Véase Hacking (1991: caps. 17 y 22) para una revisión de las ideas filosóficas afines elaborados por Nietzsche y Peirce sobre la comunión entre azar y determinismo.

especulativos en los mercados financieros), han mostrado cómo la estructura estadística característica de la rítmica de estas y otras muchas actividades humanas colectivas en las que "la historia importa a todos los niveles del fenómeno", suele ser la de una distribución de probabilidad no gaussiana, exponencialmente estable.

Puede hablarse de una expansión *hiperbólica* de los sucesos aleatorios, en el sentido de que el algoritmo generador de azar es capaz de dar cobijo probabilístico regular a grupos de eventos que, en la escala métrica de los valores cuantitativos que puede llegar a tomar una variable aleatoria, se encuentran progresivamente alejados entre sí siguiendo una ley de distanciamiento geométrico o exponencial. Esta ley exponencial de generación probabilística hace que, en el límite, pueda llegar a ser factible la aparición de dos sucesos cuyos valores estén infinitamente alejados entre sí.<sup>20</sup>

Este tipo de distribuciones límite de probabilidad, conocidas por los matemáticos como 'distribuciones estables de Lévy' (de Pareto, en la literatura económica, Mandelbrot las denominará 'distribuciones estables de Lévy-Pareto'), presentan dos tipos de características que rompen con la simetría y la constancia simples e idealizadas del movimiento browniano clásico [ver CUADRO 6].

Por un lado, contra el ideal de constancia absoluta implícito en el concepto estadístico de *estacionaridad* (independencia temporal absoluta de todos los momentos estadísticos en el caso gaussiano), presentan un tipo atenuado o *sui generis* de estacionaridad que permite la aparición de dependencia o 'memoria' intertemporal a largo plazo entre las desviaciones promedio de los distintos registros muestrales. La memoria a largo plazo de esta clase de procesos aleatorios adopta la forma de intensas fluctuaciones de baja frecuencia correlacionadas entre sí para cualquier escala temporal<sup>21</sup>.

---

<sup>20</sup> Las amplitudes (densidades espectrales) arbitrariamente prolongables que caracterizan a este tipo de distribuciones de probabilidad, son generadas por: (a) la dependencia a largo plazo entre los sucesos aleatorios (asociada con la ligadura no lineal del proceso generativo); y (b) la propagación a la escala macro de las micro-fluctuaciones de baja frecuencia que se alejan en exceso de los valores límites definidos por los estadísticos convergentes de la distribución normal (asociada con la relativa polarización de la distribución en torno a valores desmedidos) (Mandelbrot, 1963b, 1973a y 1996).

<sup>21</sup> El fenómeno de la cuasi-estacionaridad o 'estacionaridad atenuada' se muestra de un modo muy sencillo en la caracterización de ciertos ruidos estadísticos conocidos como 'ruidos de fluctuación', cuya densidad espectral viene definida por una función potencial hiperbólica del tipo  $1/f^{\beta}$ , para cualquier

Por otro lado presentan, contra la *ergodicidad* o simetría estadística simple típica del azar normalizado (agregación completamente equitativa de variables aleatorias idénticas entre sí) [ver CUADRO 7]<sup>22</sup>, un comportamiento 'jerarquizado', no ergódico, del proceso estocástico subyacente, que dota al azar así generado de simetrías estadísticas más extrañas y codificadas (Mandelbrot, 1963a: 327-328 y 1987: 100-101). En los azares estacionarios no ergódicos, las contribuciones relativas de las diversas variables aleatorias que componen la función de suma de un proceso estocástico *no* tienen todas la misma importancia o peso específico en el resultado final de la suma. El impacto muestral de ciertas realizaciones particulares puede ser de tal magnitud que sus efectos no se diluyan o se diluyan sólo muy lentamente en términos poblacionales, de modo que la agregación de grandes números de eventos azarosos no haga que se anulen rápidamente entre sí en la forma de un límite central claramente definido como sucede en el (especialísimo) caso gaussiano.<sup>23</sup>

---

frecuencia acumulada  $f$ . Cuando el exponente  $\beta$  se aproxima a 0.5 el espectro se asocia con la función de autocorrelación de Wiener que define la completa independencia serial característica del ruido térmico "blanco". Cuando  $\beta$  se aproxima a 1 se obtiene por contra el caso general de la dependencia serial persistente en los ruidos de fluctuación que se conoce abreviadamente como 'ruido  $1/f$ ' (Voss y Clarke, 1975; Mandelbrot, 1982: 254 [1997a: 361]). Para una caracterización teórica general de las propiedades escalares de auto-afinidad estadística propia de los ruidos de fluctuación, los 'ruidos gaussianos fraccionarios' y los 'movimientos brownianos fraccionarios', véanse Mandelbrot y Van Ness (1968) y Mandelbrot (1987, cap. 7).

<sup>22</sup> La hipótesis ergódica se conoce también, en termodinámica estadística, como hipótesis de indisponibilidad o transitividad métrica de un sistema dinámico. En su definición clásica, formulada por nuestro viejo conocido James Clerk Maxwell en 1878, el teorema ergódico afirma que "un sistema en equilibrio, en el curso del tiempo, adopta todos los estados microscópicos mecánicos que son compatibles con con su energía total". Mediante la hipótesis ergódica la física de los sistemas termodinámicos en equilibrio afirma varias cosas a la vez: (a) en cada momento del tiempo cada estado se transforma en un sólo estado consecutivo y todo estado es siempre transformado un sólo estado; (b) a través de esta correspondencia de uno a uno el conjunto de todos los estados del sistema se transforma en sí mismo; (c) por la misma transformación, cualquier subconjunto de  $i$  estados diferentes se transforma en un subconjunto de exactamente  $i$  estados diferentes; y (d) independientemente de las condiciones iniciales, el sistema pasará por todos los estados posibles y cada estado aparecerá, en el límite, con la misma frecuencia relativa.

<sup>23</sup> "Es posible escapar al teorema del límite central, obteniendo una difusión 'anómala', es decir, no gaussiana? Para lograrlo hay que estar en una situación donde se den fluctuaciones muy intensas, donde la probabilidad de observar sucesos atípicos no sea demasiado débil... La consecuencia de estas fluctuaciones rebeldes es doble: de una parte, la suma  $S$  [del proceso estocástico] crece más deprisa que la raíz cuadrada del número de términos que contiene y, de otra, la ley de distribución obtenida ya no es una gaussiana, sino una ley 'estable' de Lévy. Las sumas de Lévy tienen la particularidad de estar estrictamente 'jerarquizadas': un reducidísimo número de términos dominan a todos los demás, que por su parte contribuyen de un modo despreciable a la suma  $S$ . Esta suma refleja

En estos modelos matemáticos del azar los fenómenos más improbables -ie. estructuras organizativas *alejadas del equilibrio*- tienen siempre, en cierto sentido, "demasiada importancia" para la configuración de los promedios estadísticos (Prigogine y Stengers, 1990a: 199-201). La jerarquización de las variables aleatorias según sus diferentes límites de varianza en el interior del algoritmo del proceso estocástico induce la aparición de no linealidades, saltos repentinos y discontinuidades abruptas ("espectro rojo") en los modos de variación de la estructura probabilística del proceso. La ubicuidad de estos ruidos discontinuos para cualquier escala muestral pauta imaginariamente la serie en formas irregulares recursivas o ciclos aperiódicos.

La escalarización invariante del azar provoca en última instancia el surgimiento de altos límites de varianza poblacional agregada, e incluso de varianza infinita. Ambos tipos de fenómenos son impensables e intratables en el sencillo modelo tradicional de los procesos aleatorios normales. A estas formas estocásticas escalarizadas en las que aleatoriedad y causalidad se entrelazan de forma indiscernible, las bautizará Mandelbrot, por oposición al paradigma del "azar benigno" o *indeterminismo primario* asociado con las obras clásicas de Laplace y Gauss, como "azar demasiado errático" "azar salvaje" -*indeterminismo de segunda especie* (Mandelbrot, 1973a y 1996). En los azares benignos, lo que es impredecible a nivel local o micro se hace determinado y predecible a nivel global o macro. En los azares demasiado erráticos, el paso a los grandes números ya no es capaz de proporcionar las bases del control y la predicción.

"Las fluctuaciones benignas han sido descritas por los matemáticos; muchas han sido explicadas por los científicos; los ingenieros han aprendido a manejarlas para volverlas más tolerables... Mas todo el mundo conoce ciertos dominios del saber, aceptados y definidos desde hace tiempo, que se resisten a la cuantificación... [E]l más patente afecta a las fluctuaciones económicas y, muy en concreto, a las financieras. Estas últimas tienen como modelo la exactitud de la física estadística, pero lo menos que puede decirse es que tal modelo sigue siendo un ideal muy lejano... [Para] las fluctuaciones financieras ¿donde se encontrará el equilibrio económico que haga las veces del equilibrio termodinámico "normal"? Me convencí rápidamente de que la noción de equilibrio económico carece de contenido y de que, para describir la variación de precios, no basta con modificar el azar benigno incorporándole innovaciones de detalle. Llegué a la conclusión de que el azar benigno de la mecánica estadística no había supuesto más que un primer estadio del indeterminismo en las ciencias. Era, en consecuencia, indispensable ir más allá del caso benigno... pasar a un segundo estadio del azar, al que ahora me refiero con otro

---

pues sobre todo el valor de los términos más importantes [...] Es como si un viajero se desplazara sucesivamente a pie, a caballo, en coche y en avión: la principal contribución a su desplazamiento total viene siempre del medio de transporte más eficaz." (Bouchaud et. al., 1991: 545-46).

término pintoresco y vigoroso: azar "salvaje" o brutal... Fue en el contexto de [mis investigaciones sobre] la Bolsa donde tomé conciencia por vez primera de un fenómeno inquietante y magnífico: el azar puro [salvaje] puede tener un aspecto que no podemos negarnos a calificar de creativo." (Mandelbrot, 1996: 19-20).

La introducción de mayor variedad relacional en la estructura funcional tremendamente simple de los procesos estocásticos gaussianos clásicos (simpleza que limita artificialmente la variedad de resultados posibles), puede llegar a provocar que, en el límite, los resultados aparentemente deterministas producidos por ciertos algoritmos estocásticos complejificados (dotados de cierta estructura jerárquica y capacidad memorística), se hagan prácticamente indistinguibles respecto de los resultados aparentemente aleatorios producidos por ecuaciones deterministas relativamente privadas de estructura (construidas con cierta 'capacidad de olvido' mediante la introducción de bucles de retroalimentación o no linealidades funcionales), conocidas como sistemas dinámicos no integrables o caos determinista.

En ambos casos, la distribución de probabilidad resultante es una curva de naturaleza exponencial, asintóticamente hipérbolica y estadísticamente auto-afín para distintas escalas de observación muestral; esto es, la constancia abrumadora de las variaciones irregulares se registra en formas asombrosamente parecidas -pero nunca completamente iguales (se habla así de trayectorias 'auto-evitantes')- para todas las escalas espaciales y temporales. De ahí que suela decirse que, en estos casos, la frontera que separa el orden del desorden, el determinismo del azar, se ha difuminado.<sup>24</sup>

Y, por lo que parece, "estos casos" y otros muy semejantes son los más abundantes en el

---

<sup>24</sup> "Esta fuera de toda duda que la noción de aleatoriedad lleva consigo una contradicción irreductible. Para empezar, el orden aleatorio debe ser lo suficientemente irregular como para excluir toda posibilidad de representarlo por medio de una fórmula analítica. Esta es la esencia de la muy interesante observación de Borel en el sentido de que la mente humana es incapaz de reproducir el riesgo. Ahora bien, hace ya mucho tiempo Joseph Bertrand preguntaba: "¿Cómo es posible que hablemos de las leyes del riesgo? ¿No es el riesgo la antítesis de cualquier ley?". La respuesta a la pregunta de Bertrand es que la aleatoriedad no significa algo totalmente fortuito, esto es, una ausencia completa de orden. La oposición entre la tesis de la irregularidad de la aleatoriedad y la antítesis del orden peculiar de la misma encuentra su síntesis en la noción de probabilidad. De aquí nace el carácter circular de la definición de probabilidad, ya sea en la forma la placeana o en la frecuentista." (Georgescu-Roegen, 1996: 105). Para consideraciones análogas sobre las paradojas de orden epistémico y práctico que sabotean continuamente los conceptos matemáticos de orden y el desorden cf. Mandelbrot (1963b), Ekeland (1992) y Ruelle (1993). Sobre el concepto de "multifractalidad", acuñado recientemente por el propio Mandelbrot para precisar cuantitativamente la viva metáfora del "azar salvaje" vid. Mandelbrot (1997c: cap. 3.3).

campo de las relaciones humanas; particularmente en la arena de los intercambios sociales de bienes y servicios económicos a gran escala, donde, con *demasiada frecuencia* (en el sentido estadístico, técnico, de la expresión) la línea divisoria entre sucesos *normales* y sucesos *extraordinarios* carece por completo de sentido.<sup>25</sup>

---

<sup>25</sup> "El punto principal de [los trabajos estadísticos de] Mandelbrot... trata del futuro de las ciencias sociales, particularmente de la economía y la sociología. Señala en primer lugar que la ausencia manifiesta de teorías satisfactorias en estos campos, si se compara con las Ciencias Naturales, no puede achacarse (tal como se hace a menudo) a una diferencia de edad. Al contrario, la teoría de la probabilidad apareció conectada a problemas de las ciencias sociales más de un siglo antes de que las teorías indeterministas hicieran su primera aparición en la Física. Por tanto, la física indeterminista es más joven que la Economía. No, la diferencia parece surgir de la predominancia de las distribuciones de Pareto en los fenómenos básicos a los que las ciencias sociales deben dirigir sus análisis cuantitativos. En economía, por ejemplo, el tamaño de las empresas y las fluctuaciones en los beneficios y los precios siguen la ley de Pareto. En sociología, los tamaños de las "aglomeraciones humanas" tienen una distribución similar que demuestra que los términos de sentido común tales como "ciudades", "villas", y "pueblos" son estructuras ambiguas y subjetivas. El que nuestro vocabulario contenga estos términos es un reflejo de nuestro hábito de dar una descripción específica a un mundo cuyos sucesos se intuyen en términos de estadísticas con valores medios convergentes." (Stent, 1989: 47).



## BIBLIOGRAFIA

- Barrow, John y Tipler, Frank (1986); *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford: Oxford University Press.
- Bennett, Charles H. (1988); "Demonios, motores y la segunda ley", *Investigación y Ciencia*, enero: 60-68.
- Bouchaud, Jean-Philippe (1995); "Las leyes de los grandes números", *Mundo Científico*, 15, 161: 870-874.
- y otros (1991); "Los 'vuelos de Lévy' o la difusión no browniana", *Mundo Científico*, 113: 544-46.
- Brush, Stephen G. (1976); "Irreversibility and Indeterminism: from Fourier to Heisenberg", *Journal of the History of Ideas*, 37(4): 603-30.
- Dupuy, Jean-Pierre (1992); *Introduction aux sciences sociales. La logique des phénomènes collectifs*, Paris: Ellipses.
- Ekeland, Ivar (1988); *El cálculo, lo imprevisto. Las figuras del tiempo de Kepler a Thom*, México: Fondo de cultura.
- (1992); *Al azar. La suerte, la ciencia y el mundo*, Barcelona: Gedisa.
- Evertsz, C.J.G., O. Peitgen y R. Voss (eds.) (1996); *Fractal Analysis and Geometry: The Mandelbrot Festschrift*, Singapoure: Wolrd Scientific.
- Gell-Man, Murray (1994); *El Quark y el jaguar*, Barcelona: Tusquets.
- Georgescu-Roegen, Nicholas (1996); *La ley de la entropía y el proceso económico* [1971], Madrid: Visor-Fundación Argentaria.
- Gleick, James (1988); *Caos. La construcción de una ciencia*, Barcelona: Seix Barral.
- Hacking, Ian (1991); *La domesticación del azar*, Barcelona: Gedisa.
- Heims, Stephen (1991); *The Cybernetics Group*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Hodges, Alan (1992); *Alan Turing: The Enigma*, London: Vintage Books.
- Irizarry, Estelle (1997a); *Informática y literatura. Análisis de textos hispánicos*, Barcelona: Proyecto A Ediciones.
- (1997b); "Ordenando el caos: la poesía surrealista de E.F. Granel", en Irizarry (1997a), pp. 96-107.
- Krugman, Paul (1996); *La auto-organización espontánea de la economía*, Barcelona: Antoni Bosch.
- Landauer, Rolf (1991); "Information is Physical", *Physics Today*, May: 23-29.
- y Charles Bennett (1985); "Limitaciones físicas fundamentales de los procesos de cómputo", *Investigación y Ciencia*, septiembre: 30-39.
- Leff, Harvey y Andrew Rex (eds.) (1990); *Maxwell Demon: Energy, Information and Computing*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Leroy, Stephen F. (1989); "Efficient Capital Markets and Martingales", *Journal of Economic Literature*, 47 (December): 1583-1621.
- Lo, Andrew W. (1997); "Fat Tails, Long Memory, and the Stock Market Since the 1960's", *Economic Notes by Banca Monte di Paschi di Siena*, 26 (2): 213-246.
- Mandelbrot, Benoît B. (1953); *Contribution a la théorie mathématique des jeux de communication*, Publications de l'Institut Henri Poincaré, Paris, vol. 2 (1-2): 3-124.
- (1958); "Quelques problemes de la théorie de l'observation, dans le contexte des théories modernes de l'induction des statisticiens", en A. Jonckheere, B. Mandelbrot y J. Piaget, *La lecture de l'expérience* ("Etudes d'épistemologie génétique", vol. V) París: PUF, 1958: 29-47.
- (1960); "The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income", *International Economic Review*, 1(1): 79-106.
- (1961); "Stable Paretian Random Functions and the Multiplicative Variation of Income", *Econométrica*, 29(3): 517-543.
- (1963a); "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36 (October) [reproducido en P. Cootner (ed.), *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge, MA: MIT Press, 1964:

307-32].

- (1963b); "New Methods in Statistical Economics", *Journal of Political Economy*, 71: 421-440.
- (1966); "Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and 'Martingale' models", *Journal of Business*, 39: 242-55.
- (1968); "Information Theory and Psycholinguistics: A Theory of Word Frequencies", en Lazarsfeld y Henry (eds.), *Readings in Mathematical Social Science*, Cambridge, MA: MIT Press, 1968: 350-68.
- (1969); "Long-Run Linearity, Locally Gaussian Process, H-Spectra and Infinite Variances", *International Economic Review*, 10(1): 82-111.
- (1971); "When Can Price Be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models", *Review of Economic and Statistics*, 53 (August): 225-36.
- (1973a); "Nouvelles formes de hasard dans les sciences", *Economie appliquée*, 36(2): 307-319.
- (1973b); "Le syndrome de la variance infinie et ses rapports avec la discontinuité des prix", *Economie appliquée*, 36(2): 321-348.
- (1973c); "Le problème de la réalité de cycles lents et le 'syndrome de Joseph'", *Economie appliquée*, 36(2): 349-365.
- (1985); "Interview with Benoît Mandelbrot", en D.J. Albers y G.L. Alexanderson (eds.), *Mathematical People. Profiles and Interviews*, Cambridge, MA: Birkhauser, 1985: 207-25.
- (1986); "Cómo descubrí los fractales, entrevista con Benoît Mandelbrot", *Mundo Científico*, 58: 576-80.
- (1987); *Los objetos fractales* [1977], Barcelona: Tusquets.
- (1996); "Del azar benigno al azar salvaje", *Investigación y Ciencia*, junio: 14-21.
- (1997a); *La geometría fractal de la naturaleza* [1982], Barcelona: Tusquets.
- (1997b); "Three Fractal Models in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk", *Economic Notes by Banca Monti dei Paschi di Siena*, 26 (2): 171-212.
- (1997c); *Fractales, hasard et finances*, Paris: Flammarion.
- (1997d); *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, New York: Springer-Verlag.
- y Van Ness, J.W. (1968); "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications", *SIAM Review*, 10(4): 422-437.
- Mirowski, Philip (1990); "From Mandelbrot to Chaos in Economic Theory", *Southern Economic Review*, October: 289-307.
- (1995); "Mandelbrot's Economics after a Quarter Century", *Fractals*, 3: 581-600.
- Orléan, André (1990); "Le rôle des influences interpersonnelles dans la détermination des cours boursiers", *Revue économique*, 41(5): 839-68.
- Porter, Theodore M. (1986); *The Rise of Statistical Thinking, 1820-1900*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press.
- Prigogine, Ilya e Isabelle Stengers (1990a); *La nueva alianza. Metamorfosis de la ciencia*, Madrid: Alianza.
- (1990b); *Entre el tiempo y la eternidad*, Madrid: Alianza.
- Ruelle, David (1989); *Chaotic Evolution and Strange Attractors. The Statistical Analysis of Time Series for Deterministic Nonlinear Systems*, New York: Cambridge Univ. Press.
- (1993); *Azar y caos*, Madrid: Alianza.
- Simon, Herbert A. (1992); "El tamaño de las cosas", en J.M. Tanur (dir.), *La estadística. Una guía a lo desconocido*, Madrid: Alianza, 1992: 223-34.
- Stendt, Günter (1989); "El final de las artes y de las ciencias" [1969] en G. Stendt, *Las paradojas del progreso*, Barcelona: Salvat, 1989: 42-47.
- Thurow, Lester C. (1988); *Corrientes peligrosas. El estado de la ciencia económica*, México: Fondo de Cultura.
- Voss, Richard F. y Clarke, J. (1975); "'1/f noise' in music and speech", *Nature*, 258: 317-18.
- Waldrop, M. Mitchell (1992); *Complexity. The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*, New York: Simon & Schuster.
- Zajdenweber, Daniel (1994); "Propriétés auto-similaires de l'indice CAC 40", *Revue d'économie*

*politique*, 2/3 (mars-juin), pp. 407-434.

JAVIER IZQUIERDO, "El declive de los grandes números", Madrid, noviembre, 1997

Página 34 de 38

**Resumen:** El artículo presenta, en una perspectiva histórica, la obra investigadora pionera, aunque prácticamente desconocida, llevada a cabo por el estadístico y matemático franco-polaco Benoît Mandelbrot (Varsovia, 1924), padre de las matemáticas "fractales", en el campo de la estadística social. La recuperación de la obra socioestadística de Mandelbrot pretende mostrar cómo los modelos matemáticos de atractores "extraños" o "fractales" que alcanzaron enorme éxito en el estudio de fenómenos de comportamiento determinista no lineal en física a lo largo de la década de los 80, habían surgido dos décadas atrás en el contexto de oscuras monografías empíricas en los campos de la lingüística estadística y la econometría financiera. Como precaución contra las nuevas seducciones deterministas que suscita la reciente importación de la "teoría del caos" por parte de un puñado de psicólogos, economistas y sociólogos que desconocen en general la historia de su propia disciplina, nuestro análisis revela el carácter radicalmente paradójico e indeterminista de la primera estadística fractal. Los pintorescos conceptos acuñados por Mandelbrot en diversos trabajos sobre la "temperatura" de la lengua y la "entropía" de los precios especulativos (*aleatoriedad salvaje, indeterminismo de segundo orden*), trataban de bregar con el carácter estadísticamente indecible de varias series de datos sociales para las que no existe procedimiento mecánico de computación alguno capaz de separar de manera fiable la "señal" y el "ruido".

**English summary:** The paper presents, in historical perspective, the pioneering, though practically neglected, research work by the french-polish statistician and mathematician Benoît Mandelbrot (Varsovia, 1924), the father of "fractals", in the field of social statistics. The recovery of the social statistical studies of Mandelbrot, is intended to show how mathematical models of "strange" or "fractal" attractors that reached a big success in the study of nonlinear deterministic behavior in physics during the 80s, had been invented two decades before in the context of some obscure monographies in the fields of statistical linguistic and financial econometrics. As a caution against the new deterministic seductions that rises the present import of "chaos theory" by a handful psychologist, economists and sociologists oblivious in general of the history of their own disciplines, our analysis reveals the radically paradoxical and indeterministic character of that initial fractal statistics. The conspicuous concepts coined by Mandelbrot in varios papers on the "temperature" of language and the "entropy" of speculative prices (*wild randomness, second-order indeterminism*), were intended to make sense of the statistically indecidable nature of some data series describing social phenomena, for which no mechanical computation procedure can confidently separate "signal" and "noise".

## **LISTA DE CUADROS:**

**CUADRO 1:** EL DEMONIO DE MAXWELL (Fuente: Bennett, 1985).

**CUADRO 2:** LEY DE ZIPF DE LA FRECUENCIA DE LAS PALABRAS (ALEMAN Y LATIN) (Fuente: Mandelbrot, 1958).

**CUADRO 3:** LEY GAUSSIANA Y LEY DE LEVY (Fuente: Bouchaud et. al., 1991).

**CUADRO 4:** AUTO-SEMEJANZAS DE ESCALA EN UNA GRAFICA TEMPORAL DE LAS GANANCIAS DE PABLO Y PEDRO EN UN JUEGO DE CARA O CRUZ (Fuente: Mandelbrot, 1963b).

**CUADRO 5:** AUTO-SEMEJANZAS DE ESCALA EN LAS FLUCTUACIONES DE LAS RENTABILIDADES FINANCIERAS DEL INDICE *CAC40* DE LA BOLSA DE PARIS (ESCALAS ANUAL, MENSUAL Y DIARIA) (Fuente: Zajedenweber, 1994).

**CUADRO 6:** MOVIMIENTO BROWNIANO CLASICO ( $D= 2$ ) Y MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONARIO ( $D= 1,43$ ). (Fuente: Mandelbrot, 1987).

**CUADRO 7:** AZAR BENIGNO: EL RUIDO TERMICO BLANCO Y EL TEOREMA ERGODICO (Fuente: Mandelbrot, 1996).

## **TRANSPARENCIAS SESION 1 (MANDELBROT):**

1. EL DEMONIO DE MAXWELL (Fuente: Bennet, 1985).
2. LEY DE ZIPF DE LA FRECUENCIA DE LAS PALABRAS (NIÑO INGLES) (Fuente: Mandelbrot, 1958).
3. LEY DE ZIPF DE LA FRECUENCIA DE LAS PALABRAS (ALEMAN Y LATIN) (Fuente: Mandelbrot, 1958).
4. LEYES RANGO-TAMAÑO DE ZIPF (PALABRAS, CIUDADES) (Fuente: Simon, 1992).
5. GANANCIAS DE PABLO Y PEDRO EN UN JUEGO DE CARA O CRUZ (Fuente: Mandelbrot, 1963b).
6. AZAR BENIGNO: EL RUIDO TERMICO BLANCO (Fuente: Mandelbrot, 1996).
7. LEY GAUSSIANA Y LEY DE LEVY (Fuente: Bouchaud et. al., 1991).
8. GRAFICO BILOGARITMICO DE LA LEYES ESTABLES DE LEVY-PARETO (Fuente: Mandelbrot, 1963a).
9. MOVIMIENTO BROWNIANO CLASICO ( $D= 2$ ) (Fuente: Mandelbrot, 1987).
10. MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONARIO APENAS PERSISTENTE ( $D= 1,9$ ) (Fuente: Mandelbrot, 1987)
11. MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONARIO MEDIANAMENTE PERSISTENTE ( $D= 1,43$ ). (Fuente: Mandelbrot, 1987).
12. MOVIMIENTO BROWIANO FRACCIONARIO MUY PERSISTENTE (Fuente:  $D= 1,1$ ).
13. VUELO DE LEY MUY PERSISTENTE (Fuente: Bouchaud et. al., 1991).
14. VUELO DE LEVY MEDIANAMENTE PERSISTENTE (Fuente: Bouchaud et. al., 1991).
15. FLUCTUACIONES DE LAS RENTABILIDADES FINANCIERAS DEL INDICE *CAC40* DE LA BOLSA DE PARIS (ESCALAS ANUAL, MENSUAL Y DIARIA) (Fuente: Zajedenweber, 1994).
16. MEDIAS SECUENCIALES DE LAS RENTABILIDADES FINANCIERAS DEL INDICE *CAC40* DE LA BOLSA DE PARIS (ESCALAS ANUAL, MENSUAL Y DIARIA) (Fuente: Zajdenweber, 1994).
17. VISTA TRIDIMENSIONAL Y BIDIMENSIONAL DEL CONJUNTO DE MANDELBROT (Fuente: Peitgen, Jürgens y Suppe, 1995).
18. SECUENCIA DE DETALLES DEL CONJUNTO DE MANDELBROT (Fuente: Peitgen, Jürgens y Suppe, 1995).