25-26

GRADO EN MATEMÁTICAS
CUARTO CURSO

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

INTEGRAL DE LEBESGUE

CÓDIGO 6102401-

UNED

25-26

INTEGRAL DE LEBESGUE

CÓDIGO 6102401-

ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN
REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA
EQUIPO DOCENTE
HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE
TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS
COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE
RESULTADOS DE APRENDIZAJE
CONTENIDOS
METODOLOGÍA
SISTEMA DE EVALUACIÓN
BIBLIOGRAFÍA BÁSICA
BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA
RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA
IGUALDAD DE GÉNERO

NOMBRE DE LA ASIGNATURA	INTEGRAL DE LEBESGUE
CÓDIGO	6102401-
CURSO ACADÉMICO	2025/2026
DEPARTAMENTO	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
TÍTULO EN QUE SE IMPARTE	GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO	CUARTO CURSO
PERIODO	SEMESTRE 1
Nº ETCS	5
HORAS	125.0
IDIOMAS EN QUE SE IMPARTE	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

La asignatura *Integral de Lebesgue* tiene como objetivo general presentar las nociones fundamentales de esta teoría de integración, subrayando sus conexiones con otras ramas de las Matemáticas y sus aplicaciones en contextos científicos diversos.
En el plan de estudios del **Grado en Matemáticas**, esta asignatura figura como **optativa del primer semestre del cuarto curso** y tiene una asignación de **5 créditos ECTS**.
El concepto de integral es fácilmente comprensible para funciones reales positivas y continuas definidas en un intervalo cerrado [a, b]. En tales casos, la integral puede interpretarse como el área bajo la curva. Sin embargo, esta interpretación deja de ser inmediata cuando consideramos funciones más generales, con discontinuidades o comportamientos irregulares. ¿Qué significa integrar funciones “exóticas”? ¿Qué condiciones debe cumplir una función para que tenga sentido hablar de “área bajo su gráfica”? Estas cuestiones han motivado históricamente el desarrollo de diversas teorías de la integración.
Durante el siglo XIX, y como parte del esfuerzo por formalizar el análisis, se propusieron diferentes definiciones rigurosas de integral. La **integral de Riemann**, formulada por **Bernhard Riemann (1826–1866)**, proporciona una construcción sencilla y eficaz basada en sumas de áreas rectangulares. Su éxito radica en que ofrece respuestas adecuadas para muchas funciones de interés matemático.
No obstante, la integración de Riemann presenta limitaciones. Por ejemplo, no permite integrar funciones con discontinuidades “densas” ni se comporta bien bajo el paso al límite de sucesiones de funciones, lo cual es crucial en el estudio de fenómenos como las series y transformadas de Fourier. Para abordar estas carencias, **Henri Lebesgue (1875–1941)** propuso una teoría de integración más general, basada en una nueva noción de medida.
La **integral de Lebesgue** permite integrar funciones mucho más generales que las admitidas por Riemann y extiende el dominio de integración a conjuntos más amplios. Un ejemplo emblemático es la **función de Dirichlet**, que vale 1 en los racionales y 0 en los irracionales: no es integrable en el sentido de Riemann, pero sí en el de Lebesgue.

La construcción de esta integral comienza por extender, en la recta real, la noción de longitud de un segmento, y en plano real, la de área de un rectángulo. Se define la medida de Lebesgue como la menor suma (posiblemente infinita) de longitudes o áreas que recubren un conjunto dado. A continuación, se introducen las **funciones medibles**, y se extiende la asignación de medida a estas funciones, obteniendo así la integral de Lebesgue.
Esta construcción es muy poderosa y general. La integral así definida hereda propiedades clave de la medida, especialmente los **teoremas clásicos de convergencia** (monótona, dominada, etc.). Además, permite definir e interpretar integrales en espacios producto —como el plano real con la medida producto—, lo cual lleva naturalmente a los teoremas de **Tonelli** y **Fubini**. Por tanto, esta teoría constituye una **puerta de entrada esencial a la Teoría de la Medida**.
En este contexto, la asignatura tiene como finalidad que el alumno comprenda la definición y las propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue, así como su importancia estructural en el Análisis Real y en áreas afines. Si bien existen otras teorías de integración más generales, su estudio excede el alcance de esta asignatura.
Finalmente, esta materia tiene una continuación natural en el nivel de posgrado a través de la asignatura **Teoría de la Medida**, incluida en el **Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas**, donde se profundiza en aspectos técnicos y generales de la teoría de medidas y su papel en la matemática moderna.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Para abordar el estudio de esta asignatura , es necesario que el alumno tenga conocimientos básicos en Análisis Matemático y en Álgebra.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador/a de asignatura)
Correo Electrónico	abad@mat.uned.es
Teléfono	91398-7234
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Equipo docente de la asignatura (desde este curso):
Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo
Despacho 118
Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias de la UNED
Paseo Senda del Rey, 9
28040-Madrid

Horario de atención al alumno:
Jueves lectivos de 16:00 a 20:00.
Teléfono: 91-3987226
Correo electrónico:
ffernan@mat.uned.es
(Es preferible utilizar el correo electrónico del curso virtual, o el foro, o el teléfono).
La tutorización y seguimiento se llevará a cabo en las guardias (para las cuales, el horario es el antes indicado), y también en el foro de la asignatura del curso virtual. En este foro, las preguntas y respuestas son visibles para todos los alumnos, y también se da la oportunidad de que todos participen en los debates o conversaciones.

TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

En el enlace que aparece a continuación se muestran los centros asociados y extensiones en las que se imparten tutorías de la asignatura. Estas pueden ser:

•**Tutorías de centro o presenciales**: se puede asistir físicamente en un aula o despacho del centro asociado.

•**Tutorías campus/intercampus**: se puede acceder vía internet.

Consultar horarios de tutorización de la asignatura 6102401-

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

CE1 - Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

CEA4 - Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos

CEA7 - Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita

CEA8 - Capacidad de relacionar distintas áreas de las matemáticas

CED1 - Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores

CED2 - Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos

CG10 - Comunicación y expresión escrita

CG13 - Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica

CG4 - Análisis y Síntesis

CG5 - Aplicación de los conocimientos a la práctica

CG6 - Razonamiento crítico

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocer y comprender ciertas clases de conjuntos (anillos, álgebras, -anillos, -álgebras, etc.), y sus propiedades.
Conocer bien las medidas aditivas, completamente aditivas (o -aditivas), y exteriores.
Conocer las funciones medibles e integrables, así como sus propiedades.
Conocer bien los teoremas de convergencia, en relación con la integración; incluido el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
Conocer la complección de una medida y en particular, de un producto de medidas.
Entender y saber aplicar y demostrar los teoremas fundamentales, como son el de Egoroff, el de Lusin, el de de Fubini, o el de Radon-Nikodym, entre otros.
Saber dar diferentes ejemplos de las clases fundamentales que existen de conjuntos.
Poder manejar la medida de Lebesgue y sus propiedades.
Comprender bien los Teoremas de Egoroff y de Lusin.
Manejar con soltura distintos tipos de integrales; sobre todo, la de Lebesgue y la de Riemann.
Familiarizarse con los productos de espacios medibles y de espacios de medidas.
Saber demostrar el teorema de Fubini y los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.
Y las demás cuestiones que aparecen en los contenidos.

CONTENIDOS

CONSTRUCCION DE LA MEDIDA DE LEBESGUE, Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MEDIBLES

UNIDAD DIDÁCTICA I

Tema 1 *Clases de conjuntos (I)*.
1. Anillos de conjuntos.
2. Un anillo de intervalos.
3.-álgebras de conjuntos.

Tema 2 *Clases de conjuntos* (II).
1.Definición y propiedades de las -álgebras.
2. Operaciones con -álgebras

Tema 3 *Medida y medida exterior*.
1. Espacios medibles y medidas y espacios de medida.
2. Propiedades básicas de las medidas.

Tema 4 *Extensiones de medidas*.
1. Teorema de extensión de Hahn.
2. Extensiones de medidas -finitas.

Tema 5 *Medida de Lebesgue-Stieltjes en R*.
1. Medida de Lebesgue-Stieltjes en R.
2. Medida de Lebesgue en R.

Tema 6 *Funciones medibles*.
1. Propiedades de las funciones medibles.
2. Teorema de Egoroff.
3. Teorema de Lusin.

INTEGRAL DE LEBESGUE. TEOREMAS DE CONVERGENCIA Y OTROS RESULTADOS

UNIDAD DIDÁCTICA II

Tema 7 *Integración (I)*.
1. Integrales de funciones no negativas.
2. Aditividad de la integral con respecto al integrando.
3. Teoremas de convergencia.

Tema 8 *Integración (II)*.
1. Funciones integrables e integrales.
2. Propiedades elementales de la integral.
3. Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Tema 9 *Productos de espacios medidas (I)*.
1. Productos de espacios medibles.
2. Productos de espacios medidas.
3. Medida de Lebesgue en R^n .

Tema 10 *Productos de espacios medidas (II).*
1. Productos tensoriales de medidas.
2. Teoremas de Fubini y de Hobson Tonelli.
3. Complección del producto de medidas.

Tema 11 *Espacios de Lebesgue.*
1. Desigualdades fundamentales.
2. Teoremas de convergencia.
3. Espacios $L^p(\mu)$, 1p< .
4. El espacio L(μ).
5. El espacio conjugado de $L^1(\mu)$.
6. Los espacios conjugados de $L^p(\mu)$, 1<p< .
7. Propiedades de densidad.

MEDIDAS SIGNADAS; DESCOMPOSICIONES DE MEDIDAS; EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM

UNIDAD DIDÁCTICA III
Tema 12 *Medidas signadas*.
1. Propiedades elementales de las medidas signadas.

2. Teoremas de Hahn y de Jordan.
3. Las integrales como medidas signadas.

Tema 13 *Medidas complejas.*
1. Propiedades elementales de las medidas complejas.
2. Teorema de Radon-Nikodym.
3. Descomposición de Lebesgue.

En el curso virtual se podrán realizar indicaciones o modificaciones relativas a estos temas.

METODOLOGÍA

En cada capítulo se debe llevar a cabo el estudio del siguiente modo:
- Estudio y comprensión del texto base.
- Realización de los ejercicios propuestos.
- Realización de actividades complementarias si se indican.

Se propondrán dos ejercicios optativo de evaluación continua. (Ver sección sobre evaluación).

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

Ninguno.

Criterios de evaluación

En todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace. Se podrán poner preguntas para comprobar esa comprensión, que es muy importante.

% del examen sobre la nota final	80
Nota del examen para aprobar sin PEC	5

Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	0

Comentarios y observaciones

En el examen podrán aparecer tanto ejercicios o problemas, como demostraciones o preguntas teóricas. En todas las respuestas, será necesario entender bien lo que se hace. Podrán aparecer cuestiones cuyo objetivo sea comprobar esa comprensión, a la que se dará importancia.

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?	Si

Descripción

La evaluación de esta asignatura se hará a través de 2 trabajos y el examen presencial. Los dos trabajos serán:

El primero será la resolución de cinco ejercicios, tanto teóricos como prácticos. Los ejercicios serán sobre propiedades elementales de las medidas y funciones medibles e integrables. Se deberá de entregar al final del primer tercio-mitad del curso (aproximadamente)

El segundo trabajo será desarrollar uno de los temas introducidos en el curso (por ejemplo los espacios L_p). Se deberá de entregar casi al final del curso.

Cada trabajo se evaluará sobre 10 puntos.

Criterios de evaluación

En todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace.

Se podrán poner preguntas para comprobar esa comprensión, que es muy importante.

Ponderación de la PEC en la nota final	Cada trabajo suma como máximo 1 punto de la nota final. Cada nota, en el caso de que sea igual o superior a medio punto, se utilizará en la fórmula que computa la nota final, y que está explicada más adelante.
Fecha aproximada de entrega	1er trabajo: hacia la mitad del curso; 2do trabajo: al final del curso.

Comentarios y observaciones

En todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace.

Se podrán poner preguntas para comprobar esa comprensión, que es muy importante.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?	No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final	0

Fecha aproximada de entrega
Comentarios y observaciones

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Sea
EX:= nota del examen presencial (sobre 10 puntos)
T:= suma de la nota del primer trabajo y el segundo trabajo (sobre 10 puntos)
NF:=nota final (sobre 10 puntos)
Hay varios casos:
Si EX es mayor o igual a 4, entonces NF = max (EX, (4/5)EX + (1/5)T)
Si EX es menor a 4, entonces NF=EX

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788418316869
Título:INTRODUCCIÓN A LA INTEGRAL DE LEBESGUEnull
Autor/es:Victor Olmos Prieto ; Jorge Lopez Abad ;
Editorial:EDITORIAL SANZ Y TORRES

Seguiremos nuestro libro *"Introducción a la integral de Lebesgue"* editado por Sanz y Torres, que acabamos de finalizar.
Existen otros textos, en particular el **Segundo Tomo** del *"Análisis Matemático V"*, del profesor Manuel Valdivia Ureña, editado por la UNED, y que ha sido el libro usado hasta este curso. Hay muchos otros, la mayoría en inglés, que también pueden ser útiles. Algunos de ellos se incluyen en la bibliografía complementaria.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9780070619876
Título:REAL AND COMPLEX ANALYSIS3ª
Autor/es:W.Rudin ;
Editorial:MHHE

ISBN(13):9780134689494
Título:REAL ANALYSIS4ª
Autor/es:P. M. Fitzpatrick ; H. L. Royden ;

Editorial:PEARSON

ISBN(13):9780691113869
Título:REAL ANALYSIS MEASURE THEORY, INTEGRATION, AND HILBERT SPACES1ª
Autor/es:Rami Shakarchi ; Elias M. Stein ;
Editorial:PRINCETON UNIVERSITY PRESS

ISBN(13):9781468494402
Título:MEASURE THEORYSegunda
Autor/es:Paul R. Halmos ;
Editorial:Biirkhäuser-Springer

ISBN(13):9781468494426
Título:MEASURE THEORYnull
Autor/es:P. Halmos ;
Editorial:SPRINGER-VERLAG

ISBN(13):9788420506319
Título:INTEGRACIÓN : TEORÍA Y TÉCNICASnull
Autor/es:Rubio, Baldomero ; Miguel De Guzman ;
Editorial:Alhambra

ISBN(13):9788436223323
Título:ANÁLISIS MATEMÁTICO V[1ª ed., 1ª reimp.]
Autor/es:Valdivia Ureña, Manuel ;
Editorial:Universidad Nacional de Educación a Distancia

•Se pone a disposición de los alumnos unos apuntes personales.

•Existen otras ediciones del libro *Real Analysis* (Royden). La tercera edición también es recomendable.

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Curso virtual donde también se encuentran el foro y correos electrónicos de profesor y alumnos, y la atención a los alumnos en las guardias.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.