25-26

GRADO EN MATEMÁTICAS
SEGUNDO CURSO

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II

CÓDIGO 61022027

25-26

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II

CÓDIGO 61022027

ÍNDICE

NOMBRE DE LA ASIGNATURA	FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II
CÓDIGO	61022027
CURSO ACADÉMICO	2025/2026
DEPARTAMENTO	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
TÍTULO EN QUE SE IMPARTE	GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO - PERIODO - TIPO	- SEGUNDO - SEMESTRE 1 - OBLIGATORIAS
TÍTULO EN QUE SE IMPARTE	PRUEBA DE APTITUD PARA HOMOLOGACIÓN DE GRADO EN MATEMÁTICAS (COMPLEMENTO)
Nº ETCS	6
HORAS	150.0
IDIOMAS EN QUE SE IMPARTE	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

El objetivo de este curso es continuar el estudio iniciado en *Funciones de Varias Variables I*, abordando con mayor profundidad tanto la diferenciación como la integración en espacios de dimensión superior. Además de desarrollar técnicas de cálculo, se busca promover una comprensión sólida de los fundamentos teóricos que las sustentan. A continuación se detallan los bloques temáticos principales:

1. Teoremas de la Función Inversa y de la Función Implícita

Uno de los resultados más importantes en el análisis multivariable es el **Teorema de la Función Inversa**, que garantiza la existencia de una inversa localmente diferenciable de una función si su diferencial en un punto dado es un isomorfismo. Este teorema permite **resolver sistemas no lineales de ecuaciones** alrededor de soluciones conocidas y entender la estructura local de aplicaciones diferenciables.

En paralelo, el **Teorema de la Función Implícita** generaliza esta idea a situaciones en las que una relación entre variables define implícitamente una o varias de ellas como funciones de las restantes. Su utilidad es clave en geometría, física matemática y teoría de ecuaciones diferenciales, entre otros contextos.

2. Extremos Relativos y Condicionados. Método de los Multiplicadores de Lagrange

La búsqueda de **máximos y mínimos de funciones multivariables** constituye un problema central en optimización. Cuando la función está definida sobre un conjunto abierto, los extremos relativos pueden encontrarse estudiando los **puntos críticos** (donde el gradiente se anula). Pero si la función está sujeta a **restricciones** (por ejemplo, definida en una superficie o curva), los métodos clásicos no son aplicables directamente.

Aquí entra el **método de los multiplicadores de Lagrange**, que permite hallar los puntos extremos bajo restricciones de tipo igualitario. Este método se basa en estudiar el sistema de ecuaciones que surge al igualar los gradientes de la función objetivo y de las funciones que describen las restricciones, permitiendo así la formulación de problemas de optimización en geometrías más generales.

3. Construcción de la Integral de Riemann en \mathbb{R}^n

Extender la noción de integral a funciones de varias variables requiere reformular cuidadosamente las ideas utilizadas en una dimensión. La **integral de Riemann en** \mathbb{R}^n se construye dividiendo el dominio en bloques rectangulares (paralelotopos) y aproximando la función mediante valores en puntos representativos de cada subdominio.

Este proceso lleva a la noción de **suma de Riemann múltiple**, y bajo ciertas condiciones de continuidad o acotamiento, se demuestra la existencia del límite de tales sumas. Se estudian también propiedades básicas de la integral así definida, como linealidad, monotonía y aditividad respecto al dominio.

4. Teorema de Fubini y Cambio de Orden de Integración

El **Teorema de Fubini** establece condiciones bajo las cuales una integral múltiple puede **descomponerse como una sucesión de integrales iteradas**, en distintos órdenes. Esto es fundamental tanto desde el punto de vista teórico (conexión entre integración en productos de espacios y medida producto) como práctico (facilita enormemente el cálculo explícito de integrales).

Gracias a este teorema, podemos resolver integrales dobles o triples eligiendo el orden más conveniente de integración, e incluso **deducir la existencia de la integral múltiple a partir de la existencia de las iteradas**.

5. Teorema del Cambio de Variable

Este resultado es la generalización multivariable del cambio de variable en una dimensión. Permite transformar una integral definida sobre un dominio complicado en otra sobre un dominio más sencillo, a través de **aplicaciones diferenciables biyectivas con determinante jacobiano no nulo**.

El **jacobiano** de la transformación mide cómo cambian las áreas, volúmenes u n-medidas bajo dicha transformación. El teorema establece que la integral de una función compuesta con el cambio de variable se puede calcular como la integral sobre el nuevo dominio de dicha función multiplicada por el valor absoluto del jacobiano.

Este teorema es esencial en el cálculo de integrales en coordenadas polares, cilíndricas, esféricas, o más en general en cualquier sistema de coordenadas adaptado a la simetría del problema.

6. Cálculo de Áreas y Volúmenes

Uno de los usos clásicos de las integrales múltiples es el **cálculo de áreas y volúmenes** de regiones en el plano y el espacio. Para regiones planas, las **integrales dobles** permiten calcular el área encerrada bajo superficies; para regiones en \mathbb{R}^3, las **integrales triples** se emplean para hallar el volumen de cuerpos tridimensionales.

Este bloque incluye la determinación de **regiones de integración** y el uso estratégico de los teoremas anteriores (Fubini y cambio de variable) para simplificar el cálculo. También se exploran aplicaciones geométricas y físicas, como el cálculo de masas, centros de gravedad y momentos de inercia.

Enfoque del curso

Además de aprender a **resolver problemas de cálculo**, se fomenta el desarrollo de una **comprensión profunda de los conceptos fundamentales**, enfatizando el razonamiento matemático detrás de cada herramienta. El estudiante deberá ser capaz no solo de aplicar fórmulas, sino también de entender cuándo y por qué dichas herramientas son válidas y útiles.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Conocimientos previos

Para abordar el estudio de esta digamos nueva asignatura en las mejores condiciones posibles, es conveniente que el alumno tenga conocimientos matemáticos previos de Álgebra y del Análisis Matemático.

También son muy convenientes algunos conocimientos de Inglés, a nivel de lectura al menos.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador de asignatura)
Correo Electrónico	abad@mat.uned.es
Teléfono	91398-7234
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Nombre y Apellidos	JOSE IGNACIO TELLO DEL CASTILLO
Correo Electrónico	jtello@mat.uned.es
Teléfono	91398-7350
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Jueves de 16 a 20 horas

TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

CE1 - Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

CEA4 - Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos

CEA7 - Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita

CEA8 - Capacidad de relacionar distintas áreas de las matemáticas

CED1 - Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores

CED2 - Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos

CG10 - Comunicación y expresión escrita

CG13 - Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica

CG4 - Análisis y Síntesis

CG5 - Aplicación de los conocimientos a la práctica

CG6 - Razonamiento crítico

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

•Dominar los Teoremas de la Función Inversa e Implícita. Introducirse en los conceptos de variedades diferenciales.
• Aplicación de los teoremas de los Multiplicadores de Lagrange. Problemas de optimización.
•Estudiar el concepto de integral de funciones escalares de varias variables. Saber plantear y resolver integrales de funciones de varias variables. Aplicar al cálculo de volúmenes y cuerpos de densidad variable.
•Dominar los teoremas básicos de Fubini y Cambio de Variable. Aplicaciones a casos concretos.
•Resolver problemas que impliquen el planteamiento de integrales (longitudes, áreas, volúmenes, centros de gravedad, etc.)

CONTENIDOS

1. EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

(Sección 3.3 del libro de texto).
Se trata de
•estudiar los extremos locales de una función real de varias variables con su diferencial y su Hessiana.
•cuando un extremo local es un extremo global

2. METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE. EXTREMOS CONDICIONADOS.

(Sección 3.4 del libro de texto).
Es bien sabido que la imagen continua de un compacto es compacto, y por tanto toda función continua real de varias variables tiene máximos y mínimos cuando en cualquier compacto. La cuestión es saber cómo calcularlos. Cuando el compacto en cuesto se puede parametrizar razonablemente y la función es lo suficientemente suave, entonces se puede usar el método de los. multiplicadores de Lagrange para calcularlos.
La demostración completa usa el Teorema de la función implícita, que se estudia a continuación.

3. TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLICITA E INVERSA

(Sección 3.5 del libro de texto).
Supongamos que dada una ecuación F(x,y)=0, siendo x,y vectores, se conoce que para cada x existe un único y tal que (x,y) son solución de la ecuación. En este caso, tenemos definida una función que asigna a cada vector x el correspondiente y, y que llamaremos g. Resulta natural pensar que si F es una función muy regular (con diferenciales), entonces g también lo será. El teorema de la función implícita hace este estudio, en general, incluso si no se conoce explícitamente la función g (y que es casi siempre así).

4. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL

(Capítulo 4 del libro de texto)
Se empieza el estudio de las funciones de varias variables con valores vectoriales, es decir funciones $f:R^m$--->R^n. Se introduce la longitud de un arco en R^n, la divergencia y el rotacional.

5. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

(Capítulo 5 del libro de texto)
Estudiaremos la integración (de Riemann) de funciones reales de dos y tres variables, o integrales
dobles y triples. Al igual que la integral de una función positiva de una variable representa el área por debajo de gráfica de la función, la integral de una función positiva $f:R^2$--->*R* representa el volumen debajo de la gráfica de *f*, y se puede definir rigurosamente como límite de sumas aproximantes. La integral triple se define de manera similar, aunque su

interpretación geométrica es más difícil de imaginar (se trata de un "volumen 4-dimensional")

7. TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

(Capítulo 6 del libro de texto)
Posiblemente el teorema más útil en la teoría de integración. Se basa en el principio de que la longitud, área o volumen de un segmento, rectángulo, paralelepípedo (respectivamente) son invariantes bajo traslaciones. De aquí se sigue directamente que la integral es invariante bajo cambio de coordenadas afines no-triviales, y en general también bajo cambios suficientemente regulares (cuando la función se aproxime localmente por funciones lineales)

8. INTEGRALES IMPROPIAS

(Sección 6.4 del libro de texto)
Se estudian las integrales de funciones de varias variables sobre límites no necesariamente acotados. Son las denominadas integrales impropias, y son límites de integrales sobre dominios acotados.

METODOLOGÍA

El plan de trabajo se referirá al texto base *Cálculo Vectorial* (J. E. Marsden y A. J. Tromba, Pearson). En él se fijan tanto los contenidos del estudio como la notación, que puede cambiar en los distintos libros que tratan de la materia.
Gran parte de la formación recae sobre el trabajo personal del alumno con la bibliografía recomendada, básica y complementaria, siempre con la ayuda del profesor de la Sede Central de la UNED, los tutores y las tecnologías de ayuda de la UNED. Los contactos con el profesor pueden ser: presenciales en la Sede Central, por teléfono, email, correo postal, y el curso virtual.
Se hará hincapié en el curso virtual, porque está probando ser una herramienta de enorme utilidad para los estudiantes en los últimos años: En el foro docente-guardia virtual, donde los alumnos consultan al profesor cuestiones específicas de la asignatura que serán atendidas por éste y por distintos ProfesoresTutores.. En el foro de consultas generales, donde se plantearán preferentemente cuestiones de caracter burocrático, de gestión o de procedimientos de evaluación. En el foro de alumnos, donde se podrán comunicar con los otros alumnos; no es un foro tutelado, por lo que los profesores no se responsabilizarán del contenido del mismo.
Finalmente, se podrán crear foros de cuestiones concretas: conjuntos, relaciones, etc... que consistirán en preguntas orientadas a la profundización y comprensión de los estudiantes; estarán abiertos durante un tiempo en el cual se contestarán los alumnos entre sí, participando el profesor sólo cuando lo considere necesario.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	3
Duración del examen	120 (minutos)

Material permitido en el examen

ninguno

Criterios de evaluación

% del examen sobre la nota final	100
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	4

Comentarios y observaciones

Existirá la posibilidad de realizar una PEC, siempre de carácter voluntario, pero constituyendo una práctica recomendable, contando hasta un +1 punto sobre la nota final.

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?	Si

Descripción

Se tratará de resolver una lista de 3 ejercicios (0.2 cada uno) y desarrollar un tema teórico (0.4 puntos)

Criterios de evaluación

Dependiendo de la calidad de las respuestas, se sumará hasta un punto a la nota de la Prueba Presencial, hasta un máximo de 10. En otro caso no se sumará ni restará nada a dicha nota.

Ponderación de la PEC en la nota final	Hasta +1 punto
Fecha aproximada de entrega	Diciembre

Comentarios y observaciones

En el examen podrán aparecer tanto ejercicios o problemas, como demostraciones o preguntas teóricas. En todas las respuestas, será necesario entender bien lo que se hace. Podrán aparecer cuestiones cuyo objetivo sea comprobar esa comprensión, a la que se dará importancia.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?	No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final

Fecha aproximada de entrega
Comentarios y observaciones

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Se hará la evaluación aplicando la fórmula:
Mínimo{PP + PEC, 10} (siempre que la nota de la PP sea mayor o igual que 4, en otro caso la nota final es la de la PP).

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788478290697
Título:CÁLCULO VECTORIAL5ª
Autor/es:Tromba, Anthony J. ; Marsden, Jerrold E. ;
Editorial:PEARSON ADDISON-WESLEY

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Existen muchos otros libros de texto que, si conviene, se discutirán en los foros.

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

1. *Curso virtual,* donde se encuentran materiales de apoyo al estudio, el acceso al foro y los correos electrónicos de profesores y alumnos, junto con laboratorios informáticos para el uso de programas de apoyo al estudio, etc.

2. Programa MAXIMA, de cálculo simbólico libre:
https://maxima.sourceforge.io/es/
3. *Editor GEOGEBRA, un programa de geometría dinámica:*
https://www.geogebra.org/

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.