Tema 4: Integrales

Ejercicios

Esther Gil Cid

Departamento de Matemática Aplicada I
ETSI Industriales. UNED

Integrales

Esther Gil
Departamento de Matemática Aplicada
ETSI Industriales

Índice general

1. Ejercicios propuestos de Integrales definidas e integrales indefinidas

1.1. Enunciados

Problema 1.1: Comprobar que las funciones $F(x) = \ln(\cos(x + \pi/4)) - 3$ y $G(x) = \ln(\cos(x + \pi/4)) + 2$, para $x \in (0, \pi/4)$ son primitivas de

$$f(x) = -\operatorname{tg}(x + \pi/4).$$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 1.2: Encontrar la primitiva $F(x)$ de $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ que verifica que $F(0) = 2$.

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 1.3: Tenemos la función

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x.$$

Compruebe que

$$F(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + 2$$

es una primitiva suya. Estudie si lo es también

$$G(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 3x.$$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 1.4: Sabemos que

$$\int \ln\left(4x^2 + 1\right) = x \ln\left(4x^2 + 1\right) - 2x + \operatorname{arctg} 2x + k,$$

donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x y k es una constante. Buscamos una primitiva $F(x)$ de $\ln(4x^2 + 1)$. Si sabemos que $F(0) = 0$, ¿cuál es el valor de k?.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

1.2. Soluciones

Solución del problema 1.1

Como $F(x) = G(x) - 5$, sus derivadas van a coincidir.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{\cos(x+\pi/4)} (\cos(x+\pi/4))' = -\frac{\mathrm{sen}\,(x+\pi/4)}{\cos(x+\pi/4)} \\ &= -\mathrm{tg}\,(x+\pi/4) = f(x). \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \int f(x)\,dx = G(x) + C'.$$

Solución del problema 1.2

Primero tenemos que buscar una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Sabemos que ésta es la derivada del arcotangente, por lo que es una integral inmediata:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}\, x + k.$$

De todas las posibles primitivas, tenemos que elegir aquella que hace

$$\mathrm{arctg}\, 0 + k = 2 \Longleftrightarrow 0 + k = 2 \Longrightarrow k = 2.$$

Entonces, ya tenemos $F(x) = \mathrm{arctg}\, x + 2$.

Solución del problema 1.3

Para comprobar si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, tenemos que estudiar si $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = \frac{1}{3} 3 \mathrm{sen}^2 x \cos x = f(x).$$

Luego F es una primitiva de f.

Repetimos el procedimiento con la función $G(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{12} 3\cos 3x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x \\ &= \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = \frac{1}{4}\cos x - \cos^3 x + \frac{3}{4}\cos x \\ &= \cos x - \cos x \cos^2 x = \cos x\left(1 - \cos^2 x\right) = \cos x \,\mathrm{sen}^2 x. \end{aligned}$$

hemos utilizado la siguiente expresión el coseno del ángulo triple:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Luego G también es una primitiva de f. Esto no debería extrañarnos, ya que $F(x)$ y $G(x)$ difieren en una constante aunque no nos parezca obvio: es por las relaciones entre las razones trigonométricas.

Solución del problema 1.4

Tenemos que buscar k para que

$$0 = F(0) = 0 \cdot \ln\left(4 \cdot 0^2 + 1\right) - 2 \cdot 0 + \operatorname{arctg} 2 \cdot 0 + k = k.$$

Luego $k = 0$.

2. Ejercicios propuestos del Teorema fundamental del Cálculo

2.1. Enunciados

Problema 2.5:
Calcule la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 4x^2 dx.$$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 2.6: Se pide Calcule las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow:
a. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} dx$, b. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x \cos x dx$.
Pulse aquí para ver la solución.

Problema 2.7: La función F está dada por

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^t dt.$$

¿Cuánto vale $F'(x)$?
Pulse aquí para ver la solución.

2.2. Soluciones

Solución del problema 2.5

Se resuelve la integral y se tienen en cuenta los límites de integración, aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 4x^2 dx = \left.\frac{4}{3}x^3\right|_0^1 = \frac{4}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{4}{3}.$$

Solución del problema 2.6

a. Esta integral es un logaritmo neperiano

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx &= \ln\left|x^2-1\right|\Big|_2^3 = \ln\left(3^2-1\right) - \ln\left(2^2-1\right)\\ &= \ln 8 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

b. La integral es inmediata, resultando

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{sen} x \cos x dx &= \left.\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\right|_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 0\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 1.\end{aligned}$$

Solución del problema 2.7

Si hacemos las cuentas, tenemos por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$F(x) = e^t\Big|_0^{x^2} = e^{x^2} - e^0 = e^{x^2} - 1.$$

Derivando, tenemos:

$$F'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

3. Ejercicios propuestos de Integrales inmediatas

3.1. Enunciados

Problema 3.8: Calcule
$$\int e^{73x}dx.$$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 3.9: Determine la integral definida
$$\int_0^2 xe^x dx.$$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 3.10: Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx,$ b. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 3.11: Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x-3}\right) dx,$

b. $\displaystyle\int \left(\frac{4}{3x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\right) dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 3.12: Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-\left(x^2+5\right)^2}}dx,$ b. $\displaystyle\int (3x+1)\, e^{3x^2} e^{2x} e^{-1} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 3.13: Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx,$ b. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x-1}{x^2+1}dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

3.2. Soluciones

Solución del problema 3.8

Esta integral se resuelve teniendo en cuenta que la derivada de $e^{cx} = ce^{cx}$. Utilizando las propiedades de las integrales, podemos escribir

$$\int e^{73x} dx = \frac{1}{73} \int 73e^{73x} dx = \frac{1}{73} e^{73x} + k.$$

Solución del problema 3.9

Por el primer ejemplo de la Ficha 3, sabemos que

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + k.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^x dx &= xe^x - e^x\Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 - \left(0e^0 - e^0\right) \\ &= e^2 + 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que no hemos considerado la constante k de la integral indefinida porque no es necesario, al ser una integral definida.

Solución del problema 3.10

a. Para resolver esta integral, observamos que el numerador es la integral del radicando ("lo de dentro de la raíz"), que está en el denominador. Como la integral de

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + k,$$

entonces esta integral es cuasi-inmediata:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} + k.$$

b. Si en el denominador no apareciera $(x+1)$ sino $(1+x^2)$, la derivada podría ser una arcotangente. Como, además, podemos escribir la integral como:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int \frac{1}{x+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx,$$

entonces esta integral es cuasi-inmediata, porque $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es la derivada de $\sqrt{x}$ y entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} &= 2\int \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ &= 2\int \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\left(\sqrt{x}\right)' dx = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}+k.\end{aligned}$$

Solución del problema 3.11

a. Para resolver esta integral primero tenemos en cuenta la aditividad

$$\begin{aligned}I &= \int \left(\frac{1}{3x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x-3}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{3x+2}dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx.\end{aligned}$$

La primera integral es inmediata porque es un logaritmo neperiano

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x+2}dx &= \int \frac{1}{3}\ \frac{3}{3x+2}dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|3x+2| + k_1.\end{aligned}$$

La segunda integral también es un logaritmo neperiano, ya que el numerador es la derivada del denominador

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx &= \int \frac{\left(x^2+x-3\right)'}{x^2+x-3}dx \\ &= \ln\left|x^2+x-3\right| + k_2.\end{aligned}$$

Así, resulta

$$\begin{aligned}I &= \int \left(\frac{1}{3x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x-3}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|3x+2| - \ln\left|x^2+x-3\right| + k.\end{aligned}$$

b. Es muy similar a la integral anterior, pero hay que realizar algunas manipulaciones.

Aplicamos aditividad y queda:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{4}{3x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx \\ &= \int \frac{4}{3x-1} dx + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx. \end{aligned}$$

La primera integral es cuasi-inmediata, ya que

$$\int \frac{4}{3x-1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{3}{3x-1} dx = \frac{4}{3} \ln |3x-1| + k_1.$$

En la segunda integral, el numerador es la derivada del radicando. Parece lógico manipular esta expresión hasta que quede una integral inmediata

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2+5\right)'}{\sqrt{x^2+5}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int 2 \left(\sqrt{x^2+5} \right)' dx \\ &= \sqrt{x^2+5} + k_2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{4}{3x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \ln |3x-1| + \sqrt{x^2+5} + k. \end{aligned}$$

Solución del problema 3.12

a. Esta integral es un arcoseno, porque en el denominador la raíz de $1 + \left(x^2+5\right)^2$ y en el numerador lo que se puede transformar en la derivada de x^2+5. Es cuasi-inmediata. Primero, tenemos que conseguir que en el numerador esté la derivada de x^2+5, que es $2x$. Hacemos:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+\left(x^2+5\right)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1+\left(x^2+5\right)^2}} dx.$$

Esta integral es ya inmediata, porque en el numerador está la derivada de x^2+5

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+\left(x^2+5\right)^2}} dx = \frac{1}{2} \text{arcsen} \left(x^2+5 \right) + k.$$

b. Podemos escribir

$$e^{3x^2}e^{2x}e^{-1} = e^{3x^2+2x-1}.$$

Entonces, nos damos cuenta de que $3x+1$ es casi la derivada del exponente, porque

$$\left(3x^2+2x-1\right)' = (6x+2) = 2\,(3x+1)\,.$$

Por eso, esta integral es cuasi-inmediata:

$$\begin{aligned}\int (3x+1)\,e^{3x^2}e^{2x}e^{-1}dx &= \int (3x+1)\,e^{3x^2+2x-1}dx\\ &= \frac{1}{2}\int \left(3x^2+2x-1\right)' e^{3x^2+2x-1}dx\\ &= \frac{1}{2}e^{3x^2+2x-1}+k\\ &= \frac{1}{2}e^{3x^2}e^{2x}e^{-1}+k.\end{aligned}$$

Solución del problema 3.13

a. La primera integral se puede transformar un la integral de un arcotangente, mediante manipulaciones del denominador

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx\\ &= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx\\ &= \operatorname{arctg}(x+1)+k.\end{aligned}$$

b. Para resolver esta integral, primero dividimos x^3+3x-1 entre x^2+1

$$\begin{aligned}\frac{x^3+3x-1}{x^2+1} &= \frac{x^3+x+2x-1}{x^2+1} = \frac{x\left(x^2+1\right)+2x-1}{x^2+1}\\ &= \frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\frac{2x-1}{x^2+1} = x+\frac{2x-1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Entonces, la integral queda

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+3x-1}{x^2+1}dx &= \int \left(x+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \int x dx + \int \frac{2x-1}{x^2+1}dx\\ &= \int x dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx.\end{aligned}$$

(a) La primera integral es inmediata

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + k_1.$$

(b) La segunda integral es un logaritmo neperiano, porque en el numerador aparece la derivada del denominador

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln |x^2+1| + k_2.$$

(c) La tercera derivada es un arcotangente

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + k_3.$$

(d) Así:

$$\int \frac{x^3+3x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln |x^2+1| - \operatorname{arctg} x + k.$$

4. Ejercicios propuestos de Algunos métodos de integración

4.1. Enunciados

Problema 4.14: Resolver, por partes, las siguiente integrales:

a. $\displaystyle\int x^2 e^x dx,$ b. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^{2x}} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 4.15: Calcule las siguientes integrales definidas, utilizando el método de integración por partes:

a. $\displaystyle\int_1^e x \ln x dx,$ b. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 4.16: Calcule las siguientes integrales definidas, haciendo un cambio de variable:

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+1}{e^x-1} dx,$ b.

$displaystyle \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 4.17: Resolver las siguientes integrales aplicando un cambio de variable adecuado:

a. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx,$ b. $\displaystyle\int x\sqrt{(x+1)^3} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 4.18: Resolver las siguientes integrales racionales:

a. $\displaystyle\int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx,$ b. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x+1} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 4.19: Resolver las siguientes integrales trigonométricas:

a. $\displaystyle\int \cos^3 x dx,$ b. $\displaystyle\int \cos^4 x dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

4.2. Soluciones

Solución del problema 4.14

a. Lo lógico parece ser tomar x^2 y e^x como funciones. Al derivar x^2 decrece el grado y la derivada de e^x es esta misma función: por eso, tomamos

$$\begin{aligned} u &= x^2, \quad u'dx = 2xdx, \\ v &= e^x, \quad v'dx = e^x dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx,$$

entonces la integral es:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$$

De nuevo, tenemos que aplicar integración por partes a la última integral, con

$$\begin{aligned} u &= x, \quad u'dx = dx, \\ v &= e^x, \quad v'dx = e^x dx, \end{aligned}$$

quedando

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k,$$

y la integral que buscamos es

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k.$$

b. Antes de empezar, y para simplificar, podemos escribir

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right).$$

Además, como $\dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$, hacemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^{2x}} dx &= \frac{1}{2}\int e^{-2x}\left(1 - \cos 2x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos 2x dx + k \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos 2x dx + k. \end{aligned}$$

Para resolver esta integral, elegimos las siguientes partes:

$$u = \cos 2x, \quad u'dx = -2\operatorname{sen} 2x dx,$$
$$v = -\frac{1}{2}e^{-2x}, \qquad v'dx = e^{-2x}dx.$$

y la integral es:

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\cos 2x dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-2\operatorname{sen} 2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x - \int e^{-2x}\operatorname{sen} 2x dx.\end{aligned}$$

Tenemos que integrar de nuevo con partes, tomando

$$u = \operatorname{sen} 2x, \quad u'dx = 2\cos 2x dx,$$
$$v = -\frac{1}{2}e^{-2x}, \qquad v'dx = e^{-2x}dx.$$

y resulta

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\operatorname{sen} 2x dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{sen} 2x - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) 2\cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{sen} 2x + \int e^{-2x}\cos 2x dx.\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\cos 2x dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x - \int e^{-2x}\operatorname{sen} 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{sen} 2x - \int e^{-2x}\cos 2x dx.\end{aligned}$$

Despejando la integral, resulta:

$$\int e^{-2x}\cos 2x dx + \int e^{-2x}\cos 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{sen} 2x$$
$$\Longrightarrow \int e^{-2x}\cos 2x dx = \frac{1}{4}\left(e^{-2x}\operatorname{sen} 2x - e^{-2x}\cos 2x\right),$$

y tenemos ya la integral que buscamos

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^{2x}}dx &= -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos 2x dx + k \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(e^{-2x}\operatorname{sen} 2x - e^{-2x}\cos 2x\right) + k \\ &= \frac{1}{8}e^{-2x}(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x - 2) + k.\end{aligned}$$

Solución del problema 4.15

a. Tomamos:

$$\begin{aligned} u &= \ln x, \quad u' = \frac{1}{x}, \\ v &= \frac{1}{2}x^2, \quad v' = x. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2}1^2 \ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}x^2\Big|_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\ &\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

b. En este caso, elegimos:

$$\begin{aligned} u = \cos x, \quad u' = -\text{sen}\, x, \\ v = e^x, \qquad v' = e^x. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx &= e^x \cos x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (-\text{sen}\, x)\, dx \\ &= e^{\pi/2} \cos \frac{\pi}{2} - e^0 \cos 0 + \int_0^{\pi/2} e^x \text{sen}\, x dx \\ &= -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \text{sen}\, x dx. \end{aligned}$$

Para resolver esta integral, integramos de nuevo por partes, con:

$$\begin{aligned} u = \text{sen}\, x, \quad u' = \cos x, \\ v = e^x, \qquad v' = e^x. \end{aligned}$$

y tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx &= -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x dx \\ &= -1 + e^x \operatorname{sen} x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \\ &= -1 + e^{\pi/2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - e^0 \operatorname{sen} 0 - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \\ &= -1 + e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.\end{aligned}$$

Como la integral aparece a los dos lados de la igualdad, podemos despejar:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = -1 + e^{\pi/2}$$
$$\Longrightarrow \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right).$$

Solución del ejercicio 13.**Solución del problema 4.16**

a. Hacemos el cambio:

$$e^x = t, \qquad e^x dx = dt, \qquad dx = e^{-x} dt = \frac{1}{t} dt.$$

Resulta

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{t+1}{t-1} \frac{1}{t} dt &= \int \frac{1}{t-1} dt + \int \frac{1}{t(t-1)} dt \\ &= \ln|t-1| + \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln|t-1| + \ln|t-1| - \ln|t| + k \\ &= 2\ln|t-1| - \ln|t| + k \\ &= 2\ln|e^x - 1| - \ln|e^x| + k.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los límites de integración, la integral definida es:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{e^x+1}{e^x-1}dx &= 2\ln|e^x-1| - \ln|e^x|\Big|_1^2 \\
&= 2\ln\left|e^2-1\right| - \ln\left|e^2\right| - \left(2\ln\left|e^1-1\right| - \ln\left|e^1\right|\right) \\
&= 2\ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right) - \ln\frac{e^2}{e} \\
&= 2\ln(e+1) - \ln e \\
&= 2\ln(e+1) - 1.
\end{aligned}$$

b. Parece apropiado el cambio

$$x^3 = t, \qquad 3x^2dx = dt.$$

Resulta

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{1}{3}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + k \\
= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + k.
\end{aligned}$$

Considerando los límites de integración:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1^3 - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 0^3 \\
= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{1}{12}\pi.
\end{aligned}$$

Solución del problema 4.17

a. Hacemos el cambio

$$\operatorname{sen} x = t, \qquad \cos x dx = dt \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\cos x dx = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}dt = \int\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - t^{2-\frac{1}{2}}\right)dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt - \int t^{\frac{3}{2}}dt = 2\sqrt{t} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + k = 2\sqrt{t} - \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + k \\
&= 2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{sen}^5 x} + k.
\end{aligned}$$

b. Con el cambio

$$x+1=t \qquad x=t-1 \qquad dx=dt,$$

la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{(x+1)^3}dx &= \int (t-1)\sqrt{t^3}dt = \int t\sqrt{t^3}dt - \int \sqrt{t^3}dt \\
&= \int tt^{\frac{3}{2}}dt - \int t^{\frac{3}{2}}dt = \int t^{\frac{5}{2}}dt - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + k \\
&= \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + k = \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + k.
\end{aligned}$$

Solución del problema 4.18

a. Como las soluciones del polinomio del denominador son 2 y -5, tenemos que escribir la función racional como

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}.$$

Entonces, hacemos

$$\begin{aligned}
\frac{7}{(x-2)(x+5)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} \\
&= \frac{A(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+5)} \\
&= \frac{Ax+5A+Bx-2B}{(x-2)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A-2B)}{(x-2)(x+5)}.
\end{aligned}$$

Para que se verifique esto, debe ser

$$\begin{aligned}
A+B &= 0, \\
5A-2B &= 7.
\end{aligned}$$

La solución de este sistema es $A=1$ y $B=-1$. Por tanto, la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
\int \frac{7}{(x-2)(x+5)}dx &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+5}\right) dx \\
&= \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+5}dx \\
&= \ln|x-2| - \ln|x+5| + k = \ln\frac{|x-2|}{|x+5|} + k
\end{aligned}$$

b. Para resolver una integral racional, debe ser el grado del polinomio del numerador menor que el del denominador. Lo primero es, pues, dividir

$$\frac{x^2}{x^2-x+1} = 1 + \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

Así, la integral se puede escribir como

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{x^2}{x^2-x+1}dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{x^2-x+1}\right) dx \\
&= \int dx + \int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx \\
&= x + \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-x+1}dx + k \\
&= x + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx + k \\
&= x + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx + k.
\end{aligned}$$

La última integral se resuelve completando cuadrados para transformarla en la integral de un arcotangente

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx \\
&= \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

La integral es:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{x^2-x+1}dx \\
&= x + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + k.
\end{aligned}$$

Solución del problema 4.19

a. Como $\cos x$ está elevado a un número impar, hacemos:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx \\
&= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x dx \\
&= \int \cos x dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k.
\end{aligned}
$$

b. Como x está elevado a un número par, hacemos:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \cos^4 x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int dx + \int \cos^2 2x dx + \int 2\cos 2x dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx + \operatorname{sen} 2x\right) + k \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2}\cos 4x dx + \operatorname{sen} 2x\right) + k \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x\right) + k \\
&= \frac{1}{8}\left(3x + 2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) + k.
\end{aligned}
$$

5. Ejercicios propuestos de Cálculo de áreas

5.1. Enunciados

Problema 5.20: Calcule el área de la región limitada por la función $\ln x$ y el eje x entre los valores de $x = 1$ y $x = 2$.

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 5.21: Calcule el área delimitada por el eje x, la gráfica de $\dfrac{2x}{x^2 - 1}$ y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Pulse aquí para ver la solución.

Problema 5.22: Calcule el área de la región delimitada por gráficas de $2x^3$ y $2x$.

Pulse aquí para ver la solución.

5.2. Soluciones

Solución del problema 5.20

Nos piden determinar

$$A = \int_1^2 \ln x dx.$$

La integral

$$\int \ln x dx$$

se hace por partes, tomando $u = \ln x, du = \frac{1}{x}$, $dv = 1$, $v = x$. Entonces

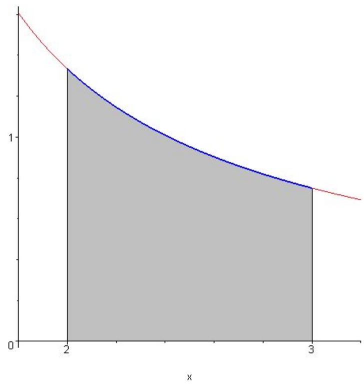
$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C,$$

donde C es una constante de integración.Como es una integral definida, tenemos:

$$A = \int_1^2 \ln x dx = x \ln x - x|_1^2 = 2 \ln 2 - 2 - (1 \ln 1 - 1) = 2 \ln 2 - 1.$$

Solución del problema 5.21

Hemos representado la situación en la siguiente figura

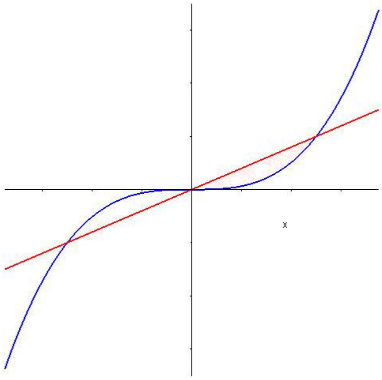


Entonces, observamos que tenemos que resolver la integral:

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} dx = \ln \left(x^2 - 1\right)\Big|_2^3 = \ln \left(3^2 - 1\right) - \ln \left(2^2 - 1\right)$$
$$= \ln 8 - \ln 3 = \ln \frac{8}{3}.$$

Solución del problema 5.22

Las funciones se cortan en $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$ (ver figura).



Por tanto, se pide encontrar:

$$S = \int_{-1}^{1} \left|2x - 2x^3\right| dx = \int_{-1}^{0} \left(2x^3 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(2x - 2x^3\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{2} + 1 + 1 - \frac{1}{2} = 1.$$

#SOMOS2030
uned.es

UNED