Tema 5: Trigonometría y números complejos

Teoría

Estibalitz Durand Cartagena y Miguel Sama Meige

Departamento de Matemática Aplicada I
ETSI Industriales. UNED

UNED

Trigonometría y números complejos

Estibalitz Durand y Miguel Sama

El número marcado es imaginario...
¡Gire su teléfono 90º y vuelva a marcar!

1. Trigonometría

La trigonometría (*trigonon*=triángulo, *metron*=medir) nace para estudiar la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. En este bloque recordaremos las propiedades básicas de los triángulos y aprenderemos a calcular los lados y ángulos de un triángulo con ayuda de la trigonometría. También estudiaremos las razones trigonométricas y sus relaciones entre ellas (identidades trigonométricas).

Para finalizar, definiremos las funciones trigonométricas, funciones que extienden a toda la recta real la noción de razón trigonométrica. Estas funciones están presentes en diversas áreas de las matemáticas, y tienen aplicaciones en campos tan dispares como la Ingeniería, la Física, la Astronomía, la Geodesia, o la Música.

1.1. Triángulos

- Un triángulo es un polígono de tres lados que viene determinado por tres puntos no alineados denominados vértices. Cualquier polígono se puede descomponer en triángulos, por lo que muchos problemas en geometría se reducen a un problema sobre triángulos. En lo que sigue, usaremos el plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ como marco de referencia para representar gráficamente todos los objetos trigonométricos.

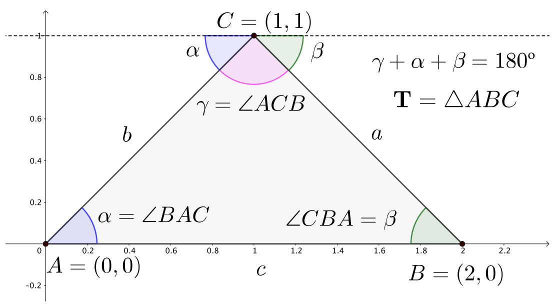


Figura 1: Triángulo y su representación en el plano cartesiano

- Tomando como referencia la figura 1, dados tres puntos no alineados del plano A, B, C, por $\triangle ABC$ denotaremos el triángulo que forman. Cada par de vértices determina un lado, denotados por $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, y $\overline{CA}$. Por α, β, y γ denotaremos los ángulos interiores en cada vértice, y por a, b, c las longitudes de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, y $\overline{AB}$ respectivamente.

- En la figura 1 vemos también un convenio para denotar los ángulos interiores: el ángulo α de vértice A se denota por $\alpha \equiv \angle BAC$, en donde entendemos que dicho ángulo lleva el segmento $\overline{AB}$ al segmento $\overline{CA}$, girando en el sentido contrario a las agujas del reloj. Así, $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle ACB$.

- Recordemos que la suma de las longitudes de dos de los lados de un triánglo es siempre mayor que la longitud de lado restante (propiedad triangular).

Medición en grados sexagesimales

La manera cotidiana de *medir* ángulos es usando grados sexagesimales mediante el transportador de ángulos.

- Un grado sexagesimal sustenta un arco cuya longitud es $1/360$ parte de la longitud de la circunferencia.

El origen de esta forma de medir ángulos no es del todo clara, pero parece estar relacionado con los calendarios astronómicos en la antigüedad. Además, 360 tiene una gran cantidad de divisores, lo que le convierte en un número fácil de manipular. Sin embargo, en Matemáticas los ángulos se manejan en radianes. En el apartado 1.3 aclararemos más a este respecto.

- Un ángulo recto mide $90°$ y un ángulo plano mide $180°$. Un ángulo es agudo si mide entre $0°$ y 90° y obtuso si mide entre $90°$ y $180°$.

Elementos notables de un triángulo

Son un conjunto de rectas y puntos relacionados con un triángulo que tienen alguna propiedad geométrica interesante.

- Mediana: segmento de recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto. El baricentro o centroide es el punto de corte de las tres medianas.

- Mediatriz: recta perpendicular a un lado trazada por su punto medio. Las mediatrices se cortan en el circuncentro, un punto que equidista de los vértices, y que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

- Bisectriz: semirrecta con origen en un vértice y que divide el ángulo en dos de la misma medida. Las bisectrices se cortan en el incentro, un punto que equidista de los lados y que es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

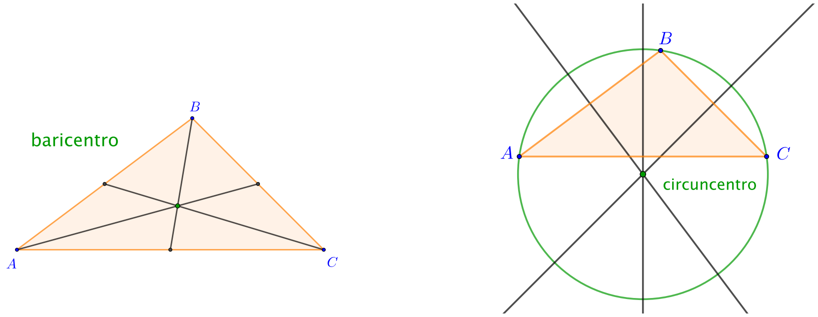


Figura 2: Medianas y mediatrices

- Altura: fijado un vértice, es el segmento de recta perpendicular al lado opuesto del vértice y que une el vértice con el lado opuesto (o con su prolongación). El lado opuesto al vértice del que parte la altura se llama base. Las alturas se cortan en un punto llamado ortocentro.

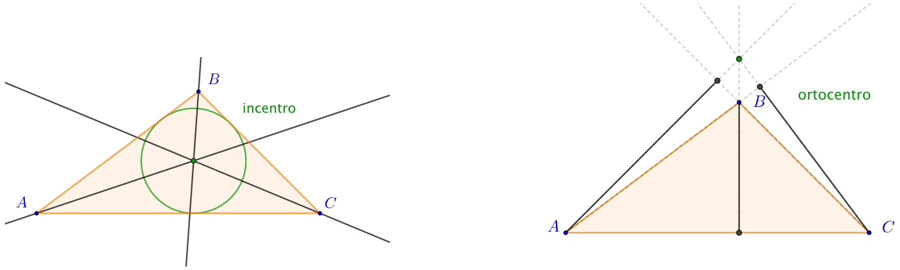


Figura 3: Bisectrices y alturas

Área y perímetro

- El perímetro de un triángulo es la suma de las longitudes de sus lados.
- El área de un triángulo es (base $\cdot$ altura)/2.

> **Fórmula de Herón:** Si s denota la mitad del perímetro de un triángulo $\triangle ABC$ entonces
>
> $$\text{área}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Teoremas de Tales

A continuación, vamos a recordar dos resultados de la geometría clásica atribuídos a Tales de Mileto (VI a.C.).

> **Teorema de Tales.** (1) Si trazamos un segmento paralelo a uno de los lados de un triángulo $\triangle ABC$, obtenemos otro triángulo cuyos lados son proporcionales a los del triángulo inicial.
> (2) Si el lado $\overline{AB}$ es el diámetro de una circunferencia y el vértice C está sobre la circunferencia, entonces el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo.

La figura 4 ilustra los resultados anteriores.

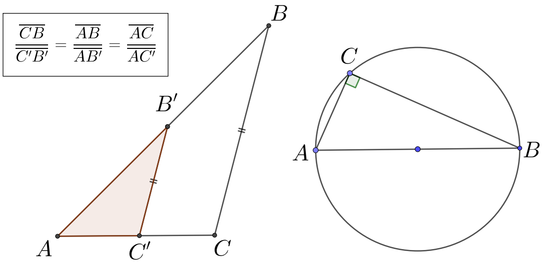


Figura 4: Teoremas de Tales

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es un resultado cumbre en la historia de la Matemáticas que relaciona las longitudes de los lados de un triángulos rectángulo.

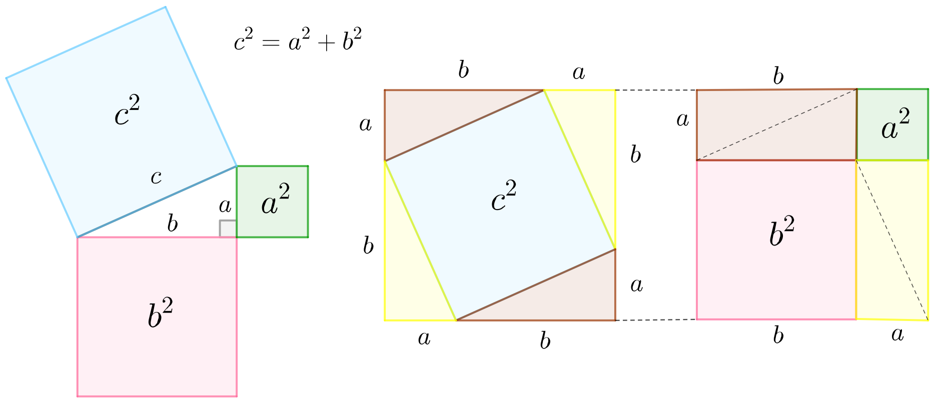


Figura 5: Teorema de Pitágoras y su demostración geométrica

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los dos lados perpendiculares a y b que denominamos catetos, es igual al cuadrado del lado restante c, denominado hipotenusa, esto es,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Recíprocamente, si en un triángulo se verifica $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el ángulo opuesto al lado c es recto y por tanto el triángulo es rectángulo.

Véase la figura 5 para ver una demostración geométrica del Teorema de Pitágoras.

Cálculo de la distancia en el plano cartesiano

Aplicando el teorema de Pitágoras, véase figura 6, se puede razonar la siguiente fórmula para la distancia:

Distancia entre dos puntos:

$$\mathrm{d}(A, B) = d((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (b_1 - a_1)^2} \tag{1}$$

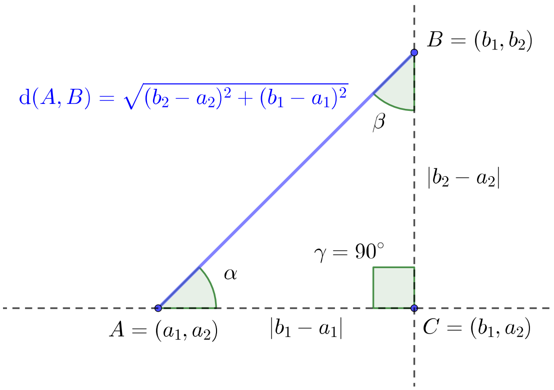


Figura 6: Distancia entre dos puntos

1.2. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

- El seno, el coseno y la tangente de un ángulo son las razones trigonométricas más usuales. Su nombre viene de su definición como razón o ratio entre las longitudes de un triángulo rectángulo.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

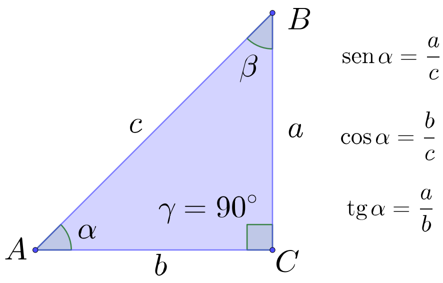


Figura 7: Triángulo rectángulo

- En principio, por ser el triángulo rectángulo, la definición anterior está restringida a ángulos agudos. Sin embargo, veremos posteriormente que las nociones trigonométricas se extienden a cualquier ángulo.

- Las razones trigonométricas no dependen de la medida de los lados, solo de la medida de los ángulos. Es decir, si tenemos dos triángulos semejantes

$\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$, entonces por el Teorema de Tales (ver figura 8)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$$

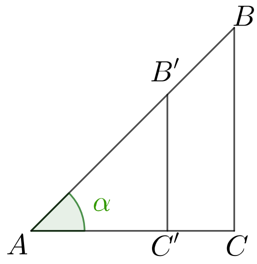


Figura 8: Teorema de Tales y razones trigonométricas

- A partir de la definición, y mediante sencillos razonamientos geométricos y el teorema de Pitágoras, podemos establecer las razones trigométricas de los ángulos agudos más usuales 30°, 45° y 60°.

Ejemplo 1. Para calcular las razones trigonométricas de 30° y 60° (véase figura 9), podemos dibujar un triángulo equilatero $\triangle AEB$ con lado de longitud ℓ. Como los lados son iguales, también lo son sus ángulos. Y como suman necesariamente 180°, los ángulos de dicho triángulo miden 60°. La altura de dicho triángulo, el segmento $\overline{BC}$, divide en dos triángulos rectángulos al triángulo equilatero $\triangle AEB$. Consideramos uno de ellos, por ejemplo el $\triangle ACB$. La hipotenusa tiene longitud ℓ, la base $\frac{\ell}{2}$ mientras que por el teorema de Pitágoras, el segmento $\overline{BC}$ tiene longitud

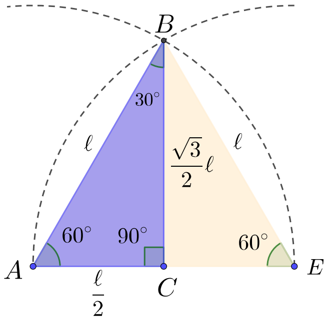
$$\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

Para finalizar, aplicando la definición obtenemos las razones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$$



$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Figura 9: Razones de 30° y 60°

Razones trigonométricas recíprocas

- Las recíprocas del seno, coseno y tangente, denominadas respectivamente cosecante, secante y cotangente, son

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

1.3. Representación de ángulos y razones trigonométricas en la circunferencia

En lo que sigue, vamos a ver cómo definir las razones trigonométricas de cualquier ángulo (hasta ahora lo hemos hecho de ángulos agudos). Partimos de una circunferencia de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas.

- En trigonometría, la circunferencia de centro $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y radio 1 se denomina circunferencia goniométrica. Su expresión analítica es

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

- Los puntos de esta circunferencia se encuentran divididos en los siguientes cuatro cuadrantes (ver Figura 10):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{II} = \{(x,y) : x < 0, y > 0\} & \mathbf{I} = \{(x,y) : x > 0, y > 0\} \\ \mathbf{III} = \{(x,y) : x < 0, y < 0\} & \mathbf{IV} = \{(x,y) : x > 0, y < 0\} \end{array}$$

Ángulos en la circunferencia. Rotaciones

- Cada ángulo α (positivo) se corresponde con un punto A_α de la circunferencia goniométrica, y puede interpretarse como la rotación o giro en sentido

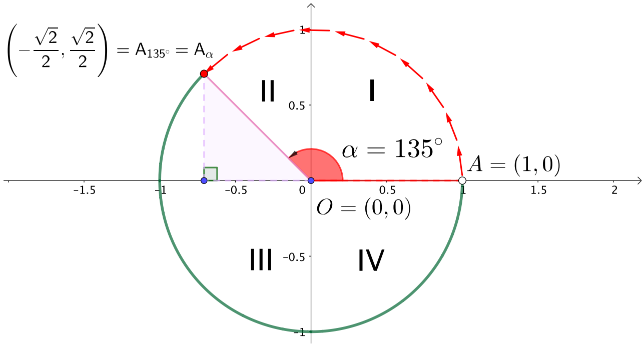


Figura 10: Ángulo de 135° grados en la circunferencia goniométrica

contrario a la agujas del reloj, del punto de referencia $A = (1, 0)$ al punto de giro A_α.

- De esta manera el ángulo recto se corresponde con cuarto de un giro completo $A_{90^\circ} = (0, 1)$, el ángulo plano con la mitad de un giro completo $A_{180^\circ} = (-1, 0)$ y el ángulo nulo de 0° es aquel para el que no se produce giro $A_{0^\circ} = A$.

La intepretación en términos de rotaciones nos permite hablar también de ángulos negativos y ángulos mayores de 360°.

- Los ángulos negativos se corresponden con las rotaciones en sentido de las agujas del reloj. Por ejemplo, $\alpha = -45^\circ$, se corresponde con la rotación en sentido de las agujas del reloj que lleva el punto de referencia $A = (1, 0)$ al punto de giro A_{-45°. Nótese que el punto de giro sería el mismo si rotamos en sentido positivo un ángulo de $\alpha = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$. De hecho, siempre se cumple que
$$A_{-\alpha} = A_{360^\circ - \alpha}$$

- Los ángulos superiores a 360° se corresponden con rotaciones de más de un giro completo de la circunferencia. Por ejemplo, 720° se corresponde con dos rotaciones completas de la circunferencia, $(2 \cdot 360)^\circ = 720^\circ$, de manera que $A_{720^\circ} = A_{360^\circ} = A_{0^\circ}$. En general, tenemos que cada giro completo determina el mismo ángulo sobre la circunferencia goniométrica, es decir,

$$A_{\alpha + k\cdot 360^\circ} = A_\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

Medida de ángulos en radianes

En matemáticas se usan los radianes como unidad de medida de los ángulos.

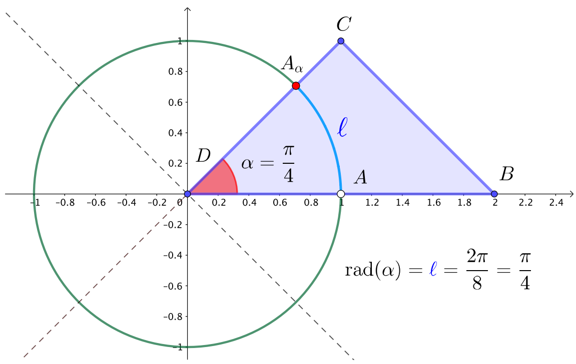


Figura 11: Medida del ángulo $\angle BDC$ en radianes

Radianes: La medida en radianes de un ángulo α se corresponde con la longitud del arco de circunferencia de radio unidad que se recorre en el giro asociado, es decir, la longitud del arco de circunferencia ℓ que se va recorriendo durante todo el giro, desde el punto de referencia $A = (1, 0)$ al punto de giro A_α.

Por ejemplo, un giro completo, ángulo de 360°, se corresponde con la longitud de la circunferencia goniométrica 2π. Por una sencilla regla de tres, se puede deducir la expresión general para pasar de grados a radianes y viceversa.

Relación entre ángulos y radianes: Para un ángulo cualquiera α,

$$\mathrm{rad}(\alpha)=\frac{\pi}{180}\mathrm{grad}(\alpha)$$

en donde $\mathrm{rad}(\alpha)$, $\mathrm{grad}(\alpha)$ denotan sus mediciones en radianes y grados respectivamente.

Existen razones operativas que han hecho que usemos los radianes en vez de grados sexagesimales. Así, cuando hablamos de un ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$, siempre pensaremos en radianes a no ser que escribamos $\alpha°$. Este convenio es el usual en Matemáticas. De hecho, un error muy común al evaluar las funciones trigonométricas con una calculadora es tener el modo de grados sexagesimales en vez de radianes.

Ahora sí, a partir de la circunferencia goniométrica, podemos definir el seno y coseno de cualquier ángulo.

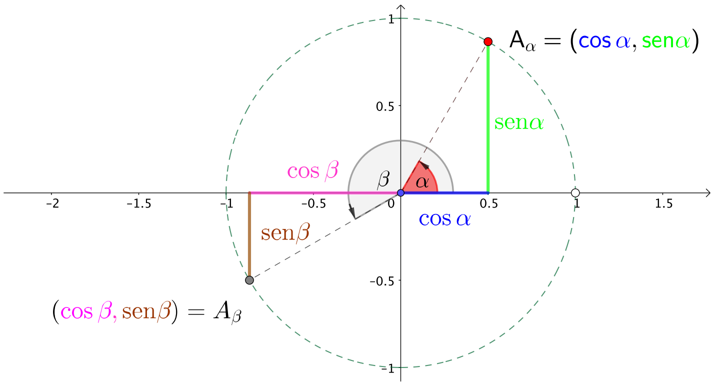


Figura 12: Razones trigonométricas en la circunferencia

Seno y coseno de un ángulo cualquiera: Dado un ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, el coseno y seno de α vienen dados por las coordenadas del punto

$$A_\alpha = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha)$$

Ejemplo 2. Razonemos el valor de las razones trigonométricas del ángulo $\frac{3\pi}{4}$, 135° medido en grados. Como $A_{\frac{3\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, véase figura 10, entonces

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Como el coseno se corresponde con la abcisa, eje x, y el seno con la ordenada, eje y, el coseno y el seno tienen signos constantes en cada cuadrante.

- Como el punto de giro $A_\alpha = A_{\alpha+k\cdot 2\pi}$ se va repitiendo periódicamente, asimismo el seno y coseno son periódicos

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha + k\cdot 2\pi), \ \cos(\alpha) = \cos(\alpha + k\cdot 2\pi) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

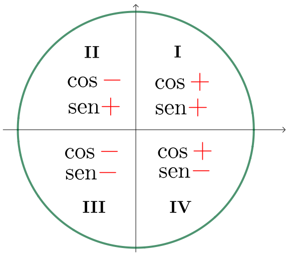


Figura 13: Signos seno y coseno por cuadrantes

- Siempre que $\cos\alpha$ no se anule, la tangente se define a partir de la identidad

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Ejemplo 3. Vamos a resolver la ecuación $\operatorname{sen}\alpha = -1$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Con el esquema de la circunferencia goniométrica (12), tenemos el punto $A_\alpha = (0, -1)$ cuyo ángulo asociado es $\alpha = 270° = \frac{3\pi}{2}$. Como el seno se va repitiendo con un periodo de 2π por la propiedad (2), la solución viene dada por el siguiente conjunto

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Resumimos en la siguiente tabla los valores de todas las razones trigonométricas para los ángulos más usuales. Es bueno conocer estos valores puesto que salen de manera recurrente en muchos problemas. Observemos que basta conocer el seno y el coseno, ya que el resto se deduce de manera inmediata. En general, para el cálculo de otros ángulos usaremos la calculadora.

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre razones trigonométricas que se cumple para cualquier ángulo.

Para cualquier ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$, el punto $A_\alpha = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ pertenece a la circunferencia goniométrica y por tanto se cumple la siguiente identidad:

α(grad)	cos	sen	tg	sec	cosec	cotg	α(rad)
$0°$	1	0	0	1	∞	∞	0
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\pi}{4}$
$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$90°$	0	1	∞	∞	1	0	$\frac{\pi}{2}$
$180°$	-1	0	0	-1	∞	∞	π

Cuadro 1: Razones trigonométricas

Identidad fundamental de la trigonometría: Para todo ángulo α se cumple

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

Usando el esquema de la circuferencia es fácil obtener gráficamente las siguientes identidades:

- **Ángulos complementarios.**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha, \;\; \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \tag{3}$$

- **Ángulos suplementarios.**

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \;\; \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \tag{4}$$

- **Ángulos conjugados.**

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha, \;\; \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) \tag{5}$$

- **Ángulos que se diferencian en** $180°$.

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \;\; \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \tag{6}$$

- **Ángulos opuestos.**

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \;\; \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \tag{7}$$

En el Anexo 3, repasamos algunas de las identidades y propiedades trigonométricas más útiles.

Es posible extender los valores de las razones trigonométricas conocidas del primer cuadrante

$$\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

al resto de cuadrantes mediante el uso de estas identidades trigonométricas. El proceso inverso se denomina reducción de ángulos al primer cuadrante, y nos permite conocer las razones trigonométricas de determinados ángulos sin usar la calculadora.

Ejemplo 4. Calculemos el seno y el coseno de $\frac{5\pi}{4}$ reduciéndolo a un ángulo del primer cuadrante:

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En este sentido, existe un resultado en Matemáticas, denominado el Principio de Continuación Analítica, que nos asegura que toda identidad trigonométrica de tipo racional[1] es cierta si lo es para ángulos agudos.

Las identidades trigonométricas racionales basta probarlas para ángulos agudos.

1.4. Funciones trigonométricas

El coseno y el seno definen dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en toda la recta real definidas respectivamente por

$$f(x) = \cos x, \ g(x) = \operatorname{sen} x$$

Son las denominadas funciones trigonométricas del seno y del coseno.

Para estas funciones destacamos los siguientes conceptos y propiedades.

[1] Sin entrar en detalles, una identidad trigonométrica racional es aquella que se puede expresar a partir de la suma, multiplicación y división de ángulos, cosenos y senos. Así por ejemplo

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(2 \cdot \pi - \alpha)$$

son racionales, y en cambio $\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}$ no lo es.

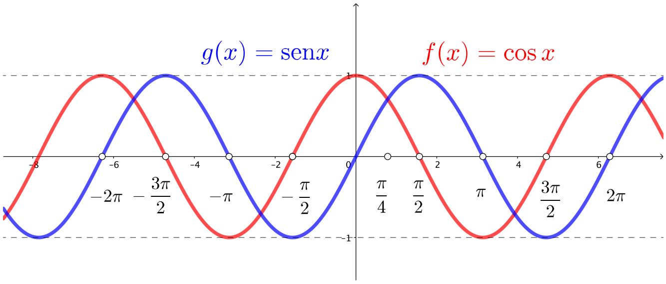


Figura 14: Funciones seno y coseno

- Por la propiedad (2), tenemos que la función se repite para cada intervalo de longitud 2π:

$$f(x+2\pi) = f(x), \;\; g(x+2\pi) = g(x)$$

  De hecho, 2π es la menor longitud de intervalo para la que esta repetición ocurre y por ello se dice que dichas funciones tienen un periodo de 2π.

- El rango de posibles valores de las dos funciones es el intervalo $[-1, 1]$, es decir como mucho la imagen está a una distancia de 1 del eje x. Se dice que la funciones tienen una amplitud de 1.

- De la figura 21, podemos observar que las dos gráficas tienen la misma forma pero desplazada una con respecto de la otra a un distancia $\frac{\pi}{2}$. Decimos que el coseno y el seno tiene un desfase de $\frac{\pi}{2}$. Aplicado las fórmulas del ángulo complementario (3) y el ángulo opuesto (7) obtenemos

$$g(x) = \mathrm{sen}\, x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Los valores de x se miden a radianes. De este modo

$$f(90) = \cos(90) = -0{,}44807362$$

  ya que entendemos que calculamos el coseno de 90 radianes y no el de 90° grados sexagesimales que sería 1.

- La funciones trigonométricas expresadas respecto de ángulos sexagesimales son *otras* funciones (aunque desgraciadamente se denotan igual, esta ambigüedad no representa un gran problema, porque apenas aparecen en matemáticas). Por ejemplo, si $\cos^\circ(x) = \cos(\pi x/180)$, $\operatorname{sen}^\circ(x) = \operatorname{sen}(\pi x/180)$, podemos observar que la derivada de sen es cos, pero la derivada de sen°, no es $\cos^\circ$.

Todas las razones trigonométricas definen asimismo funciones trigonométricas. En el caso de la función tangente, (véase figura 15), podemos ver que presenta asíntotas verticales en los puntos en donde se anula el coseno. Tiene un comportamiento periódico y su rango de valores cubre toda la recta real.

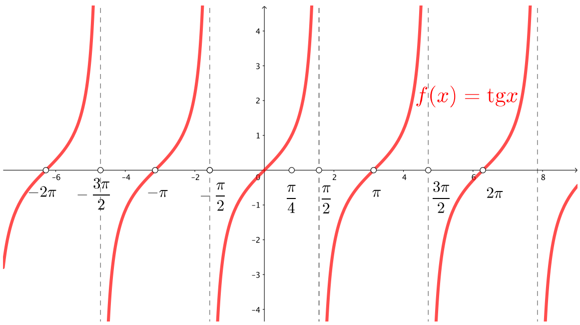


Figura 15: Función tangente

Funciones sinusoidales

Aplicando las mismas ideas, podemos definir la familia de funciones sinusoidales, que es una clase fundamental de funciones en Ingeniería.

Funciones sinusoidales. Toman la forma

$$y = h(x) = a \operatorname{sen}(k(x - \beta))$$

en donde consideraremos parámetros reales $a \geq 0$, $k \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Atendiendo a los valores de los parámetros, las funciones se pueden dibujar *desplazando* y *estirando/comprimiendo* la gráfica de la función seno. Para ello debe tenerse en cuenta lo siguiente.

- Se puede ver que son funciones de periodo $\frac{2\pi}{k}$:

$$h\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)=a\,\mathrm{sen}\left(k\left(x+\frac{2\pi}{k}-\beta\right)\right)=a\,\mathrm{sen}(k(x-\beta)+2\pi)=a\,\mathrm{sen}(k(x-\beta))=h(x)$$

- Al número k se le denomina la frecuencia y determina el número de veces que la función se repite en cada intervalo de longitud 2π.
- Al número β se le dice fase y mide el desplazamiento a derecha o izquierda respecto de la función seno.
- Al número a se le dice amplitud, y tal como dijimos anteriormente, mide la longitud del rango de valores de la función respecto del eje de ordenadas.

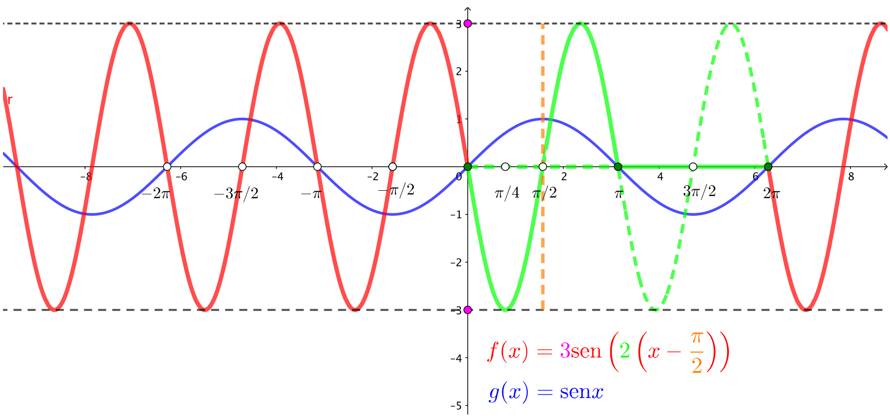


Figura 16: Función sinusoidal $y=3\mathrm{sen}\left(2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Ejemplo 5. Consideremos la función $y=3\,\mathrm{sen}\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Es una función sinusoidal de amplitud 3, periodo π, frecuencia 2 y con desplazamiento a la derecha con fase $\frac{\pi}{2}$ con respecto de la gráfica de la función seno. Ver figura 16. En este sentido, en el intervalo $[0,2\pi]$ hemos resaltado cómo la función se repite con una frecuencia de 2 veces; y cómo está desplazada del gráfico de la función seno en una distancia de fase de $\frac{\pi}{2}$.

Inversas de las razones trigonométricas

Es muy usual que tengamos el valor númerico x del coseno o el seno de un ángulo α, por ejemplo

$$x = \cos\alpha$$

y queramos determinar a qué ángulo α corresponde. Para ello en la calculadora utilizamos las funciones inversas, denotadas usualmente como $\cos^{-1}$, sen^{-1}, tg^{-1} en la calculadora o equivalentemente como arco coseno, arco seno o arco tangente. Así escribiríamos

$$\alpha = \arccos x \qquad (\text{o } \alpha = \cos^{-1} x)$$

respectivamente $\operatorname{arc\,sen} x$ (o $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$), $\operatorname{arc\,tg} x$ (o $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} x$).

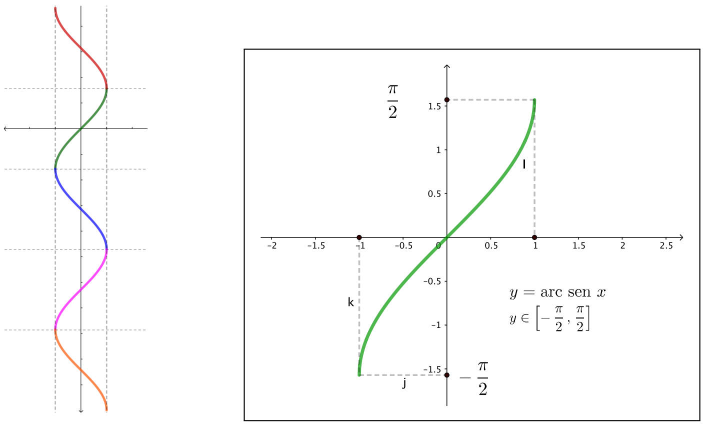


Figura 17: Función arco seno correspondiente a la restricción del seno

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen} & : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & & x & \longrightarrow & \operatorname{sen} x \end{array}$$

Ya hemos visto que, debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, para cada valor de x, existen infinitos ángulos α tales que $\alpha = \arccos x$ (o $\alpha = \operatorname{arc\,sen} x$ o $\alpha = \arctan x$). Dicho de otro modo, las funciones trigonométricas definidas en todo $\mathbb{R}$ no son inyectivas. Por ejemplo:

$$\arccos 0 = \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, ...\}$$

$$\operatorname{arc\,sen}(-1) = \{3\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, ...\}$$

$$\arctan 1 = \{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -3\pi/4, \pi/4, 5\pi/4, ...\}$$

¿Cómo hemos obtenido esos valores? Por ejemplo, para obtener el conjunto $\arccos 0$, lo primero es mirar la gráfica del coseno (ver figura 21). Observemos que en el intervalo $[0, 2\pi)$, existe un solo ángulo cuyo coseno vale 1, un único ángulo cuyo coseno vale -1 y dado $x \in (-1, 1)$ existen exactamente dos ángulos en $[0, 2\pi)$ cuyo coseno vale x.

Es usual restringir el dominio de las funciones trigonométricas a intervalos (con la mayor longitud posible) en los que dichas funciones sean inyectivas, y por tanto, tengan función inversa. Cada intervalo donde esto sucede define una rama de la función trigonométrica.

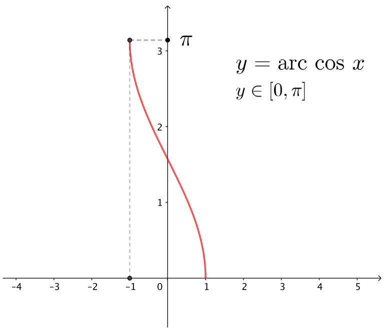


Figura 18: Función arco coseno correspondiente a la restricción del coseno

$$\begin{array}{rcccc} \cos & : & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$

Por ejemplo, podemos tomar

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,cos} x &= \{\alpha \in [0, \pi] : \cos \alpha = x\} \\ \operatorname{arc\,sen} x &= \left\{\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \operatorname{sen} \alpha = x\right\} \\ \operatorname{arc\,tg} x &= \left\{\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \operatorname{tg} \alpha = x\right\} \end{aligned}$$

Recordemos que la gráfica de la función inversa se obtiene aplicando una simetría a la función original con respecto a la recta $y = x$. El dominio de definición de cada una de ellas es el rango de valores que toman. Así $\operatorname{dom}(\operatorname{arc\,cos}) = \operatorname{dom}(\operatorname{arc\,sen}) = [-1, 1]$ y $\operatorname{dom}(\operatorname{arc\,tg}) = \mathbb{R}$.

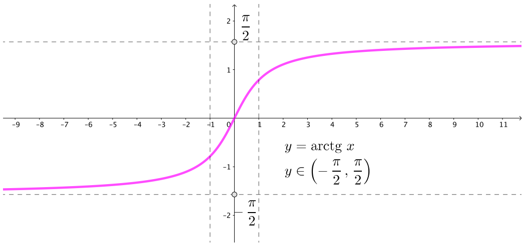


Figura 19: Función arcotangente correspondiente a la restricción de la tangente

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{tg} & : & \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & & x & \longrightarrow & \operatorname{tg} x. \end{array}$$

2. Números complejos

Para contar las ovejas de un rebaño necesito los números naturales, para medir echo mano de un número racional, y la proporción entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia es un número irracional. Parece que los números reales han estado casi siempre ahí, formando parte de nuestro mundo *real*. ¿Por qué surgen entonces los números imaginarios? Es claro que la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución real: no existe un cuadrado cuyo área sea -1. Sin embargo, en el siglo XVI, el matemático italiano Cardano observó que, para obtener soluciones ¡reales! de ciertas ecuaciones cúbicas, necesitaba usar por el camino las soluciones *no reales* de la ecuación $x^2 = -1$. Se decide entonces añadir un elemento más, la unidad imaginaria, para que todas las ecuaciones tengan solución. Fue Euler en el siglo XVIII el que denotó por i a uno de los elementos que cumple $i^2 = -1$; el otro debe ser $-i$, es decir $(-i)^2 = -1$.

Muchos fenómenos de nuestro mundo real, especialmente los relacionados con la Física y la Ingeniería, se describen mejor con números complejos (circuitos eléctricos, electromagnetismo, flujo de fluídos, mecánica cuántica...) y algunos resultados de variable real no se pueden entender si no los miramos desde el prisma del mundo complejo.

- Se denota por $\mathbb{C}$ al menor cuerpo que, extendiendo a $\mathbb{R}$, tenga algún elemento cuyo cuadrado sea -1 de forma que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Un cuerpo es un conjunto donde puedo sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por cero) sin salirme de él. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es un cuerpo pero $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es un cuerpo porque

$\sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pero lo que realmente hace especial a $\mathbb{C}$ es que es un cuerpo algebraicamente cerrado: todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado n tiene n raíces (contando su multiplicidad) en $\mathbb{C}$ (ver 2.2). Dicho de otro modo, *lo que pasa en* $\mathbb{C}$ *se queda en* $\mathbb{C}$.

- Los números complejos son de la forma

$$z = a + bi \quad \text{(forma binómica)}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es la parte real ($\mathrm{Re}(z)$), $b \in \mathbb{R}$ es la parte imaginaria ($\mathrm{Im}(z)$) e i es la unidad imaginaria que cumple la ecuación $i^2 = -1$. Si $a = 0$, decimos que z es un número imaginario puro y si $b = 0$, observemos que z se reduce a un número real. Así,

$$\mathbb{C} = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

2.1. Operaciones en $\mathbb{C}$

Suma y producto de números complejos en forma binómica

Las operaciones que ya conocemos de los números reales nos determinan las operaciones en $\mathbb{C}$. Para operar con los números complejos lo hacemos de la misma manera que con los números reales pero teniendo además en cuenta que $i^2 = -1$.

- Suma de números complejos:

$$(5 + 7i) + (-1 + 2i) = 5 + (-1) + 7i + 2i = 5 - 1 + (7 + 2)i = 4 + 9i$$

Es decir, para sumar dos números complejos sumamos parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria.

- Producto de números complejos:

$$\begin{aligned}(5 + 7i)(-1 + 2i) &= 5(-1 + 2i) + 7i(-1 + 2i) \\ &= 5(-1) + 5(2i) + 7i(-1) + (7i)(2i) \\ &= -5 + 10i - 7i + 14i^2 \\ &= -5 + 10i - 7i + 14(-1) \\ &= -19 + 3i\end{aligned}$$

- También podemos dividir números complejos (siempre que el denominador sea distinto de cero). El “truco” está en obtener una fracción equivalente donde el denominador sea un número real para así obtener como resultado de la división una expresión del tipo $a + bi$. Para ello multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}\frac{5+7i}{-1+2i} &= \frac{(5+7i)}{(-1+2i)}\frac{(-1-2i)}{(-1-2i)} = \frac{(5+7i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} \\ &= \frac{9-17i}{(-1)^2-(2i)^2} = \frac{9-17i}{1-4(-1)} = \frac{9}{5} - \frac{17}{5}i\end{aligned}$$

- El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es el número complejo

$$\overline{z} = a - bi.$$

El conjugado se denota a veces también por z^*. Algunas propiedades del conjugado son:

  - $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
  - $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
  - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

donde $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$, denota el módulo de un número complejo. Usando estas propiedades la división se escribe

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

- Es útil además saber calcular las potencias de la unidad imaginaria:

$$\begin{array}{llll} i & i^2 = -1 & i^3 = i^2 \cdot i = -i & i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^5 = i^4 i = i & i^6 = -1 & i^7 = -i & i^8 = 1 \\ \ldots & & & \end{array}$$

Observemos que los valores de las potencias de i se repiten cada 4, por lo que para calcular i^n dividimos el exponente n entre 4 y calculamos la potencia de i que tiene como exponente el resto de la división:

$$i^n = i^{4k+\text{resto}} = i^{4k}\, i^{\text{resto}} = i^{\text{resto}} \qquad \text{resto} \in \{0,1,2,3\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Debemos destacar que los números complejos no se pueden ordenar de manera que el orden sea compatible con las operaciones de $\mathbb{C}$.

Representación geométrica de los números complejos

Para representar los números complejos $a+bi$ los identificamos con el par ordenado (a,b), es decir, con un punto en el plano $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a+bi & \longleftrightarrow & (a,b) \end{array}$$

Por esta razón, al conjunto $\mathbb{C}$ se le conoce también como plano complejo o plano de Argand. Así, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son indistinguibles geométricamente: lo que los hace realmente diferentes son las operaciones que introducimos en ellos.[2] Este hecho nos permite importar todas las definiciones y resultados de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. Además, todos los teoremas que se pueden probar en $\mathbb{R}$, sin utilizar el orden de $\mathbb{R}$, son válidos en $\mathbb{C}$ con la misma demostración.

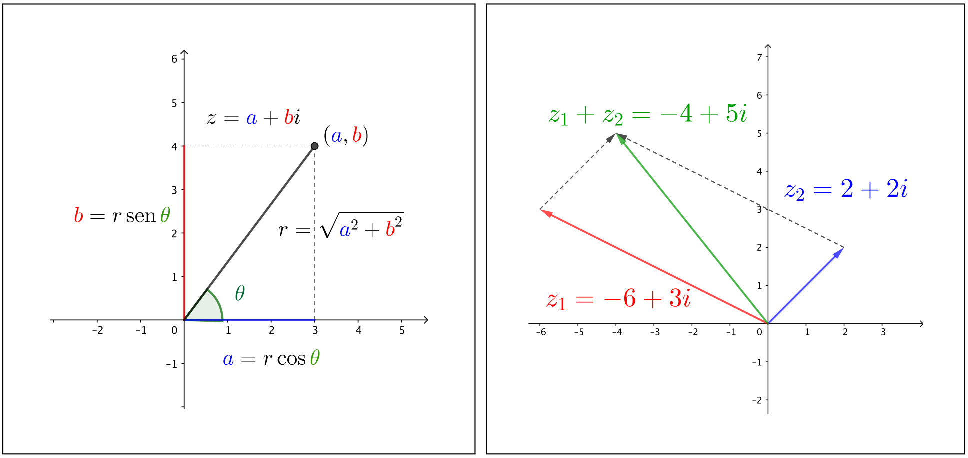


Figura 20: Coordenadas polares y suma de complejos

Recordemos además que, los puntos del plano, y por tanto los números complejos $z=a+bi$, se pueden describir usando coordenadas polares:

$$\left\{\begin{array}{ll} a & =r\cos\theta \\ b & =r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right.$$

donde

[2]El conjunto $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto por escalares es un espacio vectorial, y $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto definido aquí es un cuerpo, al que hemos llamado $\mathbb{C}$.

- r es el módulo del vector (a, b), esto es, la distancia del punto al origen[3],

$$r = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- y θ es un elemento del siguiente conjunto denominado argumento de z,

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : a = r\cos\theta,\ b = r \operatorname{sen}\theta\}$$

Dado que dos números reales que difieran en 2π, tienen el mismo seno y coseno (ver (2)), es obvio que $\operatorname{Arg}(z)$ contiene infinitos valores. Así, una vez que conocemos un ángulo $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$, conocemos todo el conjunto:

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{Arg} & : & \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & z & \longrightarrow & \{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

En ocasiones, es útil asignar a cada número complejo un único elemento de $\operatorname{Arg}(z)$. Notemos que en cada intervalo (semiabierto) de anchura 2π hay un único elemento de $\operatorname{Arg}(z)$. Por convenio, escogemos el ángulo en $[0, 2\pi)$ (a veces se elige en el intervalo $[-\pi, \pi)$). A este ángulo se le conoce como argumento principal y se denota por $\arg(z)$.

Ejemplo 6. Si $z = 1 + i$, buscamos θ tales que $1 = \sqrt{2}\cos\theta$ y $1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$. Por tanto, $\operatorname{Arg}(z) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ y $\arg(z) = \pi/4$.

Algunas propiedades útiles del módulo (que son las mismas que las propiedades del valor absoluto) son:

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdad triangular)
- $|z_1 - z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $|z| > 0$ si $z \neq 0$

Forma trigonométrica de un número complejo

Sustituyendo las coordenadas polares en la forma binómica obtenemos

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{(forma trigonométrica)}$$

con $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

[3] El módulo de un número real es su valor absoluto.

Ejemplo 7. Vamos a escribir $z = -1 + i$ en forma trigonométrica. Tenemos $a = -1$ y $b = 1$, así, $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Además, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-1} = -1$ y por tanto, despejando, y teniendo en cuenta que z está en el segundo cuadrante obtenemos $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Así, $z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4})$.

Producto y división en forma trigonométrica

- Gracias a las identidades trigonométricas (ver 24), el producto de números complejos tiene una expresión muy sencilla:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 =& r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ =& r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)) \\ =& r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

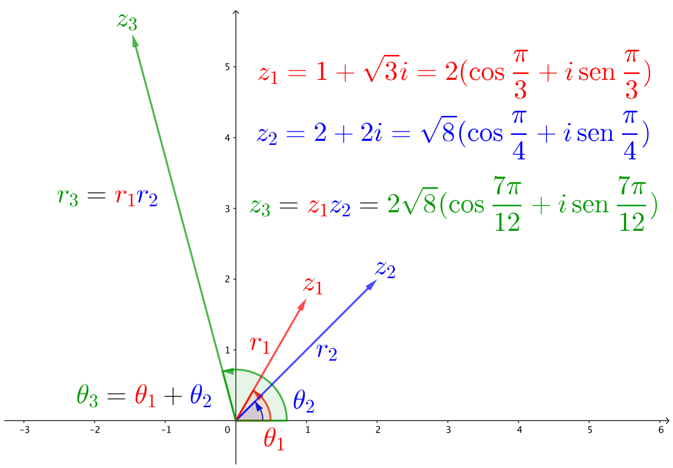


Figura 21: Producto de complejos

- De la misma manera se puede probar que si $z_2 \neq 0$, la división de dos números complejos es

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)).$$

Ejemplo 8. Multipliquemos en forma trigonométrica $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ por la unidad imaginaria $i = (\cos(\frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))$:

$$iz = r\left(\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})\right)$$

es decir, al multiplicar un número complejo por i, lo rotamos 90° en el sentido antihorario.

2.2. Fórmula de Euler: potencia y raíz de un número complejo

Fórmula de Euler

La mayoría de las funciones que conocemos de variable real (potencia, raíz, exponencial, logaritmo, seno, coseno...) se pueden definir como funciones complejas de variable compleja

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

de modo que cuando las restringimos a $\mathbb{R}$ recuperamos las funciones conocidas de variable real. Aunque entender estas extensiones en profundidad excede los objetivos de este curso, comentaremos aquellos aspectos más relevantes que resultan muy útiles de cara a operar con complejos.

La primera observación es que como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, las funciones complejas en el caso particular $z = a + 0i \in \mathbb{R}$, tienen que coincidir con las funciones reales de variable real que ya conocemos. Acabamos de ver que si multiplicamos dos complejos de argumentos θ_1 y θ_2, obtenemos un complejo de módulo 1 de argumento $\theta_1 + \theta_2$:

$$(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) = (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Este tipo de *fenómeno* no es nuevo: la función exponencial real e^{θ}, con $\theta \in \mathbb{R}$, cumple $e^{\theta_1}e^{\theta_2} = e^{\theta_1+\theta_2}$. Motivados por este hecho (y por unos cuantos más que veremos en la sección 3), definimos $e^{i\theta}$ como el número complejo $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Esta igualdad es uno de los resultados más importantes de las matemáticas, que conecta la función exponencial compleja con las funciones trigonométricas.

Fórmula de Euler: Para todo número real $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{8}$$

- Se puede probar que esta función exponencial *compleja* comparte muchas propiedades con la exponencial real: como ya hemos visto, cumple la ley de los exponentes $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1+i\theta_2}$ y además, nunca se anula. Sin embargo, no es una función inyectiva, ya que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ se cumple $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$.

- El caso particular $\theta = \pi$ nos da la conocida identidad de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

  Esta fórmula fue publicada por Euler en 1748 en el libro *"Introductio in analysis infinitorum"* y relaciona de lo *mejorcito* de las matemáticas: el número e, la unidad imaginaria i, el número π, 0 (el neutro de la suma) y 1 (el neutro de la multiplicación).

- Si reescribimos la forma trigonométrica usando la identidad de Euler, podemos expresar también nuestro número complejo como

$$z = re^{i\theta} \quad \text{(forma exponencial)}$$

  Así, la fórmula de Euler nos dice que si multiplicamos $z_1 = e^{i0}$ por $z_2 = e^{i\pi}$, es decir, si rotamos π radianes el punto $(1, 0)$, llegamos al punto $(-1, 0)$, es decir, $z_1z_2 = -1$.

- Usando la identidad 7, el conjugado de un número complejo se escribe como

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) = r(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) = re^{-i\theta}$$

- El producto y la división de números complejos en forma exponencial resulta también muy sencilla. Dados $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ y teniendo en cuenta la ley de los exponentes $e^{i\theta_1+i\theta_2} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$:

  - $z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
  - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{r_1e^{i\theta_1}r_2e^{-i\theta_2}}{{r_2}^2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Para acabar, resumimos las diferentes formas de expresar un número complejo. Se escogerá una u otra dependiendo del tipo de problema.

A continuación veremos dos ejemplos en los que la forma exponencial es especialmente útil (recordemos que para usarla necesitamos saber el argumento).

Número Complejo	Binómica	Trigonométrica	Exponencial
z	$a+ib$	$r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$	$re^{i\theta}$

Cuadro 2: Formas de expresar un número complejo

Potencia de un número complejo

Vamos a calcular $(1+i)^{1000}$. Para ello tengo dos opciones. O bien me pido el día libre en el trabajo y calculo,

$$\overbrace{(1+i)\cdots(1+i)}^{1000\text{ veces}}$$

usando el producto en forma binómica o el binomio de Newton, o bien escribo $1+i$ en forma exponencial y aplico las propiedades conocidas de los exponentes. Como $r=\sqrt{2}$ y $\theta=\pi/4$

$$(1+i)^{1000} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{1000} = (\sqrt{2})^{1000}e^{i250\pi} = 2^{500}(\cos(2\pi)+i\operatorname{sen}(2\pi)) = 2^{500}$$

- En general, la potencia $n-$ésima ($n\in\mathbb{Z}$) de un número complejo z es

  $$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i\theta n}$$

  esto es, un número complejo de módulo r^n y argumento $n\theta+2k\pi$.

La igualdad anterior escrita en forma trigonométrica se conoce con el nombre de Fórmula de De Moivre.

Fórmula de Moivre: Para cualquier $n\in\mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta \tag{9}$$

Ejemplo 9. Calculemos $(1+i)^{12}$. En forma binómica sería muy tedioso, por ello usamos la forma trigonométrica. Como $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$ usando la fórmula de Moivre (9) tenemos

$$\begin{aligned}(1+i)^{12} =& \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(12\frac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(12\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ =&64\left(\cos\left(3\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(3\pi\right)\right) = -64.\end{aligned}$$

Raíz de un número complejo

- Para hallar las raíces $n-$ésimas de un número complejo usamos de nuevo la forma exponencial:

$$z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} \overset{(*)}{=} (re^{i\theta+2k\pi i})^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}$$

y por tanto[4] las raíces $n-$ésimas de z son n números complejos todos ellos de módulo $\sqrt[n]{r}$ y argumentos

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{n}, \quad \alpha_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{\theta + 4\pi}{n}, \cdots, \quad \alpha_{n-1} = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

Observemos que para $k \geq n$ se obtienen ángulos que difieren de $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ en 2π radianes y por tanto coinciden con alguno de ellos.

Ejemplo 10. Calculemos $32^{1/5}$ (ver figura 22). En primer lugar si $z = 32$, $r = 32$ y $\theta = 0$. La solución es un conjunto formado por 5 números complejos de radio $r = \sqrt[5]{32} = 2$ y argumentos

$$\alpha_0 = \frac{0}{5}, \quad \alpha_1 = \frac{0 + 2\pi}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{0 + 4\pi}{5}, \quad \alpha_3 = \frac{0 + 6\pi}{5} \quad \alpha_4 = \frac{0 + 8\pi}{5},$$

es decir, $32^{1/5} = \{2, 2e^{i\frac{2\pi}{5}}, 2e^{i\frac{4\pi}{5}}, 2e^{i\frac{6\pi}{5}}, 2e^{i\frac{8\pi}{5}}\}$.

- Las raíces $n-$ésimas de un número complejo se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ y dada la disposición de los ángulos, forman un polígono regular de n lados.

Teorema fundamental del álgebra

Recordemos que al resolver una ecuación de segundo grado podemos obtener una raíz real ($x^2 + 9 - 3x = 0$), dos ($x^2 = 4$), o ninguna ($x^2 = -1$). Esto no pasa cuando las raíces las buscamos entre los números complejos ya que por ejemplo, como acabamos de ver, las raíces n-ésimas de un número complejo son exactamente n. El siguiente resultado está muy lejos de ser obvio y su prueba requiere de herramientas de análisis complejo que no veremos en este curso.

[4] Observemos que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2k\pi i} = 1$ (*)

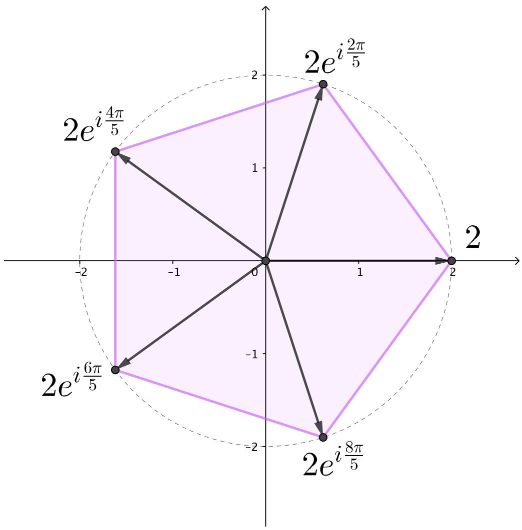


Figura 22: Raíces de un número complejo

Teorema fundamental del álgebra (Gauss, 1799): Todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene n soluciones en $\mathbb{C}$ (contando su multiplicidad).

- Recordemos que si un polinomio de grado n de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

con $a_n \neq 0$, tiene n raíces $z_1, z_2, \cdots, z_n$, entonces se puede descomponer de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = k(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

para alguna constante $k \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 11. Descomponer en factores el polinomio $z^5 - 32 = 0$. El problema es equivalente a hallar $z = 32^{1/5}$ (ver figura 22). Si llamamos a las cinco raíces z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, la solución sería

$$z^5 - 32 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)$$

- Como ocurre con los polinomios de variable real, no hay un algoritmo para hallar las raíces de un polinomio dado, más allá de algunos casos particulares, como grado dos (fórmula cuadrática), tres o cuatro. Sin embargo, contamos con alguna información adicional como la dada en el siguiente resultado.

Raíces conjugadas: Dado un polinomio P con coeficientes reales, si z es raíz de P, entonces su conjugado $\overline{z}$ también. Como consecuencia, todo polinomio con coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real.

Ejemplo 12. Descomponer en factores el polinomio $z^3-5z^2+9z-5=0$. Usando la regla de Ruffini, vemos que $z=1$ es raíz, y obtenemos $z^3-5z^2+9z-5=(z-1)(z^2-4z+5)$. Ahora aplicamos la fórmula cuadrática para obtener las dos raíces restantes:

$$z=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$$

Por tanto, $z^3-5z^2+9z-5=(z-1)(z-(2+i))(z-(2-i))$.

Movimientos en el plano

Hemos visto que los números complejos se pueden identificar con puntos del plano. Ahora veremos cómo algunas transformaciones en el plano se pueden traducir al lenguaje de los números complejos.

- Proyección sobre el eje x: $z\mapsto \mathrm{Re}(z)$
- Proyección sobre el eje y: $z\mapsto \mathrm{Im}(z)$
- Simetría respecto al origen: $z\mapsto -z$
- Simetría respecto al eje x: $z\mapsto \overline{z}$
- Traslación por el vector (a,b): $z\mapsto z+(a+bi)$
- Homotecia de razón $k>0$ ($k\neq 0$) con centro el origen: $z\mapsto kz$. La homotecia es una dilatación si $k>1$ y una contracción si $k<1$.
- Giro de ángulo θ con centro el origen: $z\mapsto ze^{i\theta}$

Podemos componer las homotecias, los giros y las traslaciones para obtener las semejanzas directas: transformaciones que conservan la forma y la orientación de las figuras.

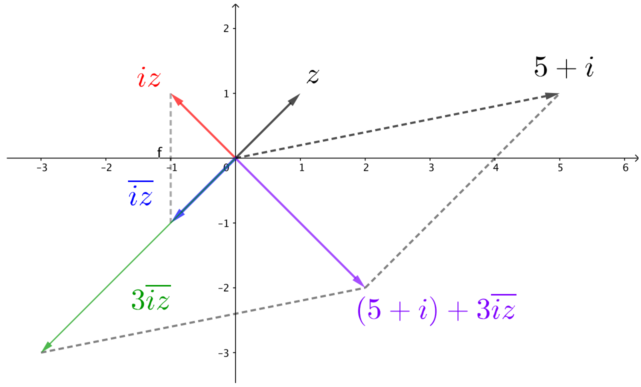


Figura 23: Transformación de un número complejo

Ejemplo 13. ¿Qué hace la transformación $z \to (5+i)+3\overline{(iz)}$? (ver Figura 23)

$$z \to iz \to \overline{(iz)} \to 3\overline{(iz)} \to (5+i)+3\overline{(iz)}$$

Gira el complejo 90°, a continuación hace el simétrico respecto al eje x, el resultado lo "estira" (con razón 3) y por último lo traslada por el vector $5+3i$.

3. Una vuelta de tuerca a las funciones trigonométricas (material optativo)

En la ficha 1, hemos aprendido a calcular las razones trigonométricas de un puñado de ángulos $\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$, y quizás de otro puñado más, que se obtiene a partir de las identidades trigonométricas. Observemos además, que la definición que hemos dado del seno y del coseno en el apartado 1.4 es "geométrica" y parece que necesitaríamos en todo momento una regla para "medir" cuál es su valor. Pero ahora bien, ¿cómo calculamos el coseno de 0,23? A la hora de calcular el valor de una cierta razón trigonométrica es mucho más útil dar una definición *analítica* de las funciones trigonométricas.

La definición analítica más común de las funciones trigonométricas pasa por las series de potencias (suma infinita de polinomios). De hecho, el valor que da una calculadora, suele ser una "aproximación" de este polinomio "infinito". En la asignatura de *Cálculo* de primero estudiaremos las series, pero por el momento daremos una definición usando elementos que nos resulten más familiares.

Recordemos en primer lugar que la función exponencial real se define por

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}, \quad \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Definimos la función exponencial compleja de manera análoga como

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Definimos las funciones seno y coseno reales de manera analítica como sigue:

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Aunque aparezca la unidad imaginaria i en la expresión, en realidad se trata de una sucesión de números reales, pues en el numerador se suma un complejo y su conjugado. Con esta definición, es posible probar la identidad de Euler (8) que vimos en la ficha 2.

Y ahora bien, ¿y esta definición que tiene que ver con la definición geométrica que hemos dado? Vamos a dar una idea de cómo se conectan la definición analítica con la geométrica. En primer lugar, es posible probar, usando propiedades de los límites de funciones continuas, que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. De manera alternativa, si podemos probar que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ y $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, entonces definiendo $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$, tenemos $f'(x) = 0$ y como $f(0) = 1$ concluímos que $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En segundo lugar, observamos que el conjunto de puntos $\{(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in \mathbb{R}\}$ que cumplen la identidad $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, está situado sobre una circunferencia de radio 1. Además se puede probar que, cuando recorremos la circunferencia haciendo variar el parámetro t, lo hacemos a velocidad constantemente 1. Por tanto, en un tiempo t hemos recorrido un arco de longitud t, que es precisamente la definición de radián. Los argumentos de las funciones trigonométricas así definidas corresponden a la medida de ángulos en radianes. Probar de manera rigurosa todos los pasos que hemos dado conlleva una serie de dificultades técnicas, pero con un poco de paciencia, superables.

Referencias adicionales

- Apostol, T.M. : Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté.
  Contiene una introducción rigurosa a los números complejos.

- Gelfand, I. M.; Saul, M. (2001). Trigonometry. Birkhäuser, Boston, MA.
  Contiene una presentación completa de la trigonometría con mucho material adicional.

- Curso cero Matemáticas UNED (Trigonometría y Números complejos):
  http://ocw.innova.uned.es/matematicas-industriales/
  Material y ejercicios complementarios.

- Página del proyecto Matex-Matemáticas-Unican, que desarrolla todas los temas de los cursos de Bachillerato (Ciencias y Sociales)
  http://personales.unican.es/gonzaleof

Anexo: Algunas identidades trigonométricas

Fórmulas de la suma y diferencia de ángulos

$$\boxed{\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\
&\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}
\end{aligned}}$$

Figura 24: Fórmulas suma y resta de ángulos

Fórmulas del ángulo doble y el ángulo mitad

Aplicando las fórmulas de la suma de ángulos 24 para $\beta = \alpha$ y identidad trigonométrica fundamental, es fácil deducir la fórmulas conocidas para el ángulo doble y el ángulo mitad.

$$\boxed{\begin{array}{l|l}
\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\
\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\
\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} & \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}
\end{array}}$$

Figura 25: Fórmulas ángulo doble y mitad

Observemos que el signo positivo o negativo de la fórmula del ángulo mitad va a depender del cuadrante en el que esté el ángulo.

Producto a sumas

La manipulación de las fórmulas de la suma y diferencia (24) nos permite obtener otras fórmulas útiles. Por ejemplo, sumando las fórmulas del coseno y despejando obtenemos una fórmula que nos transforma producto de cosenos en sumas de cosenos. Del mismo modo, podemos obtener las siguientes fórmulas

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) \\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \end{aligned}}$$

Figura 26: Fórmulas producto a sumas

Sumas a producto

Del mismo modo podemos expresar sumas de cosenos y senos como productos de las mismas razones trigonométricas. Enumeramos algunas de esta fórmulas.

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}}$$

Figura 27: Fórmulas sumas a producto

Para acabar, repasamos algunas de las identidades y propiedades trigonométricas más útiles.

Teorema de los senos y Teorema del coseno

Las siguientes identidades nos permiten resolver triángulos generales, no necesariamente rectángulos.

El primer resultado es el denominado teorema de los senos.

Teorema de los senos. Se cumple

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

El teorema de los cosenos es una generalización del teorema de Pitágoras para cualquier tipo de triángulo.

Teorema de los cosenos. Se cumplen las tres identidades siguientes

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Pensemos que si por ejemplo c se corresponde con la hipotenusa de un lado, entonces su ángulo opuesto es recto, $\gamma = 90°$, y obtendríamos directamente el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90° = a^2 + b^2$$

Índice alfabético

#SOMOS2030
uned.es