Tema 1: Álgebra y Geometría

Teoría

María Alonso Durán y Elvira Hernández García

Departamento de Matemática Aplicada I
ETSI Industriales. UNED

Álgebra y Geometría[1]

Polinomios

Un **polinomio** $P(x)$ de **grado** $n \in \mathbb{N}$ de variable x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

siendo a_i **escalar** (número real o complejo) para todo i. El elemento a_i se llama **coeficiente** de $P(x)$ de grado i, el término $a_i x^i$ se llama monomio de $P(x)$ de grado i.

Los polinomios pueden ser de una o de varias variables.

Si a es un escalar, $P(a)$ es el valor $a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0$. Una **raíz** de $P(x)$ es un escalar a tal que $P(a) = 0$, es decir, es una solución de la ecuación $P(x) = 0$. Un polinomio puede no tener raíces reales, por ejemplo, $x^2 + 1$.

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son iguales si tienen el mismo grado y coinciden monomio a monomio.

$P(x)$ es un escalar si el grado es 0, es un polinomio cuadrático si $n = 2$.

Operaciones. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios en x.

El polinomio suma $P(x) + Q(x)$ se obtiene sumando término a término los coeficientes de $P(x)$ y $Q(x)$; el producto $P(x) \cdot Q(x)$ sumando los productos de cada término de $P(x)$ por todos los términos de $Q(x)$; el cociente de polinomios $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se obtiene aplicando el algoritmo de la división. La **regla de Ruffini** permite calcular el cociente y el resto de la división del polinomio $P(x)$ y un polinomio de grado 1 de la forma $(x - a)$ siendo a un escalar.

Si $R(x)$ y $S(x)$ son polinomios en x, para realizar la suma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} + \dfrac{R(x)}{S(x)}$ se reduce a común denominador.

El producto y cociente se definen como

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} \cdot \dfrac{R(x)}{S(x)} = \dfrac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$ y $\dfrac{P(x)}{Q(x)} : \dfrac{R(x)}{S(x)} = \dfrac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$ respectivamente.

Si a es una raíz de $P(x)$ (el resto de la división es 0) entonces $P(x) = (x-a)Q(x)$ siendo $Q(x)$ el cociente de $P(x)$ y $(x - a)$. Un polinomio real de grado n tiene a lo más n raíces reales. Un polinomio complejo siempre tiene n raíces complejas.

$P(x)$ se llama **reducible** si se puede descomponer en producto de polinomios de grado menor que $P(x)$ (en caso contrario se llama irreducible). **Factorizar** un polinomio $P(x)$ consiste en *reescribir* $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles. Se puede factorizar un polinomio $P(x)$ a través de sus raíces considerando

[1] Octubre 2021

factores lineales. Un método para hallar raíces o factorizar $P(x)$ es la **regla de Ruffini**.

Ejemplo 1. Factorizar el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.
Escribimos los divisores de -6 (término independiente) que serán las posibles raíces enteras: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6. Vamos comprobando si son raíces sustituyendo en el polinomio hasta obtener cero. Como $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0$, dividimos entre $(x + 1)$ aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Como el polinomio cociente obtenido es de grado 2, resolvemos la ecuación de segundo grado: $x^2 + x - 6 = 0$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$ entonces $x = 2\,, -3$.
Por tanto, las raíces obtenidas son -1, 2, -3 y la descomposición factorial es $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$.

Ecuaciones e inecuaciones

Una **ecuación de una incógnita** o variable x es una igualdad algebraica determinada por dos expresiones (que son los dos miembros que definen cada lado de la igualdad). El **grado** de la ecuación es el mayor exponente de las incógnitas. Se llama **solución** al valor numérico (real o complejo) de la incógnita que hace que sea cierta la igualdad. Si existe, la ecuación es compatible. Dos ecuaciones son **equivalentes** si poseen las mismas soluciones.

Una **ecuación polinómica** de una incógnita es una ecuación del tipo $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ siendo a_i escalar para todo i. Una **ecuación de primer grado** es una igualdad de la forma $ax + b = 0$ siendo $a \neq 0$. Su solución está definida por $x = \dfrac{-b}{a}$. La **ecuación de segundo grado**, $ax^2 + bx + c = 0$ siendo $a \neq 0$, se resuelve mediante la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Nótese que el número de soluciones de la ecuación de segundo grado puede ser doble (si $b^2 - 4ac = 0$), dos ($b^2 - 4ac > 0$) o puede no existir (si se requieren soluciones reales y $b^2 - 4ac < 0$).
Las **bicuadradas** son ecuaciones de grado 4 del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ con $a \neq 0$, es decir, sin potencias impares. Se resuelven mediante el cambio de variable $x^2 = t$. En general, las ecuaciones de grado mayor que 2, $P(x) = 0$, se resuelven calculando las raíces de $P(x)$.

Nota: Hay que diferenciar ecuación de **identidad**. Mientras que en la ecuación se buscan soluciones (se resuelve para qué valores se cumple la igualdad), en una identidad se reescriben expresiones, es decir, ambos miembros de la igualdad son equivalentes (sea cual sea el valor de las incógnitas, si existen). Por ejemplo, la igualdad $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ es una identidad no una ecuación.

Una **inecuación** es una desigualdad en la que aparece una expresión algebraica con una o varias incógnitas. Las de primer grado (lineales), se manipulan igual que las igualdades teniendo en cuenta que al multiplicar o dividir un miembro por un número negativo, la desigualdad cambia. En general, el método de resolución de inecuaciones de grado mayor o igual que 2 consiste en resolver la ecuación correspondiente y estudiar los intervalos determinados por las raíces de dicha ecuación.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.
Factorizamos el polinomio, $x^3 + 4x^2 - x + 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 4)$. Por tanto, la ecuación es: $(x + 1)(x - 1)(x + 4) = 0$. Es decir, o se cumple $(x + 1) = 0$ o $(x - 1) = 0$ o bien $(x + 4) = 0$. En consecuencia, las raíces son: $x = -1$, $x = 1$, $x = -4$.

Ejemplo 3. Resolver la desigualdad $x^3 + 4x^2 - x - 4 \geq 0$.
La ecuación $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$, tiene como soluciones $x = -1$, $x = 1$, $x = -4$. Estos valores dividen al conjunto $\mathbb{R}$ en los intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Elegimos un número en cada intervalo, por ejemplo -5, -2, 0 y 2 y sustituimos en el polinomio: $(-5)^3 + 4 \cdot (-5)^2 - (-5) - 4 = -24 < 0$, $(-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 - (-2) - 4 = 6 > 0$, $0^3 + 4 \cdot 0^2 - 0 - 4 = -4 < 0$, $2^3 + 4 \cdot 2^2 - 2 - 4 = 18 > 0$.
La desigualdad se cumple en los dos últimos intervalos, incluyendo los valores -4, -1 y 1. Por tanto, la solución es el conjunto $[-4, -1] \cup [1, +\infty)$.

Matrices

Una **matriz** A es una *tabla* de escalares: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ donde m, $n \in \mathbb{N}$ y a_{ij} son escalares y se llaman **entradas** de A. Se denota $A = (a_{ij})$. La **columna** $j-$ésima de A es $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$, y la **fila** $i-$ésima de A es $(a_{i1}, \dots, a_{in})$. Las matrices que consisten en una sola fila (matriz fila) o columna (matriz columna) se llaman **vectores fila** o **vectores columna**.

El **orden** (o **dimensión**) de A es $m \times n$ (m es el número de filas y n de columnas columnas). Si $n = m$ entonces A es cuadrada. Denotamos $\mathbb{R}^{m \times n}$ (resp. $\mathbb{C}^{m \times n}$) las matrices de orden $m \times n$ cuyos entradas son números reales (resp. complejos). Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales cuando A y B tienen el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.
Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, una **submatriz** de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es cualquier matriz que se obtiene de

A eliminando filas o columnas. A es **escalonada por filas**[2] si el primer elemento no nulo de cada fila se encuentra a la derecha del primer elemento no nulo de la fila siguiente y las filas nulas, si las hay, están al final. A es **escalonada reducida** por filas si es escalonada y, además, en cada fila el primer elemento no nulo vale 1 y cumple que todos los elementos por debajo y por encima de él son ceros.
La **diagonal principal** de una matriz cuadrada A es $(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ y la suma de sus elementos, $\sum_{i=1,\ldots,n} a_{ii}$, se llama **traza** de A.

Tipos de matrices cuadradas: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, A es **diagonal**, A es **escalar** si es diagonal y $a_{ij} = k$ para todo $i = j$ siendo k un escalar. A es **simétrica** (resp. **antisimétrica**), si $a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo i, j. A es **triangular superior** (resp. **inferior**) si los elementos debajo (resp. encima) de la diagonal principal son todos nulos. La **matriz identidad** de orden n, I_n, es una matriz diagonal con unos y el resto son ceros, la **matriz nula** de orden n, 0_n, es una matriz cuadrada con todas sus entradas nulas.

Operaciones: Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ tienen orden $m \times n$, la **matriz suma**, $D = A + B$, cumple que $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i, j. PROPIEDADES DE LA OPERACIÓN SUMA: cerrada respecto a la suma (D es de orden $m \times n$), conmutativa ($A+B = B+A$), asociativa ($(A+B)+C = A+(B+C)$), elemento neutro ($A + 0 = A$) y elemento opuesto ($-A + A = 0$).
Si λ, β son escalares, la **matriz producto por escalar** λA tiene por entradas λa_{ij} para todo i, j. PROPIEDADES DE LA OPERACIÓN PRODUCTO POR ESCALAR: es cerrada (λA es de orden $m \times n$), distributiva respecto a la suma de matrices ($\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$), distributiva respecto a la suma de reales ($(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$), asociativa respecto a los reales $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$) y elemento unidad ($1A = A$).
Si A es de orden $m \times n$ y B de orden $n \times r$, la **matriz producto** $P = AB$ es de orden $m\times r$ y sus entradas son $p_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. PROPIEDADES DE LA OPERACIÓN PRODUCTO DE MATRICES: asociativa ($(AB)C = A(BC)$), distributiva respecto a la suma de matrices ($A(B+C) = AB+AC$) y asociativa respecto al producto de un escalar ($(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$). Además, en el caso de matrices cuadradas ($n = m$) se cumple la propiedad elemento unidad ($I_nA = AI_n = A$).
Nota: El producto de matrices no cumple las propiedades conmutativa y elemento opuesto. Compruébese que, en general, $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.
Se llama **matriz traspuesta** de A de orden $m \times n$ a la matriz $A^t = (a'_{ij})$ de orden $n\times m$ tal que $a'_{ij} = a_{ji}$. PROPIEDADES: $(A+B)^t = A^t + B^t$; $(AB)^t = B^tA^t$;

[2] De igual forma se puede definir la matriz escalonada por columnas.

$((A)^t)^t = A$.

Las **operaciones (o transformaciones) elementales** por filas (resp. columnas) en una matriz A son:

$\mathcal{O}_1$ Permutar dos filas (resp. columnas), $F_i \leftrightarrow F_j$

$\mathcal{O}_2$ Multiplicar una fila (resp. columna) por un escalar no nulo $F_i \to \lambda F_i$ con $\lambda \neq 0$

$\mathcal{O}_3$ Reemplazar una fila F_i (resp. columna) por la suma de ella más un múltiplo de otra λF_j, $F_i \to F_i + \lambda F_j$. De forma más general (considerando todas las m filas) $F_i \to F_i + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{i-1} F_{i-1} + \lambda_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \lambda_m F_m$

Escalonar por filas una matriz A consiste en reducir A a una matriz escalonada por filas mediante operaciones elementales por filas.
Nota: La matriz escalonada asociada a una matriz A no es única pero sí lo es su matriz escalonada reducida.
El **rango** de una matriz A de orden $m \times n$, $\operatorname{rang}(A)$, es el número de filas (resp. columnas) no nulas de la matriz que se obtiene al escalonar A por filas (resp. columnas). El rango de una matriz también se calcula mediante determinantes.
La **matriz inversa** de una matriz cuadrada A de orden n, es la matriz A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$. La matriz inversa no siempre existe. Si existe, ésta es única. Si A posee matriz inversa se llama regular. En caso contrario, se llama singular. PROPIEDADES: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;$((A)^{-1})^{-1} = A$, A^{-1} existe si y sólo si $\operatorname{rang}(A) = n$. Para el cálculo de la matriz inversa, véase determinantes.

Ejemplo 4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcular $2A - 3B$.

Se tiene: $2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} -3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 2-(-3) & 0-0 & -4-3 \\ 8-(-12) & 2-3 & -6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 20 & -1 & -15 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, entonces

$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 7 + 5\cdot 0 & 2\cdot 6 + 3\cdot 2 + 5\cdot(-5) \\ 7\cdot 1 + 2\cdot 7 + 4\cdot 0 & 7\cdot 6 + 2\cdot 2 + 4\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -7 \\ 21 & 26 \end{pmatrix}$

Ejemplo 6. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Se trata de realizar operaciones elementales por filas de A para obtener una matriz escalonada. Como a_{11} no es nulo, el primer paso es obtener $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$ (paso 1. $F_2 \to F_2 - 3F_1$, $F_3 \to F_3 - 4F_1$, $F_4 \to F_4 - 7F_1$). En el siguiente paso, hay que obtener $a_{32} = a_{42} = 0$ (paso 2. $F_3 \to F_3 - F_2$, $F_4 \to F_4 - 2F_2$). En el último paso el objetivo es que $a_{43} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Paso 1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & -13 & 7 \\ 0 & -10 & -23 & 8 \\ 0 & -20 & -36 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{Paso 2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & -13 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente tras $F_4 \to F_4 - F_3$ se concluye que $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & -13 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y, por tanto, el rango es 3.

Determinantes

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n.

El **determinante** de A, denotado por $\det(A)$ o $|A|$, es un escalar (único) que se puede calcular por varias vías. Para $n \leq 3$ se tiene si $n = 1$, $|A| = a_{11}$, si $n = 2$, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ y para $n = 3$ (Regla de Sarrus):

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Para cualquier orden, se pueden utilizar, por ejemplo, los elementos adjuntos de una fila o columna:

- Se llama **adjunto** de un elemento $a_{ij} \in A$ y se denota por A_{ij} al determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de eliminar en A la fila i y columna j afectado del signo $+$ si $i+j$ es par o del signo $-$ si $i+j$ es impar.
- La **matriz adjunta** de A, se denota por $Adj(A) = (a'_{ij})$, siendo $a'_{ij} = A_{ij}$.

Cálculo. El determinante de A desarrollado por la fila $i-$ésima es:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Propiedades[3]

- Si en A realizamos una operación elemental por filas (resp. por columnas) el determinante de la matriz B que resulta, verifica:

[3]Consideramos operaciones por filas pero todo es válido para operaciones por columnas.

- Si en A se realiza $\mathcal{O}_1$, $\det(B) = -\det(A)$.
- Si en A se realiza $\mathcal{O}_2$, $\det(B) = \lambda \det(A)$
- Si se realiza $\mathcal{O}_3$, $\det(B) = \det(A)$.

- Si A tiene alguna fila F_i tal que

$$F_i = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{i-1} F_{i-1} + \lambda_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \lambda_n F_n \tag{1}$$

  con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, entonces $|A| = 0$. Si F_i cumple la expresión anterior (1) para ciertos λ_j se dice que la fila $i-$ésima es combinación del resto de filas.

- A es regular (invertible) si y solo si $\det(A) \neq 0$.

- $|A| = |A^t|$, $|I_n| = 1$ y $|0_n| = 0$.

- Si B es de orden n y λ es un escalar, $|AB| = |A||B|$ y $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

- Si A tiene inversa A^{-1} entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$. Además, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$.

Compruébese, que, en general, $|A + B| \neq |A| + |B|$.

Por otra parte, el determinante permite calcular el rango de una matriz, no necesariamente cuadrada, como sigue:

Se llama **menor** de A al determinante de una submatriz cuadrada de A. El orden de un menor es el orden de la submatriz asociada a dicho menor. El **rango** de A, $\mathrm{rang}(A)$, es el mayor de los órdenes de sus menores no nulos.

Como consecuencia, para calcular el rango de un matriz se pueden eliminar la filas (resp. columnas) que son combinación del resto de filas (resp. columnas); El rango de una matriz no varía si se realizan transformaciones elementales entre sus filas (columnas); además, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^t)$.

Nota: El rango de una matriz no puede superar al número de filas (resp. columnas) que posee.

Ejemplo 7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Entonces: $|A| = 1 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-1) \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 18 - 30 - 8 + 120 + 3 - 12 = 91$.

Ejemplo 8. Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como las dos primeras filas son iguales, $|A| = 0$. Entonces, el rango no es 4. Pero el menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Por tanto, el rango es 3.

Ejemplo 9. Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 3$ se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{3}[Adj(A)]^t.$$

La matriz adjunta de A es $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{2}$$

siendo x_i las incógnitas, a_{ij} los coeficientes y b_j los términos independientes o constantes conocidas del sistema. Si $b_j = 0$ para todo j, el sistema se llama **homogéneo**. En caso contrario, sistema **no homogéneo**.
Se llama **solución** del sistema anterior a una n-nupla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que $x_i = \alpha_i$ para cada i verifica las m ecuaciones simultáneamente. **Resolver un sistema** es calcular, si existe, el conjunto de soluciones comunes a todas las m ecuaciones.
Posibilidades de solución:

- Posee una única solución. Sistema compatible determinado (SCD)
- Posee infinitas soluciones. Sistema compatible indeterminado (SCI).
- No posee solución. Sistema incompatible (SI).

Dos sistemas de ecuaciones (2) son **equivalentes** si ambos poseen el mismo conjunto de soluciones. Denotamos por $\mathcal{E}_i$ la ecuación i-ésima del sistema (2):

$$\mathcal{E}_i\colon a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Las siguientes transformaciones entre las ecuaciones del sistema (2) proporcionan sistemas equivalentes a él.

- Permutar ecuaciones del sistema, $\mathcal{E}_i \leftrightarrow \mathcal{E}_j$

- Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo, $\mathcal{E}_i \to \lambda\mathcal{E}_i$

- Reemplazar una ecuación por la suma de ella y una combinación del resto de ecuaciones,

$$\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \lambda_1\mathcal{E}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathcal{E}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathcal{E}_{i+1} + \cdots + \lambda_n\mathcal{E}_n.$$

- Eliminar una ecuación $\mathcal{E}_i$ que se obtiene mediante una combinación lineal de las otras ecuaciones, es decir, $\mathcal{E}_i = \lambda_1\mathcal{E}_1+\cdots+\lambda_{i-1}\mathcal{E}_{i-1}+\lambda_{i+1}\mathcal{E}_{i+1}+\cdots+\lambda_n\mathcal{E}_n$. En este caso, la ecuación $\mathcal{E}_i$ se llama redundante y se puede eliminar.

Todo sistema de ecuaciones lineales tiene asociados dos matrices: la **matriz de coeficientes** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y la **matriz de coeficientes ampliada** $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.
De esta forma, es posible escribir el sistema como una ecuación matricial $AX = B$ siendo A la matriz de coeficientes, X la matriz columna de incógnitas y B la matriz columna de términos independientes.
Clasificación por rangos:

- Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A^*)$ es un SI (Teorema de Rouché-Fröbenius).

- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = n$ es un SCD.

- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < n$ es un SCI.

Existen varios **métodos de resolución** del sistema (2).

- **Reducción.** Se eliminan las ecuaciones que se obtienen como suma de otras.

- **Sustitución**. Se despeja una de las incógnitas en función de las otras y se sustituye su valor en las otras ecuaciones.

- **Eliminación gaussiana** permite hallar un sistema equivalente a uno dado pero más fácil de resolver (computacionalmente hablando).
 Consiste en transformar el sistema dado en otro equivalente cuya matriz de coeficientes ampliada es escalonada. En concreto, para obtener dicho

sistema, se escalona por filas la matriz de coeficientes ampliada A^*.
El sistema obtenido es de tipo triangular y se resuelve fácilmente mediante sustituciones hacia atrás.

- **Regla de Cramer.** Si $n = m$ y $\mathrm{rang}(A) = n$, entonces la solución del sistema (es única) se obtiene mediante la fórmula

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{1i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \text{ para cada } i.$$

Ejemplo 10. Resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & z & = & -3 \end{array} \right. .$

Utilizaremos el método de eliminación gaussiana, escalonando la matriz de coeficientes ampliada. Indicamos las transformaciones hechas por filas:$F_2 \to F_2 - 2F_1$, $F_3 \to F_3 - F_1$ y finalmente $F_3 \to F_3 - 3F_2$.
Se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & 3z & = & 5 \\ & & & & 9z & = & -18 \end{array} \right. .$$

Despejando z en la última ecuación y sustituyendo hacia atrás resulta: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{array} \right.$

Ejemplo 11. Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema con $k \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ kx & + & (k-1)y & + & z & = & k \\ x & + & y & + & z & = & k+1 \end{array} \right.$$

Utilizaremos el método de eliminacón gaussiana, escalonando la matriz de coeficientes ampliada mediante las operaciones $F_2 \to F_2 - kF_1$ y $F_3 \to F_3 - F_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{pmatrix}.$$

Si $k = 1$, la última fila es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, el sistema es incompatible.
Si $k \neq 1$, $z = \dfrac{k}{1-k}$, $y = k^2 + k$, $x = \dfrac{k^3 - k^2 - 2k + 1}{1-k}$ y, por tanto, el sistema es compatible determinado.

Vectores

Considerando $\mathbb{R}^2$, si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ son dos puntos suyos, el **segmento** AB es el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y) = \{\lambda(a_1, a_2) + (1 - \lambda)(b_1, b_2)$ siendo $\lambda \in [0, 1]\}$.
Un **vector fijo** en $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AB}$, es un segmento orientado del plano que tiene como origen el punto A y como extremo el punto B. Véase Figura 1. En concreto, $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
El **módulo** de $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$, es la longitud de $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
A este módulo se le llama **distancia** del punto A al punto B.
La **dirección** de $\overrightarrow{AB}$ es la dirección de la recta que lo contiene y el **sentido** de $\overrightarrow{AB}$ es el definido por B.
Un **vector libre** es el conjunto de vectores del plano que posee el mismo módulo, dirección y sentido. Un representante de dicho conjunto se denota por $\bar{u}$. Véase Figura 1.

Operaciones: Sean $\bar{u}(u_1, u_2)$, $\bar{v}(v_1, v_2)$ dos vectores libres en $\mathbb{R}^2$ y λ un escalar.
Suma de vectores: $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y **multiplicación de escalar por vector**: $\lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$. Considérese la representación geométrica de la suma y multiplicación siendo $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$. Véase Figura 2.
Se llama **combinación lineal** de dos vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ al vector $\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2$ siendo λ_1, λ_2 escalares. Si un vector de $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\} \subset \mathbb{R}^2$ se puede obtener como combinación lineal del resto de vectores de $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$, entonces el sistema $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ es **linealmente dependiente**. Es caso contrario, $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ es **linealmente independiente**. Dos vectores de $\mathbb{R}^2$, $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, definen una **base** de $\mathbb{R}^2$ si son linealmente independientes. De esta forma, cualquier vector de $\mathbb{R}^2$, $\bar{x}$, es una combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, es decir, $\bar{x} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2$. A los escalares (x_1, x_2) se les llama coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, $\bar{x} = (x_1, x_2)_B$.
Nota: Obsérvese que dada la base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (llamada base canónica) del plano $\mathbb{R}^2$ el vector $(3, 4)$ se escribe como $3(1, 0) + 4(0, 1)$ por tanto, $(3, 4)$ son sus coordenadas respecto a B.
El **producto escalar** de dos vectores de $\mathbb{R}^2$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, se denota por $\bar{x} \cdot \bar{y}$ y es el escalar $x_1y_1 + x_2y_2$ siendo $\bar{x}(x_1, x_2)$ y $\bar{y}(y_1, y_2)$. Cuando $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$, se llaman **vectores ortogonales o perpendiculares**, $\bar{x} \perp \bar{y}$
El **módulo de un vector**, $|\bar{x}|$ es $+\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$.
El **ángulo de dos vectores** $(\bar{x}, \bar{y})$ verifica $\cos(\bar{x}, \bar{y}) = \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$.
Análogamente, lo anterior se puede definir para vectores de $\mathbb{R}^3$ (ternas,(u_1, u_2, u_3))[4].

[4] En general, se puede definir para un **vector** en el espacio $\mathbb{R}^n$, es decir, una n-nupla ordenada

El **producto vectorial** de dos vectores de $\mathbb{R}^3$, $\bar{x}$ y $\bar{y}$, es el vector

$$\bar{v} = \bar{x} \wedge \bar{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

y verifica que es ortogonal a ambos, $\bar{v} \perp \bar{x}$, $\bar{v} \perp \bar{y}$.

Una **recta** r, Figura 3, en el plano $\mathbb{R}^2$ está determinada por un punto $P(x_0, y_0)$ y un **vector director** $\bar{u}(u_1, u_2)$ o dos puntos distintos o por un punto y la pendiente. Los puntos (x, y) que pertenecen a una recta r tienen por ecuación:

Vectorial: $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2)$.
Paramétrica:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda u_2 \end{array} \right. \quad \text{siendo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ el parámetro.}$$
Continua: $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$.
Cartesiana o implícita: $ax + by + c = 0$
Explícita: $y = mx + n$.
Punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$. La pendiente vale m.

El paso de unas a otras puede ser un buen ejercicio. En el caso de la ecuación continua, hay que prestar atención al caso $u_i = 0$ para algún i. Véase Figura 3. Sean r y s dos rectas del plano $\mathbb{R}^2$ con pendientes m_r y m_s. Si $m_r = m_s$, son paralelas y si $m_r m_s = -1$, son perpendiculares entre sí. Las otras posiciones son coincidentes o secantes (se cortan en un punto).
Una **recta** r en el espacio $\mathbb{R}^3$ está determinada por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un **vector director** $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$. Los puntos (x, y, z) que pertenecen a una recta se pueden expresar mediante la ecuación:

Vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$.
Paramétrica:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda u_2 \\ z & = & z_0 + \lambda u_3 \end{array} \right. \quad \text{siendo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ el parámetro.}$$
Continua: $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3}$.
Cartesiana o implícita: $\left\{ \begin{array}{ll} ax + by + cz + d & = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = 0 \end{array} \right.$.

Un **plano** en el espacio $\mathbb{R}^3$ está determinado por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores directores linealmente independientes $\bar{u}(u_1, u_2)$ y $\bar{v}(v_1, v_2)$.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Los puntos (x, y, z) que pertenecen al plano se pueden expresar de las siguientes formas equivalentes:

Vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$.
Paramétrica:
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y & = & y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z & = & z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right.$ siendo λ, $\mu \in \mathbb{R}$ los parámetros.

Cartesiana: $ax + by + cz + d = 0$ siendo a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

El vector $\bar{n}(a, b, c)$ es perpendicular al plano y se llama **vector normal** al plano. Eliminando o introduciendo parámetros se puede pasar de la expresión paramétrica a la expresión cartesiana o viceversa.
Dos planos en el espacio pueden tener las siguientes **posiciones**: paralelos (el sistema de las ecuaciones dadas por cada plano es incompatible), coincidentes o se cortan en una recta (en ambos casos el sistema de las ecuaciones dadas por cada plano es compatible indeterminado). Compruébese qué posiciones posibles hay entre recta y plano de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 12. Escribir las diferentes expresiones de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(-3, 5)$.
Consideramos el vector director$\overrightarrow{AB} = (-3, 5) - (1, -2) = (-4, 7)$. Ecuaciones: *Vectorial*: $(x, y) = (1, -2) + \lambda(-4, 7)$

Paramétricas: $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 - 4\lambda \\ y & = & -2 + 7\lambda \end{array}\right.$
Continua: $\dfrac{x - 1}{-4} = \dfrac{y + 2}{7}$.
Cartesiana: $7x + 4y + 1 = 0$.
Explícita: $y = \dfrac{-7}{4}x - \frac{1}{4}$.
Punto-pendiente: $y + 2 = \frac{-7}{4}(x - 1)$.

Cónicas

Las **cónicas** son casos particulares de la siguiente ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

siendo x e y las variables y a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$. Sus puntos, las soluciones de dicha ecuación, cumplen cierta propiedad geométrica en el plano $\mathbb{R}^2$. Estas curvas se conocen con el nombre de **secciones cónicas** porque se obtienen al seccionar un cono con un plano. Se clasifican en circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Una **circunferencia**, Figura 4, es el conjunto de puntos $P(x,y)$ del plano $\mathbb{R}^2$ que equidistan $r>0$ de un punto fijo $C(x_0,y_0)$ (centro).
Ecuación general:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Una **elipse**, Figura 5, es el conjunto de puntos $P(x,y)$ del plano $\mathbb{R}^2$ cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' (**focos**) es constante

$$|\overrightarrow{PF}|+|\overrightarrow{PF'}|=2a \text{ siendo } a>0.$$

Ecuación general con centro en el origen $(0,0)$, *focos* $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ $(c>0)$ siendo $a>0$ y $b>0$ los semiejes. el semieje menor:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Se verifica que $a^2=b^2+c^2$.
Nota: La circunferencia es un caso particular de la elipse (cuando $a=b$).

Una **hipérbola**, Figura 6, es el conjunto de puntos $P(x,y)$ del plano $\mathbb{R}^2$ cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante

$$|\overrightarrow{PF}|-|\overrightarrow{PF'}|=\pm 2a \text{ siendo } a>0.$$

Ecuación general con centro $(0,0)$ *y focos* $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ $(c>0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

siendo $a>0$ el semieje mayor y $b>0$ el semieje menor. Se verifica que $c^2=a^2+b^2$. La hipérbola posee dos asíntotas que son dos rectas simétricas que pasan por el centro. Una hipérbola es equilátera si $a=b$.

Una **parábola**, Figura 6, es el conjunto de puntos $P(x,y)$ del plano $\mathbb{R}^2$ tales que equidistan de un punto fijo F (**foco**) y de una recta (**directriz**). El punto medio entre el foco y la directriz se llama **vértice** $V=(x_0,y_0)$.
La recta que pasa por el foco y el vértice se denomina **eje** de la parábola.
La parábola es simétrica respecto a su eje.
Ecuación general de la párabola (vertical) con *vértice* $V=(x_0,y_0)$ y *directriz* $y=y_0-p$:

$$(x-x_0)^2=4p(y-y_0).$$

Nota: Para obtener la parábola horizontal se intercambia x con y.

Ejemplo 13. La circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1), (0, 0)$ y $(0, 1)$. Determinar los coeficientes de esa ecuación y, por lo tanto, la ecuación de la circunferencia.
Sustituyendo los puntos en la ecuación se obtiene el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} -2a & -2b & +c & = & -2 \\ & & c & = & 0 \\ & -2b & +c & = & -1 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema: $a = b = \dfrac{1}{2}$, $c = 0$. Luego la ecuación es: $x^2+y^2-x-y = 0$.

Ejemplo 14. Calcular la ecuación de la parábola que tiene como directriz la recta $y = 3$ y como foco el punto $(2, 1)$.
Las coordenadas del vértice son $(2, \frac{3+1}{2}) = (2, 2)$.
La directriz es $y = 3 \Rightarrow 2 - p = 3 \Rightarrow p = -1$. Luego, la ecuación es

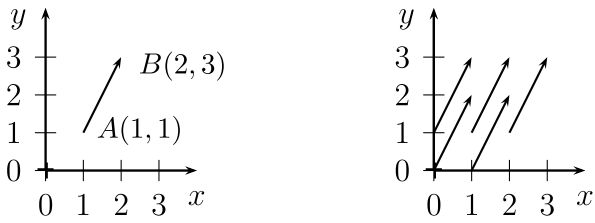
$$(x - 2)^2 = -4(y - 2).$$

Ejemplo 15. Calcular la ecuación de la elipse con focos en $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ (respecto la ecuación general), centro en $(-1, 4)$ y semieje menor $b = 2$.
Como $c = 3$ y $b = 2$, sustituyendo en $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene $a = \sqrt{13}$. Por tanto, la ecuación es:

$$\frac{(x + 1)^2}{13} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1$$

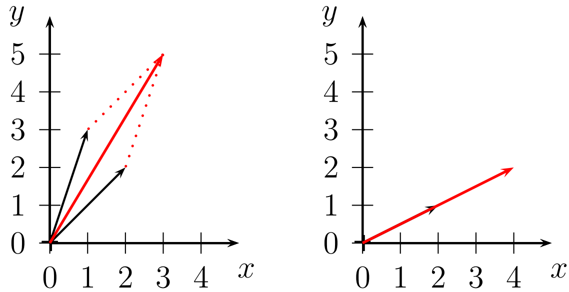
Ejemplo 16. Calcular la ecuación de la hipérbola equilátera con focos en $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ (respecto la ecuación general) y centro en $(2, -5)$.
Como es equilátera $a = b$, y como $c^2 = a^2 + b^2$ entonces $c^2 = 2a^2$. Por tanto, $4^2 = 2a^2 \longrightarrow a = \sqrt{8} = b$ y la ecuación es:

$$\frac{(x - 2)^2}{8} - \frac{(y + 5)^2}{8} = 1.$$



Vector Fijo $\overrightarrow{AB}(1,2)$ Algunos elementos del Vector libre $\bar{u}(1,2)$

Figura 1: Vector Fijo y Vector Libre



Vector suma $(1,3)+(2,2)=(3,5)$ Vector producto $2(2,1)=(4,2)$

Figura 2: Operaciones: suma de vectores y multiplicación de escalar por vector

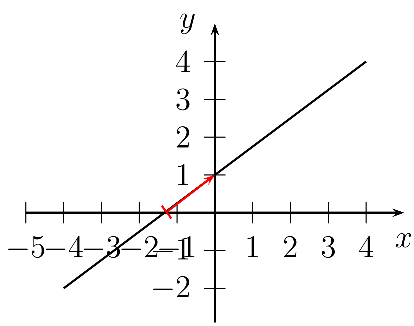


Figura 3: Recta de ecuación cartesiana $6x-8y+8=0$

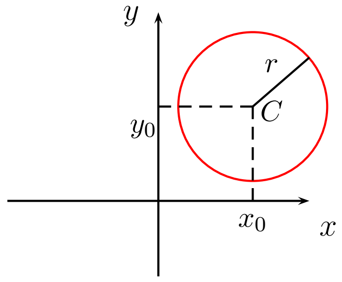


Figura 4: Circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r

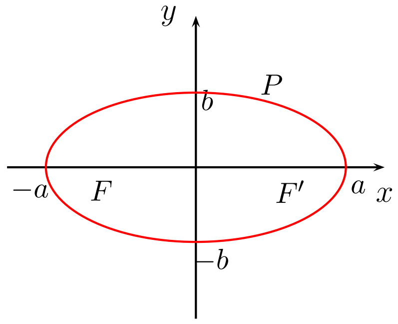


Figura 5: Elipse con centro $(0, 0)$

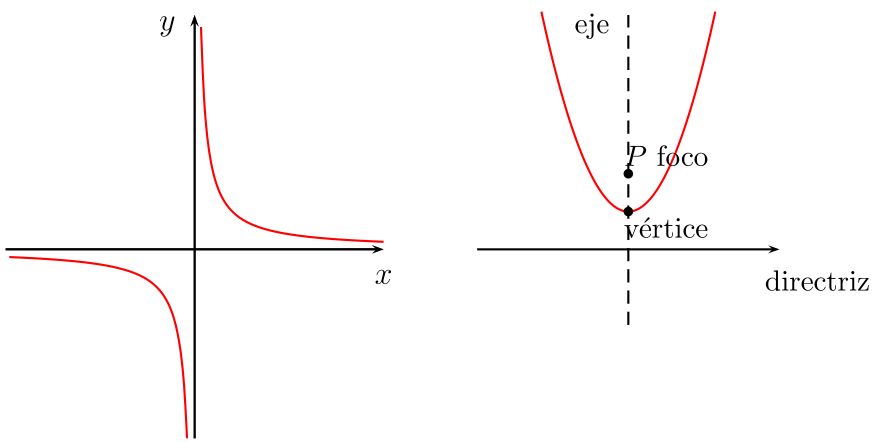


Figura 6: Hipérbola y Parábola

Índice alfabético

#SOMOS2030
uned.es

UNED