Tema 5: Trigonometría y números complejos

Ejercicios

Estibalitz Durand Cartagena y Miguel Sama Meige

Departamento de Matemática Aplicada I
ETSI Industriales. UNED

#SOMOS2030
uned.es

UNED

Trigonometría y números complejos: problemas

Estibalitz Durand y Miguel Sama

1. Enunciados de los ejercicios 2
1.1. Ejercicios: Triángulos y trigonometría 2
1.2. Ejercicios: Números complejos 6
2. Soluciones ejercicios propuestos 8
2.1. Soluciones: Triángulos y trigonometría 8
2.2. Soluciones: Números complejos 18

1. Enunciados de los ejercicios

1.1. Ejercicios: Triángulos y trigonometría

Ejercicio 1. Razone por qué las mediatrices se cortan necesariamente en un punto. Ver respuesta correcta.

Ejercicio 2. El Teorema de Pitágoras proporciona un criterio para determinar cuándo un ángulo es recto. Dos corolarios interesantes del Teorema de Pitágoras nos proporcionan criterios similares para determinar si un ángulo es agudo u obtuso:

(I) Si se verifica

$$c^2 < a^2 + b^2$$

entonces el ángulo del vértice C es agudo. Recíprocamente si el ángulo de vértice C es agudo, entonces $c^2 < a^2 + b^2$.

(II) Si se verifica que

$$a^2 + b^2 < c^2$$

entonces el ángulo del vértice C es obtuso. Recíprocamente si el ángulo de vértice C es obtuso, entonces $a^2 + b^2 < c^2$.

Usando estos criterios, estudie si son agudos, rectángulos u obtusos, los triángulos con las siguientes longitudes:

(a) $\{2,3,4\}$

(b) $\{4,5,6\}$

(c) $\{6,8,11\}$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 3. Razone si puede existir un triángulo de lados 1, 2 y 3. Ver respuesta correcta.

Ejercicio 4. Considere el triángulo **T** de la figura 1. Aplicando razonadamente el teorema de Pitágoras, calcule las longitudes de sus lados y clasifique razonadamente todos sus ángulos en agudos, rectos u obtusos. Ver respuesta correcta.

Ejercicio 5. Haga lo mismo que en el ejercicio anterior para el triángulo $\mathbf{T}_2$ de la figura 2. Ver respuesta correcta.

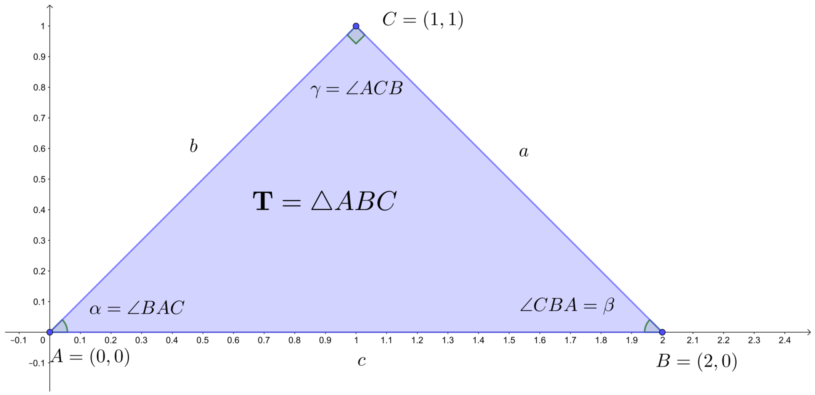

Figura 1: Representación de un triángulo en el plano cartesiano

Ejercicio 6. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 20 unidades. Si el ángulo agudo adyacente mide 73° grados, encuentre el otro ángulo y la hipotenusa.

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 7. (*) Sea $\varepsilon > 0$ un número real positivo. Para cada ε consideramos el triángulo rectángulo T_ε de vértices

$$A_\varepsilon = (0,0),\ B_\varepsilon = (1,\varepsilon),\ C_\varepsilon = (1,0)$$

Sean asimismo $\alpha_\varepsilon = \angle B_\varepsilon A_\varepsilon C_\varepsilon$, $\beta_\varepsilon = \angle A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon$ los ángulos de vértices A_ε y B_ε respectivamente. En este ejercicio se pide los siguiente

(a) Demuestre que T_ε es un triángulo rectángulo

(b) Calcule el seno y el coseno de los ángulos α_ε, β_ε.

(c) Estudie el límite de α_ε, β_ε cuando ε tiene a cero. Es decir, calcule

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon, \text{ y } \lim_{\varepsilon\to 0}\beta_\varepsilon$$

(d) A la vista de lo anterior, justifique razonadamente los valores de la razones trigonométricas para los ángulos 0° y 90°.

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 8. Si $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$, encuentre, sin usar la calculadora, el valor de $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.
Ver respuesta correcta.

Ejercicio 9. Si $\cos\alpha = a$, para algún $0 < a < 1$, exprese en términos de a los valores de $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{cotg}\alpha$. Ver respuesta correcta.

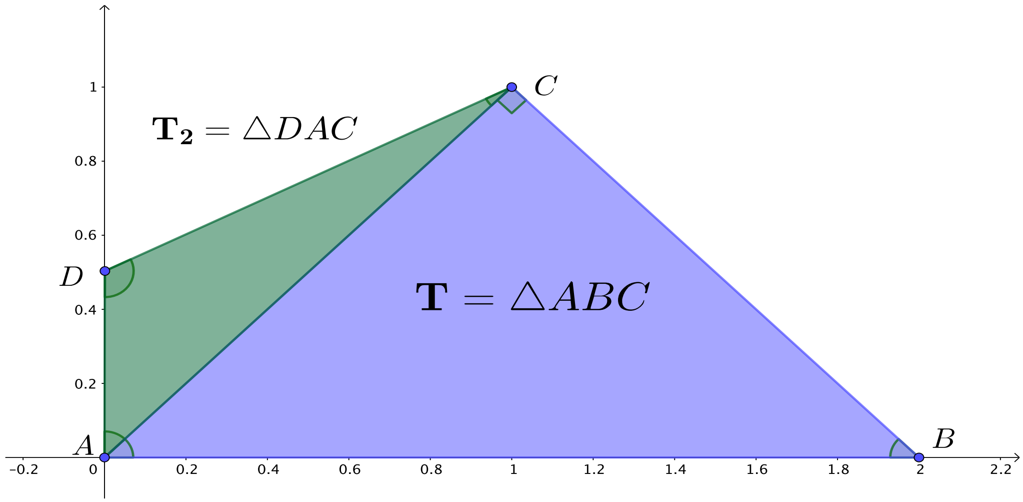

Figura 2: Triángulos $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T_2}$

Ejercicio 10. Señale cuál es el dominio de definición y el rango de las funciones tangente y cotangente.Ver respuesta correcta.

Ejercicio 11. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:

(a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\operatorname{sen}\alpha = -1$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 12. Exprese los siguiente ángulos en radianes:

(a) $2675°$

(b) $-820°$

(c) $1045°$

(d) $-201230°$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 13. Dados los ángulos del ejercicio anterior, determine en qué cuadrante se encuentran. Ver respuesta correcta.

Ejercicio 14. Exprese el seno y el coseno de los ángulos del ejercicio anterior en función de un ángulo del primer cuadrante.

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 15. Use un razonamiento geométrico para probar la siguiente identidad trigonométrica:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = (\sec \alpha)^2$$

siendo α un ángulo agudo.

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 16. Dadas las funciones

(a) $y = -2 \operatorname{sen} x$

(b) $y = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Exprese cada una de ellas como una función sinusoidal del tipo

$$y = a \operatorname{sen}(k(x - \beta))$$

en donde necesariamente la amplitud y la frecuencia deben ser reales positivos $(a, k \geq 0)$. Ver respuesta correcta.

Ejercicio 17.

(a) Compruebe que

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

(b) Dé una fórmula para la tangente de la diferencia de ángulos

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

(c) Simplifique la siguiente expresión, usando las fórmulas para el coseno de la suma y diferencia de ángulos:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y)$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 18.

(a) Si $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcule $\operatorname{sen} 2\alpha$.

(b) Pruebe la siguiente fórmula para el coseno del ángulo triple

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 19. A partir de la fórmula

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}, \tag{1}$$

pruebe la siguiente fórmula para el ángulo mitad

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 20. Pruebe la siguiente identidad

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \cos 2\alpha$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 21. Determine los ángulos del triángulo $\mathbf{T}_2$ de la figura 2 usando el teorema del coseno. Verifique asimismo el teorema del seno para $\mathbf{T}_2$. Ver respuesta correcta.

1.2. Ejercicios: Números complejos

Ejercicio 22. Sean $z_1 = 5-3i$ y $z_2 = -4+7i$. Calcule

$(a)\ z_1+z_2 \qquad (b)\ z_1-z_2 \qquad (c)\ z_1z_2 \qquad (d)\ \dfrac{z_1}{z_2} \qquad (e)\ \overline{z_1}z_2 \qquad (f)\ iz_1-2\overline{z}_2$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 23. Calcule la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$(a)\ z = \frac{4+i}{-2+3i} \qquad (b)\ w = 7i^{19}+2i^{28}-3i^5+i-5$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 24. Escriba en forma trigonométrica, y represente en el plano de Argand, los siguientes números complejos:

$$(a)\, z = 2 \qquad (b)\, z = -i^5 \qquad (c)\, z = 2 - 2\sqrt{3}i \qquad (d)\, z = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 25. Calcule los siguientes números complejos:

$$(a)\, z = (1+i)^{12} \qquad (b)\, z = \left(\frac{2+3i}{4-2i}\right)^4$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 26. Calcule:

$$(a)\, (-3+4i)^{1/2} \qquad (b)\, (1+i)^{1/3} \qquad (c)(-i)^{1/7}$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 27. Factorice los siguientes polinomios en $\mathbb{C}$:

$$(a)\, z^2 - 3iz + 3z - 9i \quad (b)\, z^3 + (-2+i)z^2 + (10-2i)z + 10i \qquad (c)\, z^5 - i$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 28. Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$(a)\, \mathrm{Re}(iz) - z\overline{z} = 0 \quad (b)\, \mathrm{Im}((3+i)z) = 2$$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 29. Observe el siguiente razonamiento:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$$

¿Cómo es posible que $1 = -1$? Ver respuesta correcta.

Ejercicio 30. Usando las propiedades del conjugado de un número complejo pruebe el siguiente resultado: dado un polinomio P con coeficientes reales, si z es raíz de P, entonces su conjugado $\overline{z}$ también. Como consecuencia, todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. Ver respuesta correcta.

2. Soluciones ejercicios propuestos

2.1. Soluciones: Triángulos y trigonometría

- Solución Ejercicio 1: En primer lugar observe que, en principio, las mediatrices podrían cortarse dos a dos y no existir un punto de intersección común. Construimos la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y la mediatriz del lado $\overline{CA}$. Estas dos rectas, se cortan necesariamente en un punto P (dado que dos lados de un triángulo no son nunca paralelos). Veamos que este punto pertenece necesariamente a la mediatriz del lado restante $\overline{BC}$. Como P pertenece a la mediatriz del lado $\overline{AB}$, $d(P, A) = d(P, B)$, y como P pertenece a la mediatriz del lado $\overline{CA}$, $d(P, A) = d(P, C)$. Así $d(P, B) = d(P, C)$, lo que implica que P pertenece necesariamente a la mediatriz del lado $\overline{BC}$.

- Solución Ejercicio 2:

  (a) Es un triángulo obtuso, por verificarse la condición del criterio (II)

  $$4^2 = 16 > 13 = 2^2 + 3^2$$

  (b) Es un triángulo agudo por verificarse la condición de ángulo agudo del criterio (I) para todos los vértices

  $$\begin{array}{c} 4^2 = 16 \ < 61 = 5^2 + 6^2 \\ 5^2 = 25 < 52 = 4^2 + 6^2 \\ 6^2 = 36 < 41 = 5^2 + 4^2 \end{array}$$

  (c) Usando el criterio (II), es un triángulo obtuso:

  $$11^2 = 121 > 100 = 6^2 + 8^2$$

- Solución Ejercicio 3: No pueden formar un triángulo, ya que no se verifica la propiedad triangular, por ser un lado la suma de los otros dos

  $$3 = 2 + 1$$

  En la figura 3 podemos comprobar gráficamente la imposibilidad de construir un triángulo de este tipo.

- Solución Ejercicio 4: Basta aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos:

  $$a = \mathrm{d}(C, B) = d((1, 1), (2, 0)) = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$
  $$b = \mathrm{d}(A, C) = d((0, 0), (1, 1)) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$
  $$c = \mathrm{d}(A, B) = d((0, 0), (2, 0)) = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2 =} \sqrt{2^2} = 2$$

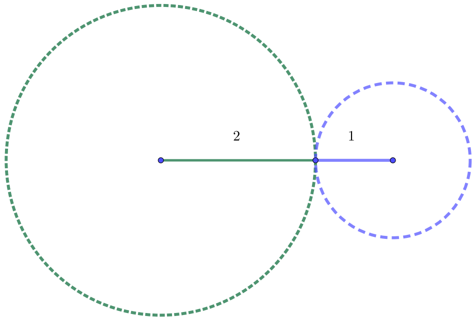

Figura 3: Resolución ejercicio 2

Como el cuadrado de uno de los lados es suma de los cuadrados de los otros dos:

$$c^2 = 2^2 = 4 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = a^2 + b^2$$

entonces por el teorema de Pitágoras el ángulo del vértice C es recto. Necesariamente, los otros tiene que ser agudos ya que su suma tiene que dar 90° por la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

- Solución Ejercicio 5: Observando el triángulo $\mathbf{T}_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} d &= \mathrm{d}(A, C) = d((0,0),(1,1)) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \\ a &= \mathrm{d}(D, C) = d\left(\left(0, \tfrac{1}{2}\right), (1,1)\right) = \sqrt{(1-0)^2 + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ c &= \mathrm{d}(D, A) = d(\left(0, \tfrac{1}{2}\right), (0,0)) = \sqrt{(0-0)^2 + (\tfrac{1}{2} - 0)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como el cuadrado de uno de los lados es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos

$$d^2 = \sqrt{2}^2 = 4 > \frac{3}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + c^2$$

entonces por el enunciado IV del teorema de Pitágoras el ángulo de vértice D es obtuso y por tanto mayor que 90°. Luego la suma de los otros dos ángulos es necesariamente menor a 90° por la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo, y por tanto son agudos.

- Solución Ejercicio 6: En la figura 4 podemos ver una representación gráfica del problema. Como los ángulos son complementarios

$$\beta = 90^\circ - 73^\circ = 17^\circ$$

Y aplicando la definición de seno

$$c = \frac{20}{\operatorname{sen} 17^\circ} \approx 68.40$$

- Solución Ejercicio 7: (a) Las longitudes de cada lado vienen dadas por

$$\begin{aligned} a_\varepsilon &= d(B_\varepsilon, C_\varepsilon) = d((1,\varepsilon),(1,0)) = \sqrt{0^2+\varepsilon^2} = \varepsilon \\ b_\varepsilon &= d(A_\varepsilon, C_\varepsilon) = d((0,0),(1,0)) = \sqrt{1^2+0^2} = 1 \\ c_\varepsilon &= d(A_\varepsilon, B_\varepsilon) = d((0,0),(1,\varepsilon)) = \sqrt{1^2+\varepsilon^2} = \sqrt{1+\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Como

$$c_\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon^2 = b_\varepsilon^2 + a_\varepsilon^2$$

por el teorema de Pitágoras concluimos que el triángulo es rectángulo.

(b) Aplicando la definición, se tiene

$$\cos\alpha_\varepsilon = \frac{b_\varepsilon}{c_\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},\ \operatorname{sen}\alpha_\varepsilon = \frac{a_\varepsilon}{c_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

y

$$\cos\beta_\varepsilon = \frac{a_\varepsilon}{c_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},\ \operatorname{sen}\beta_\varepsilon = \frac{b_\varepsilon}{c_\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

(c) Es claro que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon = 0^\circ$$

Por ser α_ε y β_ε ángulos complementarios, $\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon = 90^\circ$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} 90^\circ - \alpha_\varepsilon = 90^\circ$$

(d) Por continuidad,

$$\cos 0^\circ = \cos\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\cos\alpha_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1$$

De igual forma

$$\operatorname{sen} 0^\circ = \operatorname{sen}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\beta_\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{sen}\beta_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0$$

De lo anterior es claro también

$$\cos 90^\circ = \operatorname{sen} 0^\circ = 0,\ \ \operatorname{sen} 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

- Solución Ejercicio 8: Aplicando la definición de tangente

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha$$

Luego

$$2\cos\alpha = 5\operatorname{sen}\alpha \tag{2}$$

y por tanto

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha(2\cos\alpha) = \operatorname{sen}\alpha(5\operatorname{sen}\alpha) = 5\operatorname{sen}^2\alpha \tag{3}$$

Por otra parte, elevando al cuadrado la expresión (2) y aplicando la identidad fundamental de la trigonometría tenemos que

$$5^2\operatorname{sen}^2\alpha = 2^2\cos^2\alpha = 4(1-\operatorname{sen}^2\alpha) \Leftrightarrow 29\operatorname{sen}^2\alpha = 4$$

Con lo que $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{4}{29}$, y sustituyendo en (3) se tiene finalmente

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 5\cdot\frac{4}{29} = \frac{20}{29}$$

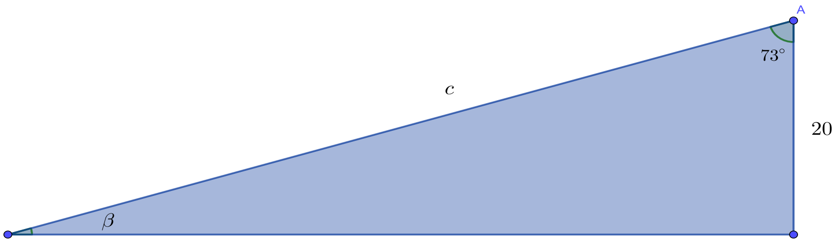

Figura 4: Representación gráfica ejercicio 6

- Solución Ejercicio 9: Como $\cos\alpha = a$, por la identidad fundamental

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-a^2}$$

Por tanto aplicando la definición de tangente

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

con lo que su recíproca

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$$

- Solución Ejercicio 10: Como por definición

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

La tangente no se puede definir en los puntos en donde se anula el coseno, y además toma cualquier valor real. Por ello:

$$\operatorname{dom}\operatorname{tg} x = \{x : \cos x \neq 0\} = \left\{x : x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{..., \frac{-7\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, ...\right.$$

$$\operatorname{rango}\operatorname{tg} x = \mathbb{R}$$

Del mismo modo, la cotangente por ser la recíproca de la tangente,

$$f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

no se puede definir en todos los puntos en donde se anula el seno y toma también cualquier número real:

$$\operatorname{dom}\operatorname{cotg} = \{x : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x : x \neq \pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, ...\}$$

$$\operatorname{rango}\operatorname{cotg} = \mathbb{R}$$

- Solución Ejercicio 11: (a) Los ángulos $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$ y $\alpha_2 = \dfrac{7\pi}{4}$ son los únicos que verifican

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

en el intervalo $[0, 2\pi)$. Aplicando la periodicidad del coseno, el conjunto solución viene dado por

$$\begin{aligned}\{\alpha_1 \pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{\alpha_2 \pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} &= \left\{\frac{\pi}{4} \pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{7\pi}{4} \pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{7\pi}{4}, \pm\frac{9\pi}{4}, ...\right\}\end{aligned}$$

(b) El ángulo $\alpha_1 = \dfrac{3\pi}{2}$ es el único ángulo del intervalo $[0, 2\pi)$ que verifica

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = -1$$

Por la periodicidad del seno, el conjunto solución viene dado por

$$\{\alpha_1 \pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{..., \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, ...\right\}$$

- Solución Ejercicio 12:

  Aplicamos la fórmula que relaciona los grados sexagesimales con los radianes en cada caso.

  (a) Para $\alpha_1 = 2675°$,

  $$\operatorname{rad}(\alpha_1) = \frac{\pi}{180}\operatorname{grad}(\alpha_1) = \frac{\pi}{180}2675 \approx 46.69$$

  (b) Para $\alpha_2 = -820°$,

  $$\operatorname{rad}(\alpha_2) = \frac{\pi}{180}\operatorname{grad}(\alpha_2) = \frac{\pi}{180}(-820) \approx -14.31$$

  (c) Para $\alpha_3 = 1045°$,

  $$\operatorname{rad}(\alpha_3) = \frac{\pi}{180}\operatorname{grad}(\alpha_3) = \frac{\pi}{180}1045 \approx 18.24$$

  (d) Para $\alpha_4 = -201230°$,

  $$\operatorname{rad}(\alpha_4) = \frac{\pi}{180}\operatorname{grad}(\alpha_3) = \frac{\pi}{180}(-201230) \approx -3512.13$$

- Solución Ejercicio 13: El resto de dividir el ángulo por 360° nos da el ángulo correspondiente de la circunferencia goniométrica.

  (a) Para $\alpha_1 = 2675°$,

  $$2675° = 7 \cdot 360° + \mathbf{155°}$$

  y por tanto el resto es 155°. El ángulo se encuentra en el segundo cuadrante.

  (b) Para $\alpha_2 = -820°$, consideramos la división sin signo

  $$820° = 2 \cdot 360° + 100°$$

y cambiamos el signo multiplicando por -1

$$-820^\circ = (-2)\cdot 360^\circ - \mathbf{100}^\circ$$

El ángulo correspondiente es $-100^\circ \equiv 260^\circ$ y se encuentra en el tercer cuadrante.

(c) Para $\alpha_3 = 1045^\circ$,

$$1045^\circ = 2\cdot 360^\circ + \mathbf{325}^\circ$$

El ángulo correspondiente es 325° que se encuentra en el cuarto cuadrante.

(d) Para $\alpha_4 = -201230^\circ$,

$$-201230 = (-558)\cdot 360^\circ - \mathbf{350}^\circ$$

El ángulo correspondiente es $-350^\circ \equiv 10^\circ$ y se encuentra en el primer cuadrante.

- Solución Ejercicio 14: (a) El ángulo 135° está en el segundo cuadrante. Así si le sumamos 180° pasamos al cuarto cuadrante, y un ángulo del cuarto cuadrante siempre es conjugado con uno del primero. Así aplicando las fórmulas correspondientes se tiene

$$\cos(2675^\circ) = \cos(155^\circ) = -\cos(155^\circ + 180^\circ) = -\cos(335^\circ) = -\cos(360^\circ - 335^\circ) = -\cos(25^\circ)$$
$$\operatorname{sen}(2675^\circ) = \operatorname{sen}(135^\circ) = -\operatorname{sen}(155^\circ + 180^\circ) = -\operatorname{sen}(335^\circ) = \operatorname{sen}(360^\circ - 335^\circ) = \operatorname{sen}(25^\circ)$$

(b) El ángulo 260° está en el tercer cuadrante, restándole 180° pasamos a uno del primer cuadrante. Aplicando la fórmula de ángulos que se diferencian en 180°

$$\cos(-820^\circ) = \cos(260^\circ) = -\cos(260^\circ - 180^\circ) = -\cos(80^\circ)$$
$$\operatorname{sen}(-820^\circ) = \operatorname{sen}(260^\circ) = -\operatorname{sen}(260^\circ - 180^\circ) = -\operatorname{sen}(80^\circ)$$

(c) El ángulo 325° está en el cuarto cuadrante, por tanto su conjugado está en el primer cuadrante. Aplicando la fórmula de ángulos conjugados

$$\cos(1045^\circ) = \cos(325^\circ) = \cos(360^\circ - 325^\circ) = \cos(35^\circ)$$
$$\operatorname{sen}(1045^\circ) = \operatorname{sen}(325^\circ) = -\operatorname{sen}(360^\circ - 325^\circ) = -\operatorname{sen}(35^\circ)$$

(d) El ángulo 10° se encuentra en el primer cuadrante, luego directamente

$$\cos(201230^\circ) = \cos(10^\circ)$$
$$\operatorname{sen}(201230^\circ) = \operatorname{sen}(10^\circ)$$

- Solución Ejercicio 15:

  Tenemos que probar la identidad trigonométrica
  $$1+\operatorname{tg}^2\alpha=(\sec\alpha)^2 \tag{4}$$
  Para probarla cuando α es un ángulo agudo, utilizamos el esquema de la Figura 7 de la parte de teoría. En este caso
  $$1+\operatorname{tg}^2\alpha=1+\left(\frac{a}{b}\right)^2=1+\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2+a^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}$$
  en donde en el último paso hemos aplicado el teorema de Pitágoras.

  Por otro lado, aplicando la definición de secante y el mismo esquema gráfico, tenemos
  $$(\sec\alpha)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\frac{b^2}{c^2}}=\frac{c^2}{b^2}$$
  Por tanto coinciden, y se tiene que la identidad (4) es cierta para todo ángulo agudo α.

- Solución Ejercicio 16:

  (a) Aplicando directamente la fórmula de ángulos que se diferencian en π tenemos:
  $$y=-2\operatorname{sen}x=2(-\operatorname{sen}x)=2\operatorname{sen}(x+\pi)$$
  Luego $a=2$, $k=1$, $\beta=-\pi$.

  (b) Aplicando el desfase entre seno y coseno
  $$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}x$$
  tenemos que
  $$y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=3\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=3\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
  Luego $a=3$, $k=1$, $\beta=-\dfrac{\pi}{3}$.

- Solución Ejercicio 17:

  (a) Como $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$, aplicamos directamente la fórmula de la suma de ángulos
  $$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$

(b) Por la definición de tangente y aplicando las fórmulas de diferencia de ángulos

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot 1-1\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}\\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha-tg\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\end{aligned}$$

(c) Aplicando las fórmulas para el coseno de la suma y diferencia de ángulos se tiene:

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+\cos(x-y) &= (\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)+(\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)\\ &= \cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y+\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\\ &= 2\cos x\cos y\end{aligned}$$

- Solución Ejercicio 18:

(a) Por la identidad trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicando la fórmula del ángulo doble

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pm 1$$

En general, no podemos a priori determinar el signo.

Si $\alpha=45^\circ$, entonces $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}90^\circ=1$.

Si $\alpha=-45^\circ$, entonces $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}(-90^\circ)=-1$.

(b) Pruebe la siguiente fórmula para el coseno del ángulo triple

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Aplicando la fórmula del coseno de la suma,las fórmulas del ángulo doble y la identidad fundamental

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha)\\
&= \cos 2\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha\\
&= \left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\\
&= \cos^3\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha\\
&= \cos^3\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha\\
&= \cos^3\alpha - 3\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha\\
&= \cos^3\alpha + 3\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}$$

- Solución Ejercicio 19: Partimos de la fórmula (1)

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Multiplicando numerador y denominador de la fórmula por $1-\cos\alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\\
&= \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}
\end{aligned}$$

en donde hemos aplicado la identidad fundamental de la trigonometría.

- Solución Ejercicio 20:

Aplicamos la fórmula

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

para $a = \frac{\pi}{4} - \alpha$, $b = \frac{\pi}{4} + \alpha$

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-2\alpha\right)\\
&= 0 + \cos(-2\alpha)\\
&= \cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

en donde en el último paso hemos aplicado la fórmula del ángulo opuesto.

- Solución Ejercicio 21: Aplicando el teorema del coseno se tiene que:

$$\angle ADC = \arc\cos \frac{a^2+c^2-d^2}{2ac} = \arc\cos \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+(\frac{1}{2})^2-\sqrt{2}^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \arc\cos(-0.447) = 2.034 = 116.5°$$

$$\angle DCA = \arc\cos \frac{a^2+d^2-c^2}{2ad} = \arc\cos \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\sqrt{2}^2-(\frac{1}{2})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}} = \arc\cos 0.9487 = 0.3217 = 18.43°$$

$$\angle CAD = \arc\cos \frac{d^2+c^2-a^2}{2dc} = \arc\cos \frac{\sqrt{2}^2+(\frac{1}{2})^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}} = \arc\cos 0.7071 = 0.7854 = 45.00°$$

Asimismo, verifiquemos que se cumple el teorema del seno

$$\frac{d}{\operatorname{sen}\angle ADC} = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle DCA} = \frac{a}{\operatorname{sen}\angle CAD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 2.034} = \frac{\frac{1}{2}}{\operatorname{sen} 0.3217} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\operatorname{sen} 0.7071} \approx 1.58$$

2.2. Soluciones: Números complejos

- Solución Ejercicio 22:

  (a) $z_1 + z_2 = 1 + 4i$

  (b) $z_1 - z_2 = 9 - 10i$

  (c) $z_1 z_2 = 47i + 1$

  (d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5-3i}{-4+7i} = \dfrac{5-3i}{-4+7i}\cdot\dfrac{-4-7i}{-4-7i} = \dfrac{-41-23i}{65} = -\dfrac{41}{65} - \dfrac{23}{65}i$

  (e) $\overline{z_1} z_2 = (5+3i)(-4+7i) = -41+23i$

  (f) $iz_1 - 2\overline{z}_2 = i(5-3i) - 2(-4-7i) = 11+19i$

- Solución Ejercicio 23:

  (a) $z = \dfrac{4+i}{-2+3i} = \dfrac{4+i}{-2+3i}\,\dfrac{-2-3i}{-2-3i} = \dfrac{-5-14i}{13}$;

  $\mathrm{Re}(z) = -5/13$, $\mathrm{Im}(z) = -14/13$

  (b) $\mathrm{Re}(w) = -3$, $\mathrm{Im}(w) = -9$

$$\begin{aligned} w =& 7i^{19} + 2i^{28} - 3i^5 + i - 5 \\ =& 7i^{4\cdot4+3} + 2i^{4\cdot7} - 3i^{4+1} + i - 5 \\ =& 7(-i) + 2 - 3i + i - 5 = -9i - 3 \end{aligned}$$

- Solución Ejercicio 24:

(a) Punto del plano $(2,0)$; $r=\sqrt{2^2+0^2}=2$; FT: $2(\cos 0+i\operatorname{sen} 0)$

(b) $-i^5=-i$; Punto del plano $(0,-1)$; $r=\sqrt{1^2+0^2}=1$;
FT: $\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

(c) Punto del plano $(2,-2\sqrt{3})$; $r=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$;
$\tan\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$; FT: $4(\cos\frac{5\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3})$

(d) Punto del plano $(-\frac{5}{4},\frac{5}{4})$; $r=\sqrt{(-\frac{5}{4})^2+(\frac{5}{4})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$;
$\tan\theta=\frac{5/4}{-5/4}=-1$; FT: $\frac{5\sqrt{2}}{4}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4})$

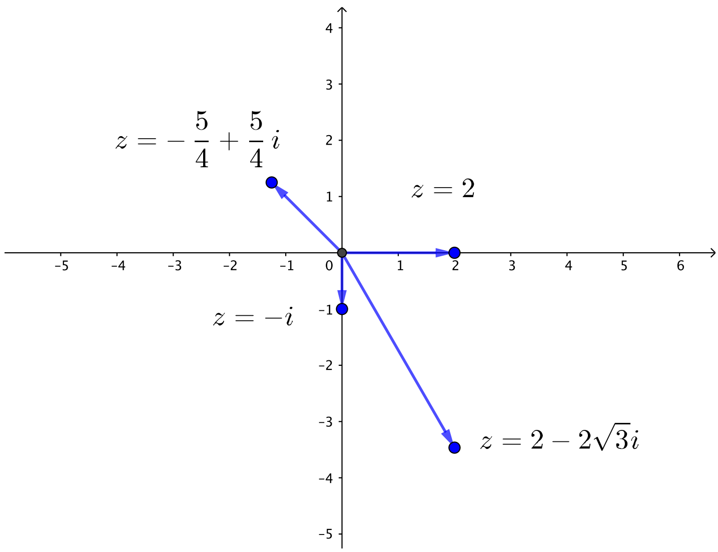

Figura 5: Representación de un triángulo en el plano cartesiano

- Solución Ejercicio 25:

(a) En primer lugar, hallemos $1+i$ en forma trigonométrica:

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2};\tan\theta=\frac{1}{1}=1;\arctan 1=\frac{\pi}{4};$$
$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$$

Usando ahora la fórmula de Moivre tenemos:

$$\begin{aligned}(1+i)^{12} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right)^{12}\\ &=64\left(\cos\left(12\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+i\operatorname{sen}\left(12\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\\ &=64(\cos 3\pi + i\operatorname{sen} 3\pi) = 64(-1+i0) = -64\end{aligned}$$

(b) Observemos que $\frac{2+3i}{4-2i}\frac{4+2i}{4+2i} = \frac{1}{10}+\frac{4}{5}i$. Ahora lo pasamos a forma trigonométrica, teniendo en cuenta que es un punto del primer cuadrante.

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{5}}; \tan\theta=\frac{4/5}{1/10}=8; \arctan 8\approx 1.4464$$

Usando ahora la fórmula de Moivre tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2+3i}{4-2i}\right)^4 &= \left(\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{5}}(\cos(1.4464)+i\operatorname{sen}(1.4464))\right)^4\\ &=\frac{169}{400}(\cos(4(1.4464))+i\operatorname{sen}(4(1.4464)))\\ &=\frac{169}{400}(\cos(5.7857)+i\operatorname{sen}(5.7857))\\ &=0.3712-0.2016i,\end{aligned}$$

donde observemos que hemos aproximado la parte real y la imaginaria.

- Solución Ejercicio 26:
  - (a) $(-3+4i)^{1/2} = \{1+2i, -1-2i\}$
  - (b) $(1+i)^{1/3} = \{\sqrt[6]{2}e^{\pi i/12}, \sqrt[6]{2}e^{3i\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{17i\pi/12}\}$
  - (c)$(-i)^{1/7} = \{e^{-\pi i/14}, e^{3i\pi/14}, i, e^{11i\pi/14}, e^{-13i\pi/14}, e^{-9i\pi/14}, e^{-5i\pi/14}\}$
- Solución Ejercicio 27:
  - (a) $z^2-3iz+3z-9i = z^2+(3-3i)z-9i = (z-3i)(z+3)$. Al ser un polinomio de grado 2 podemos aplicar la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned}z=&\frac{-(3-3i)\pm\sqrt{(3-3i)^2-4(-9i)}}{2}=\frac{-(3-3i)\pm\sqrt{18i}}{2}\\ =&\frac{-(3-3i)\pm(3+3i)}{2} \implies z=3i, \quad z=-3\end{aligned}$$

- (b) $z^3 + (-2+i)z^2 + (10-2i)z + 10i = (z+i)(z-1-3i)(z-1+3i)$
En primer lugar usamos la regla de Ruffini para sacar al menos una raíz, en este caso, $z = -i$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -i & 1 & -2+i & 10-2i & 10i \\ & & -i & 2i & -10i \\ \hline & 1 & -2 & 10 & 0 \end{array}$$

Así, $z^3 + (-2+i)z^2 + (10-2i)z + 10i = (z+i)(z^2 - 2z + 10)$. Ahora aplicamos la fórmula cuadrática para obtener

$$\begin{aligned} z =& \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(10)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ =& \frac{2 \pm 6i}{2} \implies z = 1+3i \quad z = 1-3i \end{aligned}$$

- (c) En este caso, el problema es equivalente a hallar las raíces quintas del número i, ya que $z^5 - i = 0$ es equivalente a resolver $z = i^{1/5}$. En primer lugar, hallemos i en forma exponencial:

$$r = \sqrt{1^2} = 1; \theta = \frac{\pi}{2}; i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Así, las raíces en forma exponencial son:

$$i^{1/5} = (e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)})^{1/5} = \{e^{i\pi/10}, e^{i5\pi/10}, e^{i9\pi/10}, e^{i13\pi/10}, e^{i17\pi/10},\}$$

Observemos que, salvo una de las raíces, el resto tiene parte real e imaginaria irracional,

$$\begin{aligned} e^{i\pi/10} &= \cos(\pi/10) + i \operatorname{sen}(\pi/10) \\ e^{i\pi/2} &= i \\ e^{i9\pi/10} &= \cos(9\pi/10) + i \operatorname{sen}(9\pi/10) \\ e^{i13\pi/10} &= \cos(13\pi/10) + i \operatorname{sen}(13\pi/10) \\ e^{i17\pi/10} &= \cos(17\pi/10) + i \operatorname{sen}(17\pi/10) \end{aligned}$$

Así,

$$z^5 - i = (z - e^{i\pi/10})(z - i)(z - e^{i9\pi/10})(z - e^{i13\pi/10})(z - e^{i17\pi/10})$$

- Solución Ejercicio 28: Denotemos $z = x + iy$.

- (a) $iz = -y + xi$, $\mathrm{Re}(iz) = -y$, $z\overline{z} = x^2 + y^2$ y por tanto $\mathrm{Re}(iz) - z\overline{z} = -y - x^2 - y^2 = 0$. El conjunto de puntos

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 + y = 0\} = \left\{(x, y) : x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

  es una circunferencia centrada en $(0, -1/2)$ y de radio $1/2$.

- (b) $(3 + i)(x + iy) = 3x - y + (3y + x)i$. Así,

$$\{\, (x, y) : \mathrm{Im}((3 + i)z) = 2\} = \{\, (x, y) : 3y + x = 2\},$$

  conjunto que representa una recta en el plano.

- Solución Ejercicio 29: En el razonamiento se ha cometido el siguiente error. Hemos aprendido que la raíz cuadrada de un número complejo distinto de cero (y en particular de un número real) son dos números distintos. En este razonamiento solo se tiene en cuenta una de las raíces y por tanto hay igualdades que resultan ambiguas.

- Solución Ejercicio 30: Partimos de que z_0 es raíz de un polinomio con coeficientes reales $P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^n$, esto es, $P(z_0) = 0$, y queremos probar que entonces $P(\overline{z_0}) = 0$. Para ello vamos a usar estas tres propiedades del conjugado de un número complejo:

$$(1)\, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad (2)\, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \quad (3)\, z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

  Así tenemos que

$$P(\overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{z}^n \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{z^n} \stackrel{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i z^n} \stackrel{(1)}{=} \overline{\sum_{i=1}^{n} a_i z^n} = \overline{0} = 0.$$

  Como consecuencia de este resultado, las raíces complejas siempre van "de dos en dos" y por tanto, si el polinomio tiene grado impar, "la que sobra" tiene que ser por fuerza real. Recordemos que el Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene n soluciones en $\mathbb{C}$ (contando su multiplicidad).

#SOMOS2030
uned.es