AMPLIACIÓN DE CÁLCULO.

Estibalitz Durand Cartagena
Juan Perán Mazón

5 de julio de 2023

MATERIALES PARA REPASAR ANTES DE COMENZAR EL ESTUDIO DE LA ASIGNATURA.

Tema I del libro:

Estibalitz Durand Cartagena; Juan Perán Mazón:*Ampliación de Cálculo*. Editorial UNED. Primera edición. 2023. ISBN edición impresa 978-84-362-7952-8.

ÍNDICE GENERAL

PREFACIO. 11

Plan del libro.. 11

Organización y estructura de los temas. 12

Acerca de la bibliografía.. 13

Cómo utilizar el libro. El curso virtual. 14

Comentario general para el instructor. 15

Tema I. **REPASO, NOTACIONES Y TERMINOLOGÍA.** 17

Introducción. Guión–esquema del tema I. 18

1. Notaciones y conceptos básicos. 20

1.1. Conjuntos. 20

1.2. Orden en un conjunto.. 20

1.3. Conjuntos de números. 21

1.4. Funciones y familias. 23

1.5. Producto cartesiano. 24

1.6. Operaciones con familias. 24

1.7. Sucesiones. 26

1.8. Puntos del infinito. 27

1.9. Límites de sucesiones y de funciones. 28

1.10. Operaciones con los puntos del infinito. 29

2. Repaso y complementos de Cálculo. 30
2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$. 30
2.2. Matrices. 31
2.3. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. 34
2.4. Operaciones con funciones; partes positiva y negativa. 35
2.5. Límites y conceptos topológicos en $\mathbb{R}^n$. 37
2.6. Continuidad. 38
2.7. Derivadas. 41
2.8. Series. Series absolutamente convergentes. 47
2.9. Series de potencias. 51
2.10. Funciones características y funciones escalonadas. 53
3. Repaso de integración en una dimensión. 58
3.1. Integración de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ 58
3.2. Cálculo diferencial integral intuitivo en $\mathbb{R}$. 63
Lecturas y actividades recomendadas para el tema I. 65

ÍNDICE ALFABÉTICO DE TÉRMINOS 67

LISTA DE SÍMBOLOS 73

BIBLIOGRAFÍA 75

PREFACIO.

Debes amar el tiempo de los intentos.
Debes amar la hora que nunca brilla.
Y si no, no pretendas tocar lo yerto.
Solo el amor engendra la maravilla,
solo el amor consigue encender lo muerto.

José Martí (1853–1895)

Plan del libro.

Si está leyendo este prólogo, salvo que se trate de la concesión del *nihil obstat* o algo parecido, será usted, seguramente, estudiante o docente, y ya sabrá cuál es la finalidad de la obra: exponer, con la metodología de la enseñanza a distancia, los contenidos de la asignatura *Ampliación de Cálculo* impartida en el segundo curso de los grados de Ingeniería Industrial de la UNED.

Obviamente, el libro está dirigido a las personas matriculadas en esa asignatura, lo que no significa que estas vayan a ser lectoras de la obra. Nadie *lee* un manual titulado «Ampliación de Cálculo». Si no le queda más remedio, lo *estudia*. Pasar la vista por lo escrito comprendiendo la significación de los caracteres empleados es más que suficiente para entender este prefacio y también las diversas introducciones y esquemas de los temas, pero no basta para asimilar lo expuesto. Para eso, hace falta estudiarlos, luchar con ellos.

No son tan obvios los objetivos docentes. Algunos manuales de matemáticas para estudiantes de ingeniería renuncian al rigor en la exposición y se reducen a un listado de definiciones, teoremas y recetas, con ejemplos de aplicación a ejercicios académicos. Otros, intentan seguir un esquema lógico–deductivo, pero lo hacen de forma incongruente: desplegando un rigor exagerado en las demostraciones de los resultados sencillos y omitiendo las de los más difíciles, precisamente, las de aquellos que más explicación necesitan.

Nosotros nos hemos propuesto un doble, y difícil, compromiso. Por una parte, razonar

todos los resultados que se enuncien, aunque esas justificaciones no alcancen el rigor que permitiría considerarlas demostraciones en otro contexto. Por otra parte, evitar la tentación del rigor presuntuoso:

It seems extremely important that students and instructors should be protected from smug purism.

R. Courant y F. John, en el prefacio de [3].

Organización y estructura de los temas.

La obra completa consta de este manual y de una colección de ejercicios resueltos (en volumen aparte). A su vez, este libro de teoría está dividido en siete temas, tal y como se puede comprobar consultando el índice general del manual:

- Tema I: *Repaso, notaciones y terminología*. Se revisan los conceptos estudiados en cursos anteriores de matemáticas y se fijan las notaciones y la terminología que se empleará. Se incorporan algunos complementos que, aún siendo elementales, no siempre se incluyen en los cursos básicos.
- Tema II. *Complementos de álgebra y geometría*. Se revisan los elementos de álgebra lineal que se van a necesitar y se incorporan algunos nuevos conceptos de álgebra multilineal. Se introduce muy esquemáticamente la geometría de curvas y superficies, así como la noción de variedad.
- Tema III. *Cálculo diferencial vectorial*. Se introducen los campos y las formas diferenciales, así como los operadores gradiente, divergencia y rotacional, con sus propiedades fundamentales.
- Tema IV. *Integración en varias dimensiones*. La noción de integral que el estudiante conoce de primer curso se generaliza en varios sentidos: pasamos de integrar funciones de una variable a integrar funciones de varias variables; extendemos la noción de integral para pasar de la de Riemann a la de Lebesgue; integramos sobre variedades (curvas, superficies, etc.). Concluimos con el resultado más importante del curso: el Teorema Fundamental del Cálculo en variedades, así como los casos particulares clásicos (teoremas de Green, Gauss y Stokes). En este capítulo relajamos al máximo el rigor en la exposición.
- Tema V. *Ejemplos de aplicación de la integral*. La idea intuitiva básica consiste en que *integrar es sumar*, por lo que no es sorprendente que la integral se aplique en

una infinidad de problemas que, en general, consistan en *sumar infinitas cantidades infinitamente pequeñas*: áreas de superficies, longitudes de curvas, volúmenes de cuerpos sólidos, baricentros. El tema concluye con unas aplicaciones menos frecuentes en este nivel: funciones generalizadas y aplicaciones a la probabilidad y a la estadística.

- Tema VI. *Números complejos y funciones complejas*. Como el título indica, se introducen las definiciones básicas sobre el cuerpo de los números complejos y sobre las funciones complejas. Después de extender al campo complejo las nociones básicas estudiadas en el Tema I, muy particularmente, las series de potencias, se presentan las funciones complejas fundamentales: polinomios, fracciones algebraicas, exponenciales, trigonométricas y logarítmicas.
- Tema VII. *Integración en variable compleja*. En este último tema se introducen las ideas generales de la teoría básica de Cauchy sobre la integración de funciones de variable compleja, hasta el teorema de los residuos.

Además de la exposición de contenidos teóricos, las unidades didácticas completas incluyen los siguientes materiales prácticos:

- *Ejemplos*. El libro incluye unos 270 ejemplos completamente desarrollados.
- *Cuestionarios*. La versión digital del libro incluye un apéndice con los enunciados de 47 cuestionarios. Cada cuestionario consta de diferente número de cuestiones breves, que es recomendable abordar justo cuando se indica en el texto (tanto en su versión impresa, como en la digital), antes de continuar el estudio. En los foros del curso virtual se ofrecerán sugerencias, retroalimentación y, por supuesto, los enunciados y las soluciones de esas cuestiones.
- *Ejercicios*. En el curso virtual se encuentra una colección de ejercicios resueltos. La mayoría, por escrito y, varias decenas, en formato de vídeo.

Finalmente, señalemos que, al final de cada tema, se incluye una relación de lecturas y actividades recomendadas, destinadas a los estudiantes que quieran ampliar o aplicar los conocimientos y destrezas adquiridos.

Acerca de la bibliografía.

Los autores de este manual han estudiado a lo largo de su vida decenas de excelentes manuales de introducción al cálculo vectorial y al de variable compleja, pero, al redactar

estas notas, han procurado no consultar ninguno, para evitar reproducirlos inconscientemente. De esta manera, todo lo que, mejor o peor, está aquí expuesto es el resultado del estudio, la reflexión y la docencia de estas disciplinas. No se han tomado de otros autores ni el enfoque general ni enunciados ni demostraciones ni ejercicios.

La sección dedicada a la bibliografía en esta obra recoge dos tipos de entradas:

- Fuentes documentales que, no habiendo sido utilizadas directamente para la elaboración de este manual, han influido especialmente en la formación de los autores. En general, no se consideren adecuadas para estudiantes de este nivel.
- Libros, recursos en línea, etc., útiles para que los estudiantes de esta asignatura profundicen, amplíen o apliquen los conceptos del curso. Estas entradas aparecerán siempre referenciadas en el apartado de *Lecturas y actividades recomendadas* de cada tema.

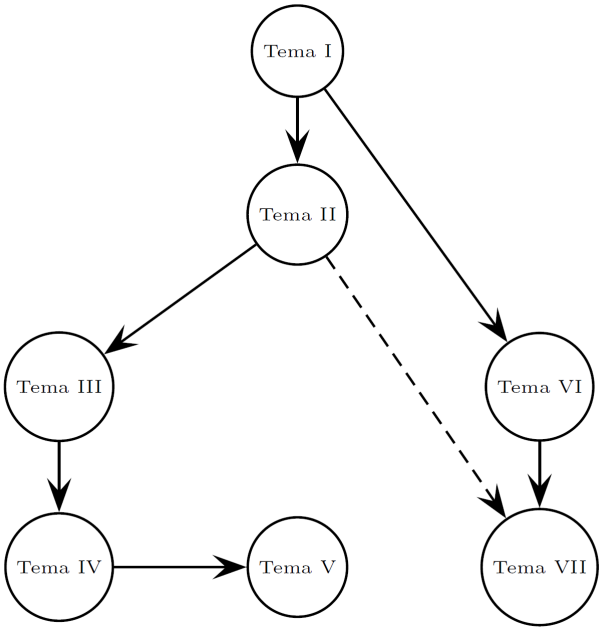
Cómo utilizar el libro. El curso virtual.

Según lo acordado por el Departamento de Matemática Aplicada de la UNED (departamento responsable de la docencia de *Ampliación de Cálculo*), este manual, en su formato digital, se ofrece gratuitamente a los estudiantes en el curso virtual de la asignatura. De hecho, el libro digital es una parte de ese curso virtual de la asignatura, por lo que debe utilizarse en coordinación con el resto de sus herramientas, principalmente:

- La guía didáctica. Especialmente, para conocer los procedimientos de evaluación.
- Los foros de debate. Herramienta de aprendizaje imprescindible, tanto para la participación pasiva (lectura de las preguntas de los compañeros y de las correspondientes respuestas del equipo docente), como para la participación activa (planteamiento de dudas, solicitud de explicaciones complementarias, etc.). Como regla general, podemos establecer que, si tras estudiar un tema no necesitamos preguntar nada, es porque hemos entendido muy poco de lo expuesto.
- Ejercicios resueltos en formato de videoclase, particularmente, los planteados en las pruebas presenciales de los años anteriores.
- El curso incorpora una cantidad tan grande de ejercicios, que no se espera que cada estudiante resuelva todos por sí mismo. Muchos ejercicios exploran un mismo concepto, por lo que, una vez comprendido este, se debe pasar a otro tipo de problemas.

- Solucionario de los ejercicios, con las respuestas completamente desarrolladas por escrito. Así mismo, se incorporan indicaciones, retroalimentación y respuestas a los cuestionarios de este manual.
- Pruebas de evaluación continua.

El siguiente esquema ilustra la dependencia que existe entre los diversos temas:



El trazo continuo indica que es necesario estudiar el tema de salida de la flecha antes de estudiar el de llegada. El trazo discontinuo indica que es recomendable.

Comentario general para el instructor.

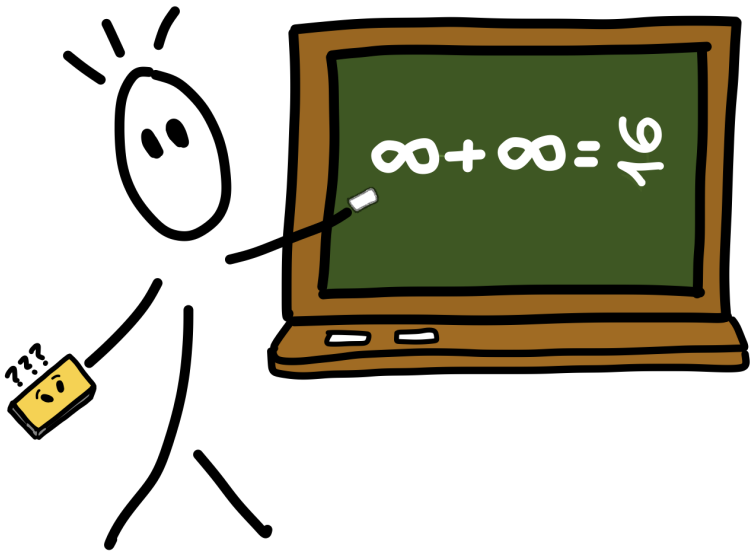
Algunas partes del libro del libro están redactadas de manera que es posible una doble lectura: la del estudiante y la del instructor (profesor de la sede central o profesor–tutor).

El estudiante verá unas definiciones concisas y de apariencia simple (redactadas en lenguaje casi natural, con muy pocos símbolos matemáticos); podrá captar la idea básica del concepto, aunque sin afinar el rigor.

El instructor, por su parte, puede verse desconcertado, pues, en ocasiones, no es evidente la correspondencia entre esas formulaciones simples y las definiciones habituales o canónicas (circunstancia que difícilmente desconcertará al estudiante, pues probablemente no está familiarizado con las formulaciones canónicas). Para facilitar al instructor la consulta del texto, se intercalan algunas notas de «material opcional» (dirigidas al profesor, pero comprensibles para algunos estudiantes) y otras directamente dirigidas al instructor (que no están al alcance de los estudiantes de este nivel).

TEMA I

REPASO, NOTACIONES Y TERMINOLOGÍA.



Introducción. Guión–esquema del tema I.

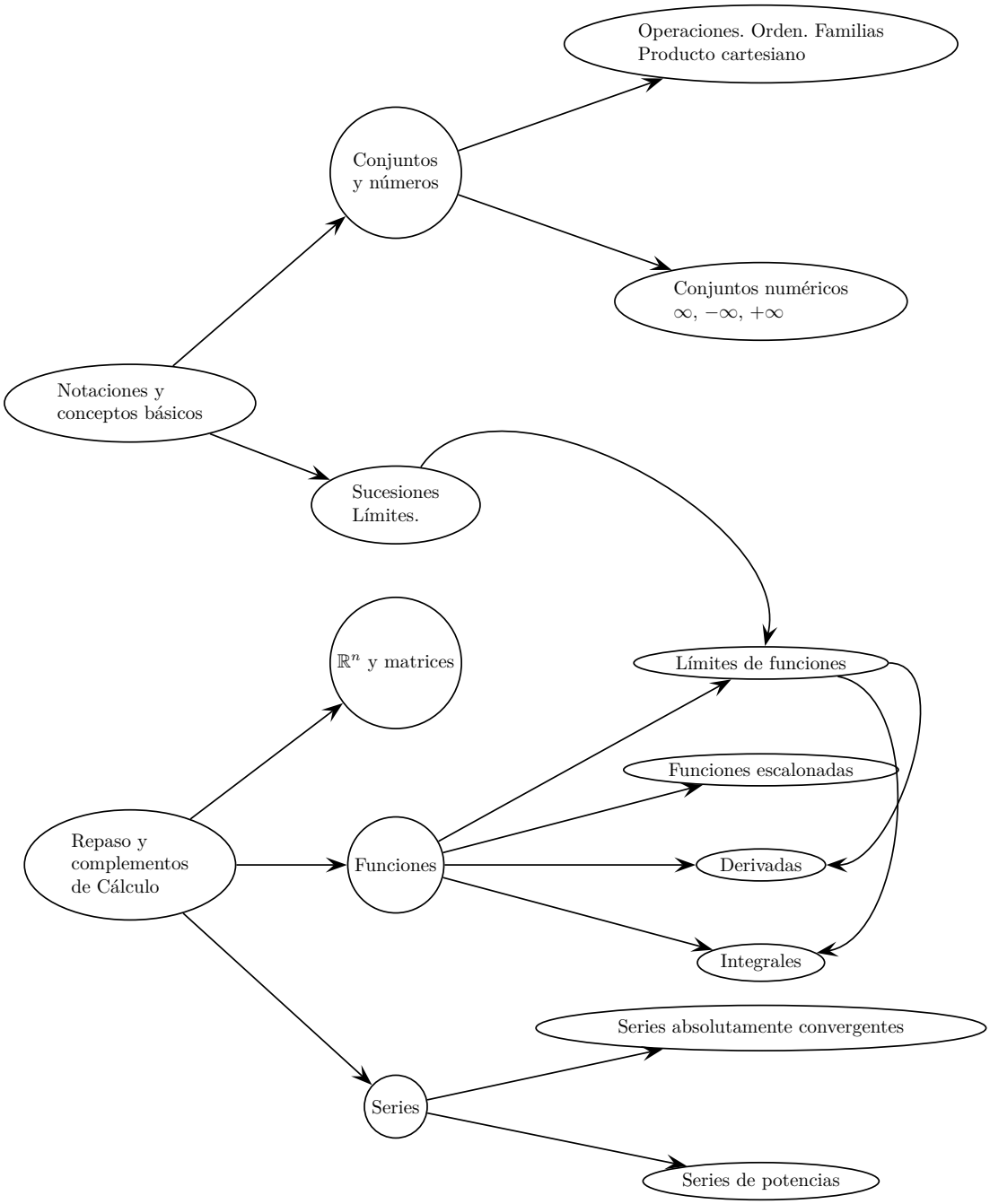
Este primer tema consta de dos bloques. En el primero, se revisan las notaciones y los conceptos básicos de las matemáticas, con el fin, no solo de ayudar al estudiante a recordar esas nociones, sino con el ánimo de fijar una notación y una terminología, que puede variar de uno a otro manual. El segundo bloque presenta un revisión del los conceptos elementales del cálculo infinitesimal estudiados en cursos anteriores (funciones, límites, derivadas, integrales, series, etc.)

En sentido estricto, los contenidos de este primer tema son anteriores a los correspondientes a *Ampliación de Cálculo*, pero, aunque el tiempo que lleve estudiarlo no debería incluirse en las 150 horas que se deben dedicar a la asignatura, es muy recomendable estudiar el Tema 1 antes de seguir con el resto de los temas.

Objetivos del Tema I.

- Que el estudiante revise los conceptos matemáticos más elementales.
- Que el estudiante interiorice las notaciones y la terminología que se van a utilizar en el resto del libro.
- Promover la reflexión sobre los conceptos de cálculo infinitesimal estudiados en años anteriores, para que, contemplándolos a cierta distancia, sin preocuparse de las demostraciones detalladas, se llegue a asimilar su sentido profundo.
- Introducir unos cuantos conceptos muy básicos que no siempre se incluyen en los cursos elementales (por ejemplo, las funciones escalonadas).

Guión – esquema del Tema I. Palabras clave.



1. NOTACIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS.

1.1. Conjuntos.

La expresión $b \in A$, significa que b pertenece a A, es decir, que b es un elemento de A. El símbolo tachado, $\notin$, significa «no pertenece». Este criterio de «tachar para negar» se extiende al resto de los símbolos que veremos para denotar relaciones. No hay que complicarse la vida intentando definir qué es un conjunto y qué es un elemento. Más bien, hay que pensar que la relación de pertenencia, «$\in$», es el concepto básico. El conjunto que no tiene elementos se llama *conjunto vacío*, $\emptyset$. Solo hay un conjunto vacío.

Las *llaves*, $\{\dots\}$, determinan conjuntos. Los elementos se pueden enumerar o determinar por una condición. En el segundo caso, hay que referir la condición a un conjunto prefijado.

Ejemplo 1. ▪ $b \in \{a, b\}$, $a \in \{a\}$, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

- $\{x \in \{a, b, u\} : x \text{ está denotado por una vocal}\} = \{a, u\}$
- $A = \{B : B \text{ tiene más de un elemento}\}$ no está bien formado, porque no se fija el conjunto al que se refiere la condición. ■

Se dice que A es un *subconjunto* de B, escrito como $A \subset B$, o también, como $A \subseteq B$, si todos los elementos de A son elementos de B. Cuando se fija mentalmente un conjunto, se suelen emplear las letras mayúsculas para denotarlo a él y a sus subconjuntos, mientras que las minúsculas se emplean para los elementos de ese conjunto fijado.

Ejemplo 2. $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$, $\{a\} \subset \{a, b\}, a \in \{a, b\}$, $\emptyset \subset A$, $A \subset A$ ■.

1.2. Orden en un conjunto.

El símbolo «$<$» se lee «menor que» o «estrictamente menor que», concepto que se caracteriza por dos propiedades básicas: i) ningún elemento es estrictamente menor que sí mismo, ii) si un elemento es menor que otro y éste es menor que un tercero, entonces el primero es menor que el tercero.

Decimos que un orden es *total* en el conjunto dado, cuando cualesquiera dos de sus elementos están relacionados (uno es menor que el otro); en otro caso, se dice que el orden es *parcial*. En estas notas, al hablar de orden, nos referiremos a un orden total, salvo que se indique lo contrario.

El símbolo «$\leq$» se lee «menor o igual que», y significa precisamente eso.

Ejemplos: Las palabras están totalmente ordenadas alfabéticamente. La relación «ser descendiente de» es de orden parcial entre las personas de un país.

1.3. Conjuntos de números.

LOS NÚMEROS NATURALES, $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3 \ldots$

- Sumar; multiplicar; orden ($0 < 1 < 2 < 3 \ldots$).
- La resta y la división son operaciones parciales: Solo se puede restar o dividir dos naturales para obtener otro natural en ciertos casos. Ejemplo: $3 - 4$ no es un número natural.
- Un conjunto A es *infinito* si tiene infinitos elementos, es decir, si a cada número natural se le puede asignar un elemento diferente de A. Los conjuntos que no son infinitos se denominan *finitos*.
- Un conjunto es *numerable* si a cada uno de sus elementos se le puede asignar un número natural diferente, es decir, si se pueden enumerar sus elementos. Obviamente, $\mathbb{N}$ es infinito numerable. A veces, se reserva la palabra *numerable* para los *infinitos numerables*.

LOS NÚMEROS ENTEROS, $\mathbb{Z}$: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$

- Sumar; *restar*; multiplicar; orden ($\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 \ldots$).
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. La división de enteros es solo una operación parcial. Por ejemplo, $3/2$ no es un número entero.
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto numerable (aunque los enteros se enumeran en un orden diferente del suyo: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$).

LOS NÚMEROS RACIONALES, $\mathbb{Q}$. Los que se pueden expresar como el cociente de dos enteros, p/q, con $q \neq 0$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

- Sumar; restar; multiplicar; *dividir*; orden (*cuerpo ordenado*). Es *cuerpo*, porque dentro de él se puede sumar, restar, multiplicar y dividir, salvo entre 0, con las propiedades que conocemos; es *cuerpo ordenado* porque, además, tiene un orden total compatible con sus operaciones ($a + c \leq b + c$ siempre que $a \leq b$; $ab \geq 0$, siempre que $a \geq 0, b \geq 0$).

- $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable (aunque los racionales se enumeran en un orden diferente del suyo).
- En forma decimal, los números racionales son los que se expresan mediante un desarrollo periódico (puro o mixto). Ejemplos:
  $-\frac{1}{3} = -0.\widehat{3},\ \frac{64}{30} = 2.1\widehat{3},\ 5 = 5.\widehat{0} = 4.\widehat{9},\ \ \frac{34}{99} = 0.\widehat{34} = 0.3\widehat{43},\ \frac{5}{2} = 2.5 = 2.5\widehat{0}.$

LOS NÚMEROS REALES, $\mathbb{R}$: corresponden a todos los posibles desarrollos decimales, es decir, tienen un número entero como parte entera y cualquier secuencia de los dígitos $0, \ldots, 9$ como parte decimal. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se visualiza como una recta; de hecho, se le suele denominar *recta real* y a los números reales, *puntos* de la recta. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Sumar; restar; multiplicar; *dividir*; orden (*cuerpo ordenado*).
- Se suele denotar: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.
- Los números reales que no son racionales se llaman *irracionales*.

  Ejemplo de número irracional (cualquiera cuyo desarrollo decimal no tenga parte periódica): $1.01001000100001000001\cdots$
- $\mathbb{R}$ *no* es un conjunto numerable.
- *Intervalo cerrado*: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. *Intervalo abierto*: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. También se puede poner $]a, b[$ para el intervalo abierto, pero se emplea poco. Se definen de manera evidente los intervalos abiertos por un extremo y cerrados por el otro $]a, b] = (a, b], [a, b[= [a, b)$.
- *Aproximación de números reales:* Cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ contiene infinitos irracionales e infinitos racionales.
- *Supremo e ínfimo*: Un elemento c de un conjunto ordenado E es una *cota superior* de un subconjunto $A \subset E$ si $c \geq a$ para todo $a \in A$. Decimos que $d \in E$ es una *cota inferior* de $A \subset E$ si $d \leq a$ para todo $a \in A$. La menor de las cotas superiores de A se denomina *supremo* de A y se denota por $\sup A$. La mayor de las cotas inferiores de A se denomina *ínfimo* de A y se denota por $\inf A$.
- Completitud del orden de $\mathbb{R}$: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga cota superior, tiene supremo; todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga cota inferior, tiene ínfimo.

  Observemos que $\mathbb{Q}$ no es completo (ésta, junto con la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, son las principales diferencias entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$).

Ejemplo 3. El conjunto $A = \{1, 1.01, 1.01001, 1.010010001, \dots\}$, que está formado por infinitos racionales, tiene cotas superiores (por ejemplo, 2), pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. El supremo de A en $\mathbb{R}$ es el irracional $\sup A = 1.01001000100001\dots$

Si se quiere ser más riguroso, el conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ se puede definir por inducción: $a_1 = 1, a_k = a_{k-1} + 10^{1-\frac{k(k+1)}{2}}$, para $k > 1$. ■

1.4. Funciones y familias.

Una *función* o *aplicación* $f\colon X \rightarrowtail Y$ es una regla que asigna a cada elemento de su *dominio*, que es un cierto subconjunto $\operatorname{dom} f$ del conjunto inicial X, un solo elemento del conjunto final Y (si permitimos que asigne más de uno, la denominamos *multifunción*). Cuando escribamos $f\colon X \to Y$, en vez de $f\colon X \rightarrowtail Y$, queremos señalar que el dominio de f es todo X, o sea, $\operatorname{dom} f = X$. La *imagen* de un subconjunto $A \subset X$ mediante una función $f\colon X \rightarrowtail Y$ es el subconjunto de Y dado por $f(A) = \{y \in Y : y = f(x), \text{ para algún } x \in A \cap \operatorname{dom} f\}$. La imagen, $f(X)$, del dominio de f se denomina *recorrido* de f.

Recíprocamente, la *imagen inversa* de un subconjunto $B \subset Y$ es el subconjunto de X dado por $f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f\colon f(x) \in B\}$. Observemos que, en general, f^{-1} *no* es una función de $Y \rightarrowtail X$ (es una multifunción); cuando $f^{-1}\colon Y \rightarrowtail X$ es una función, decimos f es *inyectiva*. Si, además, $f(X) = Y$, entonces se dice que f es *biyectiva*, en cuyo caso, obviamente $f^{-1}\colon Y \to X$ también es biyectiva.

Cuando no se indica explícitamente el dominio, se entiende que es el mayor subconjunto del conjunto inicial para el que la expresión tiene sentido.

Cuando no se considera en el conjunto inicial I de una función $f\colon I \to X$ ninguna estructura, las funciones se suelen denominar *familias* y, en lugar de escribir $a(j)$, se suele poner a_j para $j \in I$. El concepto de familia es similar al de conjunto, salvo que los elementos de la familia están indexados (etiquetados, podríamos decir) respecto del conjunto de índices I. Si $(a_j)_{j\in I}$ es una familia de elementos de un cierto conjunto A, con índices en el conjunto I y $J \subset I$, entonces $(a_j)_{j\in J}$ es una *subfamilia* de $(a_j)_{j\in I}$.

Ejemplo 4. Si A_x es el conjunto de las personas que miden más de x centímetros, entonces $(A_x)_{x\in\mathbb{R}}$ es una familia de conjuntos de personas y $(A_x)_{x\in\mathbb{N}}$ es una subfamilia de la anterior. ■

- Cuando el conjunto de índices es $I = \{1, 2\}$, la familia se denomina par ordenado y se denota por (a_1, a_2). Desgraciadamente la notación coincide con la del intervalo abierto;

se distingue por el contexto. Observe la diferencia entre *conjunto de dos elementos* y *par ordenado*: mientras que $\{a, b\} = \{b, a\}$, tenemos $(a, b) \neq (b, a)$, siempre que $a \neq b$. Además, $\{a, a\} = \{a\}$, mientras que $(a, a) \neq \{a\}$.

- De forma más general, cuando el conjunto de índices es $I = \{1, 2 \ldots, n\}$, la familia se denomina *n-tupla ordenada*: por ejemplo (a_1, a_2, a_3), es una *terna ordenada*, (a_1, a_2, a_3, a_4) es una *cuaterna ordenada*, etc.

1.5. Producto cartesiano.

El conjunto cuyos elementos son los pares ordenados (a_1, a_2) con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ es el producto cartesiano $A_1 \times A_2$. El producto cartesiano de un conjunto por sí mismo se denota por $A^2 = A \times A$. Análogamente, con más factores, así $A_1 \times A_2 \times A_3$ es el conjunto formado por las ternas de la forma (a_1, a_2, a_3) con $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3$ o, con n factores, $A^n = A \times \cdots \times A$, es el conjunto formado por las n-túplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Una n–tupla no es más que una ristra de n números.

Ejemplo 5.

- $\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$.
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $[1, 5] \times [-2, 7) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 5, -2 \leq y < 7\}$.
- $[1, 5]^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5, 1 \leq z \leq 5\}$. ■

1.6. Operaciones con familias.

Las operaciones (ya sean de conjuntos o de números), definidas inicialmente para dos objetos, frecuentemente se pueden extender a familias mayores:

- UNIÓN de una familia de conjuntos, $\cup_{i \in I} A_i$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos A_i. Por supuesto, cuando se unen dos conjuntos se pone $A \cup B$, si son tres $A \cup B \cup C$, etc.

- INTERSECCIÓN de una familia de conjuntos, $\cap_{i \in I} A_i$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a todos los conjuntos A_i. La intersección de dos conjuntos se denota por $A \cap B$, la de tres por $A \cap B \cap C$, etc.

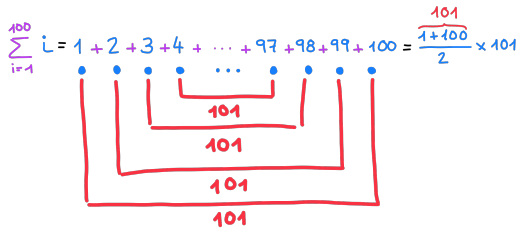


Figura 1. Suma de los términos de un progresión aritmética.

- COMPLEMENTARIO RELATIVO de B EN A, denotado $A \setminus B$: es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. Cuando el conjunto A se da por sobreentendido y $B \subset A$, se puede escribir B^c en vez de $A \setminus B$.

  Cuando $A, B \subset \mathbb{R}$, se suele denotar por $A - B$ al conjunto $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$, ¡no se debe confundir con $A \setminus B$!

  Por ejemplo: $\{1, 2, 5\} \setminus \{1, 2\} = \{5\}$, mientras que $\{1, 2, 5\} - \{1, 2\} = \{0, -1, 1, 4, 3\}$.

La suma de los elementos de una familia de números, con un conjunto de índices I finito, se denota por $\sum_{i \in I} a_i$. En particular, si $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, la suma se escribe como $\sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + \cdots + a_m$. Para el producto: $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_n = a_1 a_2 \cdots a_m$.

Ejemplo 6. Veamos algunas expresiones con sumatorios que debemos conocer:

- Si $a_j = a_0 + kj$, entonces $\sum_{j=j_0}^{j_1} a_j = \frac{a_{j_0} + a_{j_1}}{2}(j_1 - j_0 + 1)$.

  Suma progresión aritmética: $\dfrac{\text{El primero más el último}}{\text{dos}} \times n^o$ de sumandos

- Si $b_j = b_0 r^j$, con $r \neq 1$, entonces $\sum_{j=j_0}^{j_1} b_j = \frac{b_{j_0} - b_{j_1+1}}{1-r}$.

  Suma progresión geométrica: $\dfrac{\text{El primero menos el siguiente del último}}{\text{uno menos la razón}}$

- $m! = \prod_{j=1}^{m} j$, *factorial* de $m \in \mathbb{N}$. También se define $0! = 1$.

- $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!} = \dfrac{\prod_{j=m-k+1}^{m} j}{k!}$. *Número combinatorio*.

- $(a+b)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$. *Binomio de Newton*. ■

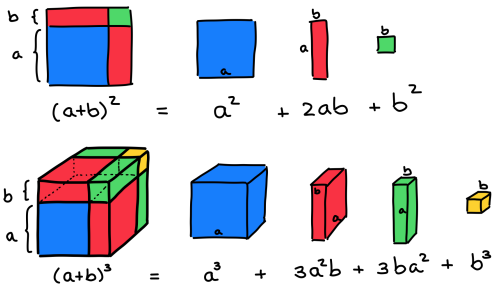


Figura 2. Interpretación geométrica del binomio de Newton para $a, b > 0$, $n = 2, 3$.

1.7. Sucesiones.

Una *sucesión* en un conjunto X, o sucesión de puntos de X, es un tipo particular de función, $b : \mathbb{N} \rightarrowtail X$, con dominio infinito. Aquí X puede ser cualquier conjunto: si $X = \mathbb{R}$, tendremos una sucesión de números reales, si $X = \mathbb{R}^3$, tendremos una sucesión de puntos del espacio, si X está formado por rectas, tendremos una sucesión de rectas, etc.

Se suele emplear la letra n para denotar al índice o variable de una sucesión, pero nosotros procuraremos evitarlo cuando pueda crear confusión, porque la letra n se suele reservar para la dimensión del espacio ambiente.

Para referirnos a las sucesiones, podemos emplear la notación típica de las funciones, por ejemplo, $b(k) = 3k + 1$ o la notación de subíndice o superíndice, por ejemplo $b_k = 3k + 1$, o $b^k = 3k + 1$ (esta última la emplearemos poco, porque se puede confundir con una potencia, pero en otras asignaturas será frecuente). Sea trata de la misma sucesión en los tres casos. Hay que acostumbrarse a las tres notaciones, incluso combinadas en una sola expresión. Como el resto de las funciones, lo más correcto es denotar a las sucesiones con una letra, aunque muy frecuentemente, como también ocurre con las funciones, se hace referencia a la variable. Por ejemplo, se debería poner «la sucesión b», «la función f», pero se admite «la sucesión b_k», «la función $f(x)$».

La restricción de una sucesión $b : \mathbb{N} \rightarrowtail X$ a un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ se denomina *subsucesión* de b. Por ejemplo, si $b : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión y denotamos por $P \subset \mathbb{N}$ al subconjunto de los números pares, entonces $b|_P$ es la subsucesión de b formada por los términos de índice par. Normalmente, relajando un poco la notación, se pone «la sucesión b_k», «la subsucesión b_{2k}».

Una sucesión $(b_j)_{j \in I}$ de un conjunto ordenado es *creciente* si $b_j \leq b_{j+1}$ para todo $j \in I$. Análogamente, $(b_j)_{j \in I}$ es *decreciente*, si $b_j \geq b_{j+1}$ para todo $j \in I$. Las sucesiones

crecientes y las decrecientes se denominan genéricamente *monótonas*.

Una propiedad muy importante de las sucesiones de un conjunto ordenado es que de cualquiera de ellas se puede extraer un subsucesión monótona.

1.8. Puntos del infinito.

Se trata de dos nuevos puntos que se *añaden* a la recta real $\mathbb{R}$, de forma que $\inf \mathbb{R} = -\infty$ y $\sup \mathbb{R} = +\infty$. La recta extendida así obtenida se denota por $[-\infty, +\infty]$ y se puede visualizar como un intervalo cerrado. Cuando esos dos puntos se identifican como uno solo, ese nuevo punto se denota por ∞. La recta real extendida por un solo punto ($\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) se visualiza como una circunferencia, que se denota por $\overline{\mathbb{R}}$ (figura 3).

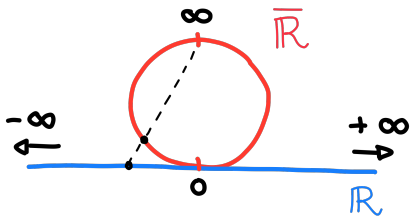


Figura 3. La recta ampliada por dos puntos, $[-\infty, +\infty]$, y la recta ampliada por un punto, $\overline{\mathbb{R}}$.

Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene supremo e ínfimo en $[-\infty, +\infty]$. Observemos que el ínfimo del conjunto vacío en $[-\infty, +\infty]$ es $\inf \emptyset = +\infty$, pues todos los elementos son cotas inferiores del vacío. Así mismo, $\sup \emptyset = -\infty$. En la recta extendida por dos puntos, es decir, en $[-\infty, +\infty]$, se pueden considerar intervalos con extremos $-\infty$ o $+\infty$. Por ejemplo $(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. Este tipo de intervalo se denomina *semirrecta* o *intervalo no acotado*. En lo que sigue, salvo que se especifique otra cosa, el término «intervalo», a secas, se reservará para los *intervalos acotados*, es decir, para aquellos cuyos extremos sean números reales.

Cuando no hay confusión posible, frecuentemente se pone ∞, en vez de $+\infty$, para relajar la notación.

1.9. Límites de sucesiones y de funciones.

Definir una *noción de límite* en un conjunto X consiste en elegir un conjunto de sucesiones de X (que se denominarán *convergentes* en X para esa noción de límite) y asignar a cada una de ellas un elemento de X (su *límite*), de manera que toda subsucesión de una sucesión convergente en X tenga el mismo límite que esta.

Para expresar que el límite de una sucesión, $(a_m)_{m\in I}$, de puntos de X es $L \in X$, o lo que es igual, que $(a_m)_{m\in I}$ *tiende* a L o que $(a_m)_{m\in I}$ *converge a* L *en* X, se escribe indistintamente $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = L$, $\lim a_m = L$ o, incluso, $a_m \to L$.

Si tenemos sendas nociones de límite en los conjuntos X e Y, una función $f\colon X \rightarrowtail Y$ y un conjunto $M \subset \operatorname{dom} f$, decimos que $\lim\limits_{x\in M, x\to x_0} f(x) = L$ cuando $\lim\limits_{m\to\infty} f(b_m) = L$, para toda sucesión $b : \mathbb{N} \rightarrowtail M \setminus \{x_0\}$ con límite x_0.

Si no existen sucesiones b como la de arriba, ni se plantea la existencia del límite. Cuando $M = \operatorname{dom} f$, no se escribe, se sobrentiende.

Si $x_0 \in \operatorname{dom} f$ y $\lim\limits_{x\in M, x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, decimos que f es *continua* en x_0.

Nota 1. Comentario para el instructor. Una noción de límite define una topología en X, en la que los cerrados son los conjuntos que contienen a los límites de todas las sucesiones convergentes de su sus puntos. Cuando nuestra noción de límite coincide con la correspondiente a esa topología, decimos que se trata de una noción de límite *topológica*. En este caso, nuestras definiciones de límite y de continuidad coinciden con las habituales, para los espacios métricos y sus cocientes (espacios topológicos secuenciales). ■

Consideramos en $X = [-\infty, +\infty]$ (y, por lo tanto, también en $\overline{\mathbb{R}}$) la siguiente noción de limite: una sucesión tiene límite si y solo si los supremos de todas sus subsucesiones crecientes coinciden con los ínfimos de todas sus subsucesiones decrecientes; ese valor común es el límite de la sucesión.

Esta noción de límite en $X = [-\infty, +\infty]$, que coincide con la estudiada en cursos anteriores, se puede expresar, de manera equivalente, desdoblándola en dos partes:

- Las sucesiones crecientes tienden a su supremo y las decrecientes, a su ínfimo.
- Una sucesión tiende a L si y solo si todas sus sucesiones monótonas tienden a L.

Los procedimientos para calcular límites de sucesiones y de funciones manualmente no tienen demasiado interés, pero *comprender* el concepto de límite es esencial para asimilar multitud de conceptos matemáticos y científico-tecnológicos.

Ejemplo 7. Estudiemos si existe el límite de la sucesión de números reales $a_k = (-1)^k$ es convergente. Si lo fuera, el límite de la subsucesión creciente $a_{2k} = 1$ sería $\sup_k a_{2k} = 1$. Pero ese límite tendría que coincidir con el de la subsucesión decreciente $a_{2k+1} = -1$, que es $\inf_k a_{2k+1} = -1$. Como $1 \neq -1$, la sucesión $a_k = (-1)^k$ no tiene límite (no es convergente en $\mathbb{R}$ ni en $\overline{\mathbb{R}}$ ni en $[-\infty, +\infty]$). ■

Ejemplo 8. La sucesión $a_k = k$ es creciente, luego su límite coincide con su supremo $\lim_{k\to\infty} a_k = \sup_k a_k = +\infty$. Es una sucesión convergente en $[-\infty, +\infty]$ (y también en $\overline{\mathbb{R}}$), pero no es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, porque $+\infty \notin \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 9. La sucesión $a_k = (-k)^k$ no es creciente ni decreciente. Sin embargo, la subsucesión (a_{2k}) es creciente, por lo que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} (-2k)^{2k} = \sup_{k\in\mathbb{N}} (2k)^{2k} = +\infty,$$

mientras que (a_{2k+1}) es decreciente, con lo que,

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \sup_{k\in\mathbb{N}} (-2k-1)^{2k+1} = \sup_{k\in\mathbb{N}} -(2k+1)^{2k+1} = -\infty.$$

Por lo tanto, la sucesión (a_k) no tiene límite ni en $\mathbb{R}$ ni en $[-\infty, +\infty]$.

No obstante, observemos que toda subsucesión creciente de (a_k) tiene supremo $+\infty$ y que toda subsucesión decreciente de (a_k) tiene ínfimo $-\infty$. Por lo tanto, el límite de (a_k) en $\overline{\mathbb{R}}$ es ∞. Por eso, es correcto poner $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ o, lo que es igual, $a_k \to \infty$. ■

1.10. Operaciones con los puntos del infinito.

Los puntos del infinito, $-\infty$, $+\infty$, ∞ no son números reales, pero se les pueden aplicar ciertas operaciones propias de los reales. Si «$*$» representa un operación con reales y a, b son puntos reales o de infinito, el criterio para decidir si $a * b$ está definido y cuál es su valor, es el siguiente: $a * b = \lim a_m * b_m$ si el límite es siempre el mismo para todas las sucesiones a_m y b_m que cumplan $a_m \to a, b_m \to b$.

Nota 2. Comentario para el instructor. Para operar con $+\infty$, $-\infty$, las operaciones de $\mathbb{R}$ se extienden a $X = [-\infty, +\infty]$ manteniendo la continuidad de $X \times X \to X$. Para operar con ∞, las operaciones de $\mathbb{R}$ se extienden a $\overline{\mathbb{R}}$ manteniendo, también, la continuidad de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$. ■

Ejemplo 10.

- $a+\infty=\infty,\ a+(+\infty)=+\infty,\ a+(-\infty)=-\infty$, para todo $a\in\mathbb{R}$.
- $0\cdot\infty$ no está definida. Por ejemplo: $a_m=1/m^2\to 0, b_m=m^2\to\infty, a_m b_m=1\to 1$, pero $a_m=2/m^2\to 0, b_m=m^2\to\infty, a_m b_m=2\to 2$.
- $\dfrac{1}{\infty}=0,\ \dfrac{1}{0}=\infty$, pero $\dfrac{1}{0}$ no estaría definida en $[-\infty,+\infty]$.
- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, pero $\infty+\infty$ no está definida.
- $2^{+\infty}=+\infty,\quad 2^{-\infty}=0$, pero 2^{∞} no está definida.
- $\dfrac{\infty}{\infty},\quad \dfrac{0}{0}$ no están definidas. ■

CONTESTE AHORA AL CUESTIONARIO 1.

2. REPASO Y COMPLEMENTOS DE CÁLCULO.

2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$.

El producto cartesiano de n factores iguales a $\mathbb{R}$ se denota por $\mathbb{R}^n$, es decir: $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de pares ordenados de números reales, (x_1,x_2), (que se puede visualizar como un plano, en el que cada par representa las coordenadas de un punto); $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de ternas ordenadas de números reales (x_1,x_2,x_3) (que se puede visualizar como el espacio tridimensional); y, en general, $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de *n–tuplas* ordenadas de números reales $(x_1,x_2\ldots,x_n)$. ¡No hay ninguna necesidad de *visualizar* $\mathbb{R}^n$! La interpretación espacial de los espacios de coordenadas tiene su importancia histórica, pero en la mayor parte de las aplicaciones de los espacios $\mathbb{R}^n$, no se da esa identificación: una n–tupla es simplemente una ristra de n objetos, números, en este caso.

Al símbolo $\mathbb{R}^n$ se refiere a algo más que al producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$: igual que el símbolo $\mathbb{R}$ lleva implícito sus operaciones, también el símbolo $\mathbb{R}^n$ incluye las suyas: si $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$, $\alpha x=(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$ (se opera componente a componente).

No vamos a definir los conceptos de *punto* y *vector*: para nosotros, puntos y vectores no son más que que interpretaciones de los elementos del espacio de coordenadas $\mathbb{R}^n$, que son simplemente n–tuplas. Pensamos en puntos como posiciones en el espacio y pensamos en vectores como direcciones. Podremos utilizar la tipografía negrita para las n-tuplas que nos interese considerar, más como vectores, que como puntos, pero es ridículo convertir

las negritas (o las flechitas) en fetiches. Por otra parte, el empleo de tipografía negrita resulta útil para evitar confusiones entre las componentes de una n-tupla, denotadas con subíndices, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, y una familia de n–tuplas $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k \in \mathbb{R}^n$. Siguiendo este criterio, escribimos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n.$$

La familia $(\mathbf{e}_j)_{j=1,\ldots,n}$ se denomina *base canónica* de $\mathbb{R}^n$. Cuando $n = 2$ o $n = 3$, a veces se pone $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2, \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$, notación inspirada en los cuaterniones. Independientemente de que empleemos o no tipografía negrita, denotaremos

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n.$$

La x que no lleva subíndices puede ir o no ir en negrita (no cambia el significado), pero las componentes $x_j \in \mathbb{R}$ nunca irán en negrita.

En ocasiones, conviene considerar a $\mathbb{R}^n$ como un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$. Con este fin, *fijamos* una inclusión $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mediante la identificación $(x_1, \ldots, x_n) \approx (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Se fija *esa* identificación y no cualquiera otra de las posibles. Observemos que se trata del criterio que se ha seguido implícitamente con la notación de las $\mathbf{e}_j$. Por ejemplo, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$, y también $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ en $\mathbb{R}^3$.

El producto cartesiano de dos intervalos unidimensionales, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, se denomina *intervalo bidimensional*. No todos los rectángulos de $\mathbb{R}^2$ son intervalos bidimensionales (figura 4). Se denomina *intervalo n-dimensional* o *intervalo de* $\mathbb{R}^n$ al producto cartesiano de n intervalos unidimensionales,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}. \quad (1)$$

De manera análoga, se definen los *intervalos n dimensionales abiertos* $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ y *semiabiertos* $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$.

2.2. Matrices.

Una familia cuyo conjunto de índices está formado por pares ordenados se denomina *matriz*. La matriz $A = (a_{ij})$, en donde $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ se suele representar como una tabla (en este manual se escribe entre corchetes) y diremos que tiene n filas y m columnas, o que es de orden $n \times m$:

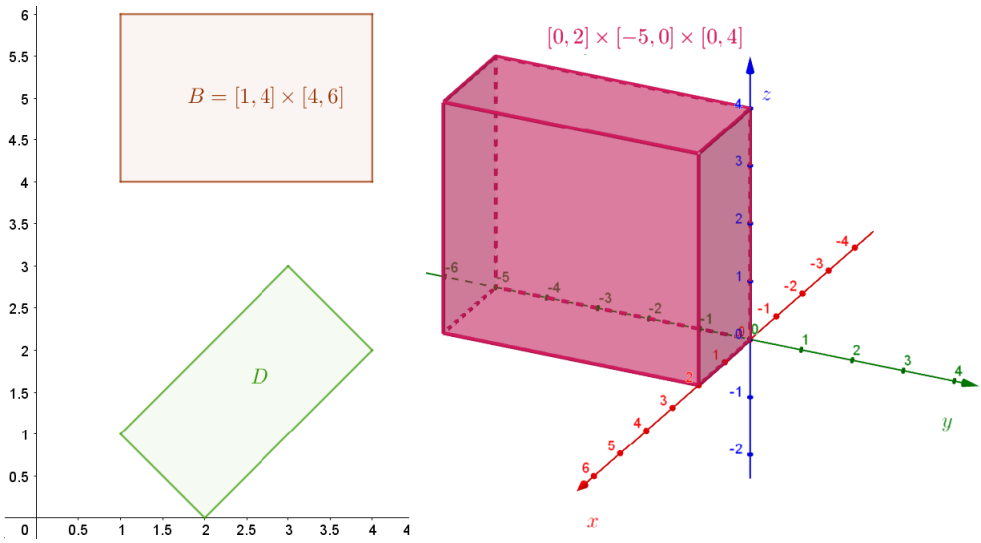


Figura 4. D es un rectángulo de $\mathbb{R}^2$, pero *no* es un intervalo bidimensional, en cambio, B sí lo es. A la derecha, un intervalo tridimensional.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \ddots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Las celdas de una matriz pueden estar ocupadas por números o por otros objetos matemáticos. El conjunto de las matrices de orden $n \times m$, cuyos elementos pertenecen a un conjunto V se denota por $V^{n\times m}$. Una vez más, el símbolo $\mathbb{R}^{n\times m}$ se refiere, tanto al conjunto de las matrices de orden $n \times m$ de números reales, como a sus operaciones: si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces, $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$, $\alpha A = (\alpha a_{ij})$, es decir, se opera celda a celda. La matriz nula, la que tiene ceros en todas las celdas, $0_{n\times m}$ (o simplemente 0, si no hay ambigüedad posible) es el neutro para la suma, $A+0 = A$ para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La traspuesta de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es la matriz $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (cambiar filas por columnas).

¿Es una matriz algo más que una forma caprichosa de representar una lista de objetos?, ¿en qué se diferencian los espacios $\mathbb{R}^{2\times 3}$, $\mathbb{R}^{3\times 2}$ y $\mathbb{R}^6$? Los tres están formados por listas ordenadas de 6 números reales y en ellos se suma y se multiplica por reales de la misma

manera, ¿solo se diferencian en la forma de representarlas en un papel? Si las matrices son algo más que listas de números dispuestos de una determinada manera es porque existe *la multiplicación de matrices*.

Para $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, se define $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times k}$ por $c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$ (*filas por columnas*). Al repasar el concepto de aplicación lineal, veremos que esta manera de multiplicar matrices, aparentemente caprichosa, es la forma natural de hacerlo. El producto de matrices no solo se define para matrices de números, la definición es válida siempre que estén correctamente definidas las operaciones implicadas en las expresiones $\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$ (filas por columnas).

Ejemplo 11. Si $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, entonces $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] \in V^{1\times 2}$, de manera que el producto,

$$[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v},$$

está bien definido (todas las combinaciones lineales de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ se expresan así). ■

Cuando $n = m$ (matrices cuadradas) el producto de matrices es una operación interna en $\mathbb{R}^{n\times n}$(se operan dos matrices cuadradas de orden n y sale otra del mismo orden). Recordemos que AB puede ser diferente de BA y que la matriz identidad, $I_n = (\delta_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$, es el elemento neutro, $AI_n = I_nA = A$, para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no nula (juega una papel parecido al del número 1 en $\mathbb{R}$). Si no da lugar a confusión, se pone I, en vez de I_n. El único $a \in \mathbb{R}$ que no tiene inverso para la multiplicación es $a = 0$; en cambio, cuando $n > 1$ existen matrices no nulas $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que no tienen inversa; se denominan *matrices singulares*.

Hay que estar atentos a la notación: $[a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado, $[a_1\ a_2] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ es una matriz fila (espacio en vez de coma), mientras que (a_1, a_2) puede denotar, según el contexto, un intervalo abierto $(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}$ o un par ordenado $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, que se identifica con una matriz columna

$$(a_1, a_2) = [a_1\ a_2]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \equiv \mathbb{R}^2.$$

I.1: Notación; $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n\times 1}$

Desde ahora, y en lo que sigue, se identifica el espacio $\mathbb{R}^n$ con el de las matrices

columna $\mathbb{R}^{n\times 1}$, es decir, $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n\times 1}$ mediante la identificación

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

El producto de matrices permite definir una operación entre dos elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ que da como resultado el número real $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$. Esta operación se denomina *producto escalar* y se denota indistintamente por $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ o $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n. \tag{3}$$

Para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tendremos $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}_j^T\mathbf{u})\,\mathbf{e}_j$, pues $u_j = \mathbf{e}_j^T\mathbf{u}$. A través del producto escalar se define el *módulo* de $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}, \tag{4}$$

el coseno del ángulo que forman $\mathbf{u} \neq 0$ y $\mathbf{v} \neq 0$,

$$\cos(\widehat{\mathbf{uv}}) = \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \tag{5}$$

así como una noción de longitud de un segmento o distancia: la *distancia euclídea*,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \tag{6}$$

que verifica las propiedades de cualquier noción de *distancia*: si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, entonces $d(z, x) = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

2.3. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Cuando el conjunto inicial sea $X = \mathbb{R}^n$, diremos que $f : X \rightarrowtail Y$ es una función de n variables. Cuando $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, diremos que f es una función de n *variables* y m *componentes*.

Ejemplo 12. La función $f\colon \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (1/(x-5), \sqrt{x-1})$ tiene una variable (independiente) y dos componentes. Tenemos $\operatorname{dom} f = [1, 5)\cup(5, +\infty)$, o lo que es igual, $\operatorname{dom} f = [1, +\infty) \setminus \{5\}$ ■

El *soporte* de una función real es el conjunto $\operatorname{sop} f = \{x \in \operatorname{dom} f \colon f(x) \neq 0\}$.

Ejemplo 13. La función $f \colon \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{xy}$, tiene dos variables y una componente; se trata de una función real. En este caso, $\operatorname{dom} f = ([-1,1] \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, mientras que $\operatorname{sop} f = ((-1,1) \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ■

La *restricción* de una función $f \colon X \to Y$ a un subconjunto no vacío $A \subset X$ es otra función $f|_A : A \to Y$ definida por $f|_A(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ (obsérvese que $f|_A(x)$ no está definido para $x \notin A$).

Ejemplo 14. La restricción de la función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ a la semirrecta $\mathbb{R}_-$ es la función $f|_{\mathbb{R}_-} : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ dada por $f|_{\mathbb{R}_-}(x) = |x| = -x$. ■

La *gráfica* de una función $f \colon X \rightarrowtail Y$ es el conjunto $\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y : f(x) = y\}$. Observemos que $\operatorname{graf} f$ es un subconjunto de $X \times Y$. Por ejemplo, si $f \colon \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{graf} f$ es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$; si $f \colon \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{graf} f$ es un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^3$ (necesitamos dibujar con perspectiva para representarla); si $f \colon \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{graf} f$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^4$ y no tenemos ningún procedimiento sencillo para representar la gráfica. Las gráficas de la mayor parte de las funciones que aparecen en la ciencia y en la ingeniería no se pueden representar visualmente. Es un error pensar que, porque no se dibujen, son más abstractas que las otras.

Una clase muy importante de funciones reales es la de aquellas que se pueden expresar mediante una sola fórmula; se trata de un concepto poco preciso, pero muy útil: ¿qué es lo que entendemos por *una fórmula*?: una expresión formada por las variables independientes, números reales, sumas, restas, productos, divisiones, potencias de exponente entero, composiciones, senos, cosenos, exponenciales, logaritmos y radicales. Consideramos los radicales de índice impar restringidos a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y los de índice par, restringidos a $(0, \infty)$. En general, las funciones dadas por una sola fórmula se consideran definidas en el interior de sus dominios. Excluimos de la idea de *una sola fórmula* a las funciones para cuya definición se necesitan, llaves (varias fórmulas, según los valores de las variables), valores absolutos, etc.

2.4. Operaciones con funciones; partes positiva y negativa.

Si tenemos definida alguna operación o relación en el conjunto final Y (adición, producto, orden, etc.), esa operación o relación queda inmediatamente definida para las fun-

ciones $f\colon X \rightarrowtail Y$, sea cual sea el conjunto X, de la forma obvia: punto a punto. Por ejemplo, si $f, g : X \rightarrowtail \mathbb{R}^n$, entonces $f+g : X \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ viene dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ para $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.

Análogamente, si $|\cdot|$ denota el valor absoluto en $\mathbb{R}$ y $f\colon X \rightarrowtail \mathbb{R}$, entonces $|f| : X \rightarrowtail \mathbb{R}_+$ es la función $|f|(x) = |f(x)|$. Así también, para $f, g : X \to \mathbb{R}$, cuando $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$, se escribe $f \leq g$, etc.

Hay que observar que, mientras que el orden de los reales es *total* (siempre se da, o bien $x \leq y$, o bien $y \leq x$), no ocurre así con el orden de las funciones de X en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $f(m) = m^2, g(m) = 5m$, entonces no se cumple ni $f \leq g$ ni $g \leq f$. Si el orden es total en un cierto conjunto $\mathcal{D}$ de funciones de X en $\mathbb{R}$, decimos que $\mathcal{D}$ es una *familia monótona*. Por ejemplo, $\mathcal{D} = \{kx^2 : k \in \mathbb{N}\}$ es una familia monótona formada por las funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_k(x) = kx^2$.

Las operaciones con funciones que acabamos de mencionar vienen heredadas, como hemos visto, de las operaciones o relaciones del conjunto final. Además, hay otra operación con funciones en la que no interviene ninguna estructura que puedan tener los conjuntos inicial o final. Nos referimos a la *composición* que es, en ese sentido, la operación por excelencia de las funciones. Componer significa «aplicar una a continuación de otra», es decir, si $g : X \rightarrowtail Y$, $f\colon Y \rightarrowtail Z$, entonces la composición $f \circ g : X \rightarrowtail Z$ se define por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, para $x \in \operatorname{dom}(f \circ g) = g^{-1}(\operatorname{dom} f)$.

Ejemplo 15. Si $g(x, y) = x/y$, $f(x) = (x^2, 1/x)$, entonces $g : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2$, por lo que $f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ viene dada por $(f \circ g)(x, y) = f(x/y) = (x^2/y^2, y/x)$. Observemos que: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g^{-1}(\operatorname{dom} f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$, que es precisamente el dominio de $(f \circ g)(x, y) = (x^2/y^2, y/x)$. ■

Cualquier función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se puede escribir como diferencia de funciones no negativas (las que cumplen $f(X) \subset \mathbb{R}_+$). En efecto, dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, definimos dos *funciones no negativas* $f_+, f_- : X \to \mathbb{R}_+$ mediante

$$f_- = \frac{1}{2}(|f| - f), \tag{7}$$

$$f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f). \tag{8}$$

Evidentemente se tendrá $f = f_+ - f_-$, además de $|f| = f_+ + f_-$.

Ejemplo 16. Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, entonces

$$|f|(x) = |f(x)| = |x^2 + y^2 - 1|.$$

$$f_+(x) = \begin{cases} x^2+y^2-1, & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \\ 0, & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} .$$
$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \\ 1-x^2-y^2, & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} . \blacksquare$$

2.5. Límites y conceptos topológicos en $\mathbb{R}^n$.

A partir de la noción de límite en $\overline{\mathbb{R}}$, se obtiene la noción de límite para sucesiones de $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$: decimos que $\lim_{m\to\infty} b_m = L \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $\lim_{m\to\infty} \|b_m - L\| = 0$ y que $\lim_{m\to\infty} b_m = \infty$ si y solo si $\lim_{m\to\infty} \|b_m\| = +\infty$.

Recordemos algunos conceptos topológicos. Si $M \subset X$ y X está dotado de una noción de límite (en particular, si $X = \mathbb{R}^n$), se dice que:

- M es *cerrado* si toda sucesión convergente de puntos de M tiene su límite en M.
- M es *compacto*, si toda sucesión de M tiene alguna subsucesión con límite en M.
- M es *abierto*, si $X \setminus M$ es cerrado.
- La *adherencia* de M es el menor cerrado que contiene M. Se denota $\overline{M}$.
- El *interior* de M es el mayor abierto contenido en M. Se denota $\mathring{M}$.
- La *frontera* de M es $\mathrm{Fr}(M) = \overline{M} \setminus \mathring{M}$.
- $M \subset \mathbb{R}^n$ es *acotado*, si ninguna sucesión de sus puntos tiende a infinito, es decir, si M está contenido en algún intervalo n–dimensional de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 17. Un intervalo semiabierto $B = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ no es ni un abierto ni un cerrado de $\mathbb{R}^n$. El interior de B es el intervalo abierto $\mathring{B} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, mientras que la adherencia de B es el intervalo cerrado $\overline{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. La frontera de B está formada por las $2n$ *caras* del intervalo n dimensional (un intervalo unidimensional tiene 2 extremos, un cuadrado tiene 4 lados, un paralelepípedo tiene 6 caras, etc.):

$$\mathrm{Fr}(B) = (\{a_1\} \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) \cup (\{b_1\} \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) \cup \cdots$$
$$\cup ([a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_k\} \times \cdots \times [a_n, b_n]) \cup ([a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_k\} \times \cdots [a_n, b_n]) \cup \cdots$$
$$\cup ([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{a_n\}) \cup ([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{b_n\}) . \blacksquare$$

Razonando con las definiciones anteriores, es fácil ver lo siguiente:

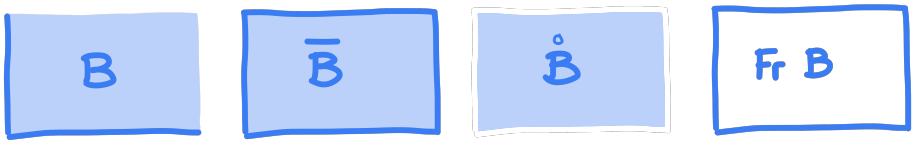


Figura 5. Intervalo semiabierto $B \subset \mathbb{R}^2$, su adherencia, interior y frontera (ejemplo 17).

I.2: Completitud, compactos, cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$

Toda sucesión de $\mathbb{R}^n$ tiene alguna subsucesión con límite (finito o infinito), luego, tanto $[-\infty, +\infty]$ como $\overline{\mathbb{R}^n}$, son compactos.
Como consecuencia, $M \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Para lo primero, basta observar que cualquier sucesión de números reales tiene alguna subsucesión monótona (creciente o decreciente). Se generaliza a $\mathbb{R}^n$ razonando componente a componente.

Respecto de lo segundo, si M es compacto, no puede haber en él ninguna sucesión que tienda a infinito (no tendría subsucesión convergente), luego M es acotado. Además, toda sucesión convergente de puntos de M tiene que tener su límite en M, pues las sucesiones de una sucesión convergente tienen su mismo límite. Luego M es cerrado.

Recíprocamente, dada una sucesión de puntos de un conjunto cerrado y acotado M, existe una subsucesión con límite (completitud de $\mathbb{R}^n$), que no puede ser infinito (porque M está acotado), es decir, existe una subsucesión convergente, cuyo límite está en M (porque M es cerrado). Por lo tanto, M es compacto.

CONTESTE AHORA AL CUESTIONARIO 2.

2.6. Continuidad.

Si tenemos en en X e Y una noción de límite (como la tenemos en $\mathbb{R}^n$ y en $\overline{\mathbb{R}^n}$), tenemos una noción de *continuidad* para las funciones $f\colon X \rightarrowtail Y$: decimos que f es *continua en un punto* $x_0 \in \operatorname{dom} f$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, esto es, «el límite de la función coincide con el valor de la función en el límite», $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.

Hay que tener cuidado con la continuidad en un subconjunto $A \subset X$, porque, según el autor, se puede referir a dos cosas diferentes. Nosotros diremos que:

- $f\colon X \rightarrowtail Y$ es continua en los puntos de $A \subset \operatorname{dom} f$, si f es continua en cada punto $x_0 \in A$.
- $f\colon X \rightarrowtail Y$ es continua en $A \subset \operatorname{dom} f$, si la restricción $f|_A$ es continua en cada punto $x_0 \in A$.

Ejemplo 18. Consideremos la circunferencia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1$, si $(x, y) \in A$, $f(x, y) = 0$, si $(x, y) \notin A$. Claramente, f no es continua en ningún punto (x_0, y_0) de A, pues podemos encontrar una sucesión de puntos de $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$, por ejemplo, $b_k = (x_0 + \frac{1}{k}, y_0)$, que converge a (x_0, y_0), pero cuyas imágenes, $f(b_k) = f(x_0 + \frac{1}{k}, y_0) = 0$, no convergen a $f(x_0, y_0) = 1$.

Sin embargo, f es continua en A, porque la restricción de f a A es la función $f|_A : A \to \mathbb{R}$ constantemente igual a 1 y entonces, para todo $(x_0, y_0) \in A$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f|_A(x, y) = \lim_{(x,y)\in A,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 1 = f(x_0, y_0). \blacksquare$$

Una función se denomina *continua* si es continua en su dominio. Entre otras, son continuas (en sus dominios respectivos) todas las funciones que se pueden expresar por una sola fórmula (pág. 35).

Ejemplo 19. Sean $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y B el complementario de su soporte, es decir, $B = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{sop} h = \{p \in \mathbb{R}^n : h(p) = 0\}$. Si p_k es una sucesión de puntos de B convergente a $p \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$h(p) = h(\lim_{k\to\infty} p_k) = \lim_{k\to\infty} h(p_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 \implies p \in B.$$

Toda sucesión convergente de B tienen su límite en B, luego B es cerrado, es decir, el soporte de una función continua es un abierto. $\blacksquare$

Se llama *discontinuidad* a un punto cualquiera de estos dos tipos:

- Los puntos $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ que no cumplen $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Los puntos de la frontera del dominio que no están en el dominio. Aceptamos los puntos de infinito como discontinuidades, si el dominio es no acotado.

En uno y otro caso, cuando existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, se dice que la discontinuidad es *evitable*, porque basta definir o redefinir el valor la función en el punto x_0, para que la función sea continua es x_0. Por ejemplo, $f(x) = \frac{x^2}{x}$ tiene una singularidad evitable en

$x_0 = 0$, pero hace falta ser muy puntilloso para distinguir la función f de la función $g(x) = x$, que es continua.

Una función es continua si no tiene discontinuidades en su dominio. Por ejemplo: $f(x) = 1/x$ es una función continua, pero presenta una discontinuidad en $x = 0$, punto que no está en su dominio.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es *conexo* (en rigor, conexo por caminos o por arcos), si para cada par de puntos $a_0, a_1 \in A$ existe una función continua $g : [0,1] \to A$ tal que $a_0, a_1 \in g([0,1])$. Intuitivamente, esto ocurre cuando cualquier par de puntos de A se pueden unir mediante un camino, no necesariamente rectilíneo, que no se sale de A. Los conjuntos abiertos conexos no vacíos se denominan *regiones*.

De las definiciones de compacto y de conexo se siguen inmediatamente las siguientes propiedades:

I.3: Imágenes de compactos y conexos por funciones continuas

La imagen de un compacto por una función continua es un compacto.
La imagen de un conexo por una función continua es un conexo.

Ejemplo 20. La función $f\colon \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2-2}$ es continua (es una fracción algebraica). La esfera maciza $B = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es un cerrado (porque $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ es continua; ver ejemplo 19). Además, la esfera B es acotada, pues B está contenida en el intervalo $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$. Por lo tanto, B es un compacto. Además, $B \subset \operatorname{dom} f$, porque el cilindro infinito $C = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2\}$ (donde se anula el denominador de f) no tiene ningún punto en común B (es imposible que sea $2 + z^2 = 1$). En consecuencia, $f(B)$ es un compacto de $\mathbb{R}$.

Por otra parte, es obvio que B es conexo (intuitivamente, solo tiene una «pieza»). Comprobémoslo: dos puntos cualesquiera $(x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1) \in B$ se pueden unir mediante un segmento recto (entre otras muchas posibilidades):

$$g : [0,1] \to B, \quad g(t) = t(x_0,y_0,z_0) + (1-t)(x_1,y_1,z_1).$$

Por lo tanto, $f(B)$ es un compacto conexo de $\mathbb{R}$, es decir, $f(B)$ es un intervalo cerrado $[m,M]$. Luego, existen $(x_m,y_m,z_m), (x_M,y_M,z_M) \in B$ tales que

$$f(x_m,y_m,z_m) = m \leq f(x,y,z) \leq M = f(x_M,y_M,z_M), \text{ para todo } (x,y,z) \in B.$$

Es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre B. ■

Aunque no se trata de un concepto topológico, conviene recordar ahora la noción de conjunto *convexo*: un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo si el segmento que une a dos cualesquiera de sus puntos está siempre incluido en el propio conjunto.

Todos los convexos son conexos (la función g sería $g(t) = ta_1 + (1-t)a_0$), pero no todos los conexos son convexos. Por ejemplo, la corona $1 < x^2 + y^2 < 4$ es conexa, pero no convexa (figura 6).

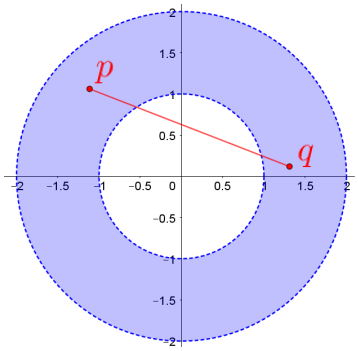


Figura 6. Los puntos p y q pertenecen a la corona $1 < x^2 + y^2 < 4$, pero el segmento que los une *no* está contenido en la corona. Así vemos que la corona no es convexa.

2.7. Derivadas.

La derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ con dominio abierto es la función $f' : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{9}$$

o lo que es igual

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0, \tag{10}$$

siendo $\operatorname{dom} f'$ el conjunto de los $x \in \operatorname{dom} f$ para los que existe y es finito el límite de (9). La derivada se denota de otras maneras: $f'(x) = Df(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Decimos que f es *derivable* en $\operatorname{dom} f'$, o simplemente, que es derivable, cuando $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f'$. La definición se puede aplicar reiteradamente y obtener las derivadas sucesivas $f'' = (f')', \ldots, f^{k)} = (f^{k-1)})', \ldots$

Ejemplo 21. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = |x|$, entonces

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad x < 0 \\ 1, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases},$$
$$f^{k)}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f^{k)}(x) = 0, \quad \text{para } k \geq 2.$$

La función f no es derivable (no lo es en todo su dominio). La función $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$ sí es derivable. ■

La derivada satisface unas propiedades básicas que convierten la derivación en un simple proceso mecánico, cuando la función viene expresada por una fórmula (pág.35): para $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$:

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ (linealidad).
- $(fg)' = f'g + fg'$ (derivada del producto).
- $(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'$ (derivada de la composición o regla de la cadena).

Para una función de n variables y m componentes, $f\colon \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$, podemos replicar la misma definición para cada una de sus variables, $x_1, \ldots, x_n$ (manteniendo fijas las otras), y para cada una de sus componentes, $f_1, \ldots, f_m$:

$$D_j f_k(x) \equiv \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f_k(x + h\mathbf{e}_j) - f_k(x)}{h}, \text{ para } 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m. \qquad (11)$$

De nuevo, el dominio estará formado por los puntos de $\operatorname{dom} f$ para los que exista (y sea finito) el límite anterior. Se obtiene así una matriz $m \times n$ que se denomina *matriz jacobiana* de f en el punto x:

$$f'(x) := \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Las columnas de esta matriz se denotan por $\frac{\partial f}{\partial x_j} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

Ejemplo 22. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 3x_2, x_1 x_2 x_3)$,

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 3 & 0 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Las propiedades de las derivadas parciales son similares a las de la derivada. Si $h : \mathbb{R}^k \rightarrowtail \mathbb{R}^n, f, g : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ (linealidad).
- Si $m = 1$, entonces $(fg)' = f'g + fg'$ (derivada del producto).
- $(f \circ h)' = (f' \circ h)\, h'$ (derivada de la composición o regla de la cadena).

La regla de la cadena se puede resumir así: *la derivada de la composición es el producto de las derivadas* (cada una evaluada donde corresponde). Obsérvese que $f' \circ h$ es una matriz $m \times n$, mientras que h' es $n \times k$, por lo que $(f' \circ h)\, h'$ es $m \times k$, del mismo orden que $(f \circ h)'$. Recuérdese que no tenemos definido un producto en $\mathbb{R}^m$ para $m > 1$ como operación interna (multiplicar dos elementos de $\mathbb{R}^m$ para obtener otro elemento de $\mathbb{R}^m$).

Ejemplo 23. Comprobemos la regla de la cadena con las funciones $f\colon \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \quad ; \quad h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2^2, x_2 x_3).$$

Comencemos calculando $(f' \circ h)\, h'$. Derivando y componiendo, obtenemos

$$f'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2} & \frac{-x_1}{x_2^2} \end{bmatrix} \; ; \; h'(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{bmatrix}.$$

$$f' \circ h(x_1, x_2, x_3) = f'(x_1x_2^2, x_2x_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2x_3} & \frac{-x_1x_2^2}{(x_2x_3)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2x_3} & -\frac{x_1}{x_3^2} \end{bmatrix}.$$

Por lo que el miembro derecho de la regla de la cadena queda como

$$\left(\left(f' \circ h\right)\, h'\right)(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2x_3} & \frac{-x_1}{x_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_3} & \frac{x_1}{x_3} & \frac{-x_1x_2}{x_3^2} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, la composición $f \circ h : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$ resulta ser

$$(f \circ h)(x_1, x_2, x_3) = f(h(x_1, x_2, x_3)) = f(x_1x_2^2, x_2x_3) = \frac{x_1x_2^2}{x_2x_3} = \frac{x_1x_2}{x_3}.$$

Derivando, obtenemos el miembro de la izquierda de la regla de la cadena:

$$(f \circ h)'(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_3} & \frac{x_1}{x_3} & \frac{-x_1x_2}{x_3^2} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Ejemplo 24. En las aplicaciones científico-tecnológicas, las funciones se suelen concebir como relaciones entre variables preexistentes (espacio, tiempo, etc.), más que desde el punto de vista conjuntista. Aplicamos la regla de la cadena desde ese punto de vista a las funciones del ejemplo 23. Pese al constante abuso de notación, el procedimiento es claro y conciso. Las funciones se escribirían así:

$$w = \frac{u}{v} \qquad ; \qquad u = xy^2 \qquad ; \qquad v = yz$$

La composición no se expresa como operación, sino que viene indicada implícitamente por los nombres de las variables. El miembro de la derecha de la regla de la cadena quedaría así (las cuentas son las mismas que en el ejemplo 23):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v}\cdot y^2 - \frac{u}{v^2}\cdot 0 = \left(\frac{1}{yz}\right)(y^2) - 0 = \frac{y}{z}.$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v}\cdot 2xy - \frac{u}{v^2}\cdot z = \left(\frac{1}{yz}\right)(2xy) - \left(\frac{xy^2}{y^2z^2}\right)z = \frac{x}{z}.$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{v}\cdot 0 - \frac{u}{v^2}\cdot y = 0 - \left(\frac{xy^2}{y^2z^2}\right)y = \frac{-xy}{z^2}.$$

El miembro izquierdo de la regla de la cadena se desarrollaría así

$$w = \frac{u}{v} = \frac{xy^2}{yz} = \frac{xy}{z}.$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right) = \frac{y}{z}.$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right) = \frac{x}{z}.$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right) = \frac{-xy}{z^2}.$$

Por supuesto, el método matricial del ejercicio 23 resulta conveniente cuando el rigor es importante, en las aplicaciones informáticas o cuando se componen varias funciones, como en

$$(f\circ g\circ h)' = (f'\circ(g\circ h))\cdot(g\circ h)' = (f'\circ g\circ h)\cdot(g'\circ h)\cdot h'. \blacksquare$$

Las expresiones (9) y (10) son equivalente para funciones de una variable, pero (9) no tiene sentido cuando f es de $n > 1$ variables, porque h tendría n componentes y «dividir entre h» es una operación no definida. La matriz jacobiana f' tiene muy poco significado cuando no se cumple la propiedad equivalente a (10), es decir, cuando no se cumple:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|} = 0. \tag{12}$$

Afortunadamente, cuando todas las celdas de la matriz f' son funciones continuas (en cuyo caso, decimos que f es *de clase uno*), podemos asegurar que (12) se cumple (es decir, que f es *diferenciable*). Hay funciones diferenciables que no son de clase uno, pero nosotros nos centraremos en las funciones de clase uno.

También podemos derivar reiteradamente las componentes de una función de varias variables y obtendremos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right), \text{ etc.}$$

Si todas estas derivadas parciales de segundo orden son continuas, decimos que f es de *clase dos*. Podemos repetir la idea: si son continuas todas las derivadas parciales de orden k de las componentes de f, decimos que f es de *clase* k. Si f es de clase k para todo $k \in \mathbb{N}$, decimos que f es de *clase infinito*. Para dar más consistencia a la exposición, a las funciones continuas se las denomina *funciones de clase cero*. Salvo que se indique otra cosa, siempre que nos refiramos a funciones de clase $k > 0$, asumiremos que el dominio es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

El conjunto de todas las funciones de clase k, de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, se denota por $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. Claramente, una función $f\colon \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ es de clase k si y solo si lo es cada componente $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$, para $1 \leq j \leq m$. En consecuencia, denotaremos por $(\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n))^m$ al conjunto de todas las funciones de clase k de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Observemos que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$.

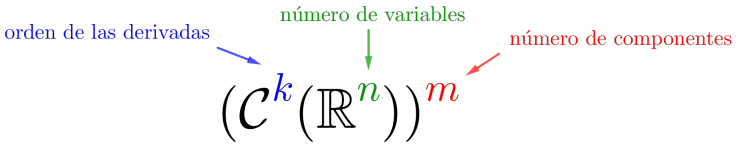


Figura 7. Notación para el espacio de funciones $f\colon \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ que son k veces derivables con continuidad. Si $k = 0$, no siempre se escribe, de manera que $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n))^m$ es el espacio de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Si $m = 1$ o $n = 1$, el superíndice no se escribe.

No hay tantas derivadas parciales como parece: si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, da igual derivar primero respecto de una variable y luego respecto de otra, que hacerlo al revés (hasta llegar al orden k). Las funciones que vienen dadas por una sola fórmula (pág. 35) son de clase infinito.

Ejemplo 25. La función $f\colon \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = \left(\frac{x}{y}, x + 2\right)$, es de clase infi-

nito (cada una de sus dos componentes está dada por una fórmula). Calculemos algunas derivadas parciales:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{y}\ ;\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}\ ;\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1\ ;\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0\ ;\ \frac{\partial f_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{y}\right) = \frac{-1}{y^2}.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{-1}{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}\ ;\ \frac{\partial^k f_1}{\partial y^k} = \frac{(-1)^k k! x}{y^{k+1}}\ ;\ \frac{\partial^k f_1}{\partial x^k} = 0,\ \text{para } k \geq 2. \ \blacksquare$$

Hemos visto que, en cada punto de su dominio, la matriz jacobiana de una función de clase uno, $f\colon \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$, tiene m filas y n columnas (una columna por variable), es decir, $f'(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. El caso particular más interesante corresponde a $m = 1$, es decir, al de las funciones reales de clase uno $f\colon \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$. En este caso, para cada $x \in \operatorname{dom} f$ la matriz $f'(x)$ es una matriz fila, $f'(x) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ con

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

A la matriz traspuesta de la jacobiana, un vector columna, se le denomina *gradiente* de f, y se denota por $\operatorname{grad} f$:

$$\operatorname{grad} f(x) = (f'(x))^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right). \tag{14}$$

Ejemplo 26. Si $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3$, entonces,

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x_2^2 x_3 \quad 2x_1 x_2 x_3 \quad x_1 x_2^2] = x_2^2 x_3\,[1\ 0\ 0] + 2x_1 x_2 x_3\,[0\ 1\ 0] + x_1 x_2^2\,[0\ 0\ 1] \\ &= x_2^2 x_3\,\mathbf{e}_1^T + 2x_1 x_2 x_3\,\mathbf{e}_2^T + x_1 x_2^2\,\mathbf{e}_3^T. \\ \operatorname{grad} f(x) &= x_2^2 x_3\,\mathbf{e}_1 + 2x_1 x_2 x_3\,\mathbf{e}_2 + x_1 x_2^2\,\mathbf{e}_3 = (x_2^2 x_3, 2x_1 x_2 x_3, x_1 x_2^2). \end{aligned}$$

Si preferimos no emplear la notación de subíndices, queda

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= [y^2 z \quad 2xyz \quad xy^2] = y^2 z\,\mathbf{e}_1^T + 2xyz\,\mathbf{e}_2^T + xy^2\,\mathbf{e}_3^T. \\ \operatorname{grad} f(x,y,z) &= y^2 z\,\mathbf{e}_1 + 2xyz\,\mathbf{e}_2 + xy^2\,\mathbf{e}_3 = (y^2 z, 2xyz, xy^2). \ \blacksquare \end{aligned}$$

CONTESTE AHORA AL CUESTIONARIO 3.

2.8. Series. Series absolutamente convergentes.

Una *serie* es un tipo particular de sucesión que tiene la forma $s_k = \sum_{j=0}^{k} b_j$, en donde $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es otra sucesión. Por supuesto, también se puede obtener la sucesión b a partir de la sucesión s: basta observar que $b_0 = s_0$ y que $b_k = s_k - s_{k-1}$ para $k \geq 1$, lo que se denota como $b = \Delta s$. De lo anterior se deduce que b tiende a cero, cuando s converge, aunque el recíproco no es necesariamente cierto.

Si la sucesión s es convergente, decimos que la *serie es convergente* o que b es *sumable*. Sea finito o infinito el límite de s, cuando exista, se denota por $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$. También se emplea $\sum_{j\in J} b_j$, cuando sumamos solamente la restricción de la sucesión b a un subconjunto $J \subset \mathbb{N}$, e incluso, cuando no hay duda sobre el dominio de b, empleamos la notación más simple $\sum b$.

Nota 3. *Sumas de infinitos sumandos y series*. A veces se define una serie como una suma con infinitos sumandos, lo que es cierto, en algún sentido, pero no todas las sumas con infinitos sumandos son series. Al hablar de *infinitos sumandos*, se entiende que el número de sumandos depende de un parámetro, que haremos tender a infinito. Para que el sumatorio sea una serie, ese parámetro no puede aparecer en la expresión de los sumandos, solo puede aparecer en el límite superior de sumación.

Por ejemplo, la sucesión de sumas $s_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{j^3}{k^4}$ no define una serie, porque, al aumentar k, no solo se añaden sumandos, sino que los sumandos anteriores van cambiando. Eso no impide que s_k tenga límite, $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{j^3}{k^4} = 1/4$. La sucesión de sumas $s_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{j^3}{2^j}$, sí define una serie: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^3}{2^j} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{j^3}{2^j} = 26$. ■

El caso más sencillo de serie se da cuando la sucesión b que sumamos solo tiene términos no negativos, porque, entonces, la sucesión s es creciente, con lo que $\sum b$ no es nada más que el supremo de s (que puede ser un número o $+\infty$). En ese caso (pero solo en ese caso), escribir $\sum b < +\infty$ equivale a decir que la serie es convergente. No hay ambigüedad ninguna en escribir $\sum b < \infty$, en vez $\sum b < +\infty$, y así se suele hacer, para relajar la notación.

Como cualquier otra función real, la sucesión b tendrá su parte positiva, b_+, su parte negativa b_- y su valor absoluto $|b|$. La serie $\sum |b|$ es del tipo sencillo que comentábamos en el párrafo anterior: solo puede ser, o bien $\sum |b| = +\infty$, o bien $\sum |b| < \infty$ (no puede oscilar). En el segundo caso, es decir, cuando $\sum |b|$ es convergente, se dice que $\sum b$ es *absolutamente convergente*, o lo que es igual, que b es *absolutamente sumable*. Casi todas las series que aparezcan en este curso, cuando converjan, lo harán de forma absoluta.

Sabemos que $|b| = (b_+) - (b_-)$ y que estas tres sucesiones tienen solo términos positivos. Si b es absolutamente convergente, obviamente: $\sum(b_+) \leq \sum|b| < \infty$ y también $\sum(b_-) \leq \sum|b| < \infty$. En consecuencia, $\sum b = \sum(b_+) - \sum(b_-)$ será una serie convergente. Por lo tanto, es casi evidente que *toda serie absolutamente convergente es convergente* (el recíproco no es cierto, en general). Podemos establecer la siguiente clasificación para una serie $\sum b$:

I) $\sum(b_+) < \infty$ ó $\sum(b_-) < \infty$ (caso frecuente en este curso)

A) $\sum(b_+) < \infty$ y $\sum(b_-) < \infty \implies \sum b \in \mathbb{R}$; absolutamente convergente.

B) $\sum(b_+) < \infty$ y $\sum(b_-) = +\infty \implies \sum b = -\infty$.

C) $\sum(b_+) = +\infty$ y $\sum(b_-) < \infty \implies \sum b = +\infty$.

II) $\sum(b_+) = \sum(b_-) = +\infty$ (caso infrecuente en este curso). Podría ocurrir:

A) $\sum b \in \mathbb{R}$, convergente, pero no absolutamente convergente.

B) $\sum b = -\infty$.

C) $\sum b = +\infty$.

D) $\sum b = \infty$.

E) No se le asigna ningún valor a $\sum b$ con este criterio.

Ejemplo 27. La serie *armónica* es divergente (tipo I.C), es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \right)$$

$$\geq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{2^j} \right) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \times (2^j - 2^{j-1}) \right) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty. \blacksquare$$

Ejemplo 28. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es absolutamente convergente (tipo I.A):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 < +\infty.$$

Se puede demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$ (Problema de Basilea). $\blacksquare$

Nota 4. Señalemos una pequeña ambigüedad en la notación y la terminología: al decir, por ejemplo, «la serie $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ cumple tal propiedad», nos estamos refiriendo a que la sucesión s correspondiente cumple esa propiedad. Sin embargo, en las demás ocasiones, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ denota al límite de la sucesión s, o sea, a la suma de los términos de la sucesión b (un número o $\pm\infty$). ■

Ejemplo 29. Consideremos las sucesiones $b_k = (-1)^{k+1}/k$ y $c_k = b_{2k-1} + b_{2k}$. Los términos de c son positivos y su suma es absolutamente convergente:

$$0 < c_k = \frac{1}{4k^2 - 2k} \leq \frac{1}{2k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

La serie $\sum b$ no es absolutamente convergente, pues $\sum |b| = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k) = +\infty$ (serie armónica), aunque sí es convergente (tipo II.A), como vemos a continuación.

Sin embargo, como números reales, tenemos $\sum b = \sum c$ o, lo que es igual, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$. En efecto, basta hacer $m \to \infty$ en las siguientes expresiones:

$$\sum_{k=1}^{2m} b_k = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{2m-1} + b_{2m}) = c_1 + \cdots + c_m = \sum_{k=1}^{m} c_k,$$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} b_k = b_{2m+1} + \sum_{k=1}^{2m} b_k = \frac{1}{2m+1} + \sum_{k=1}^{m} c_k. \blacksquare$$

El ejemplo 29 nos muestra por qué resulta mucho más sencillo limitarnos a tratar con las series del tipo I) de la clasificación anterior: porque las de tipo II), aunque converjan, se pueden reagrupar de distintas maneras, dando lugar a resultados sorprendentes.

Ejemplo 30. Recordemos las siguientes series de términos positivos:

$$x > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} < \infty. \tag{15}$$

$$x \leq 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \tag{16}$$

A partir de las series $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ de la ecuación (15) se puede definir la función ζ de Riemann, sobre la que trata una de las conjeturas más importantes de las matemáticas (la *hipótesis de Riemann*; el Instituto Clay de Matemáticas ha ofrecido un premio de un millón dólares para quien la resuelva). ■

Resumimos las propiedades básicas de las series absolutamente convergentes:

I.4: Propiedades de las series absolutamente convergentes

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sucesiones absolutamente sumables, $I, J \subset \mathbb{N}$, conjuntos infinitos, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{D}$ una familia monótona de sucesiones absolutamente sumables tal que $\sup_{d\in\mathcal{D}}(\sum |d|) < \infty$.

i) $|\sum b| \leq \sum |b|$, (valor absoluto).

ii) $\sum(\alpha a + \beta b) = \alpha \sum a + \beta \sum b$, (linealidad).

iii) $\sum_{I\cup J} b + \sum_{I\cap J} b = \sum_I b + \sum_J b$, (aditividad).

iv) Si $a \leq b$, entonces $\sum a \leq \sum b$, (monotonía).

v) $\sum(\sup_{d\in\mathcal{D}} d) = \sup_{d\in\mathcal{D}}(\sum d)$, (convergencia monótona).

Todas las series que aparecen en 2.8 son absolutamente convergentes; cuando la convergencia absoluta no es una hipótesis, forma parte de la tesis del resultado. Observemos que, cambiando cada d por $-d$ en 2.8.v), lo que se afirma sobre el supremo, también se está afirmando sobre el ínfimo. Observemos en 2.8.iii) que los índices que se repiten en I y en J aparecen una vez en $I \cup J$ y otra vez en $I \cap J$. La aditividad suele expresarse para $I \cap J = \emptyset$, en cuyo caso $\sum_{I\cap J} b \equiv 0$.

Ejemplo 31. Una *serie trigonométrica*, como $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(kx)$, nos da un ejemplo de familia $\mathcal{D}$ de sucesiones: para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos una sucesión $d_k(x) = c_k \operatorname{sen}(kx)$. Si la sucesión de números c_k es absolutamente convergente, entonces $|d_k(x)| = |c_k|\,|\operatorname{sen}(kx)| \leq |c_k|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que está claro que la serie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(kx)$ converge absolutamente para todo x. Las series trigonométricas desempeñan un importante papel en la ingeniería. ■

En ocasiones, resulta útil considerar series cuyo índice vaya desde $-\infty$ hasta $+\infty$, es decir, sumar sucesiones $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Convendremos en interpretar la *serie bilátera* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k$ como la suma de dos series ordinarias:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k = \sum_{k=-\infty}^{-1} b_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k := \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

2.9. Series de potencias.

En este curso, las *series de potencias* son todavía más importantes que las trigonométricas (ejemplo 31). Una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{17}$$

viene dada por una familia $\mathcal{D}$ de sucesiones: para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos la sucesión $d_k(x) = c_k(x - x_0)^k$, en donde c_k es una cierta sucesión (*coeficientes*) y $x_0 \in \mathbb{R}$ (a lo largo del razonamiento los coeficientes c_k y el punto x_0 permanecen fijos).

Consideremos un $r \in \mathbb{R}_+$ que verifique $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < \infty$ (siempre hay alguno, por ejemplo, $r = 0$). Es claro que la serie (17) converge absolutamente cuando x cumple $|x - x_0| < r$, pues, en ese caso, se tiene $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k (x - x_0)^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < \infty$. El mayor $r \in [0, +\infty]$ que cumple lo anterior se denomina *radio de convergencia* de la serie y el intervalo correspondiente $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$ se denomina intervalo de convergencia.

Es imprescindible recordar la suma de unas cuantas series de potencias que desempeñan un importante papel: son los desarrollos en *serie de Taylor*, alrededor de $x_0 = 0$, de las funciones más importantes:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}, \text{ (Serie geométrica), radio de convergencia, } r = 1. \tag{18}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \text{ radio de convergencia, } r = +\infty. \tag{19}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \text{ radio de convergencia, } r = +\infty. \tag{20}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sen} x, \text{ radio de convergencia, } r = +\infty. \tag{21}$$

Una propiedad muy interesante de las series de potencias es que pueden derivarse en su intervalo de convergencia como si fueran una suma finita (un polinomio): es decir, sumando a sumando. No resulta demasiado complicado convencerse de que, efectivamente, esto es cierto: basta observar que la serie de potencias $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x - x_0)^{k-1}$ converge en los mismos círculos de radio $r > 0$ que la serie de (17) y comprobar que

$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|=0$. Efectivamente, consideramos $0<|h|<\varepsilon=r-|x-x_0|$ y aplicamos el binomio de Newton:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{\infty}c_k\left((x+h-x_0)^k-(x-x_0)^k-hk(x-x_0)^{k-1}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{\infty}c_k\left(\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}(x-x_0)^{k-j}h^j\right)\right|=|h|\left|\sum_{k=2}^{\infty}c_k\left(\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}(x-x_0)^{k-j}h^{j-2}\right)\right|$$

$$\leq|h|\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}|x-x_0|^{k-j}|h|^{j-2}\leq|h|\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}|x-x_0|^{k-j}\varepsilon^{j-2}$$

$$=\frac{|h|}{\varepsilon^2}\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}|x-x_0|^{k-j}\varepsilon^{j}\leq\frac{|h|}{\varepsilon^2}\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|(|x-x_0|+\varepsilon)^k=\frac{|h|}{\varepsilon^2}\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|r^k,$$

que tiende a cero cuando $h\to 0$.

Ejemplo 32. Derivando en la igualdad de la serie geométrica $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$, para $-1<x<1$, tenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k,\ \text{para}\ -1<x<1.\ \blacksquare$$

Las funciones $f\colon\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ que se pueden expresar como una serie de potencias, como (17), en algún entorno (x_0-r,x_0+r) de cada punto $x_0\in\operatorname{dom}f$, se denominan *funciones analíticas*. En general, podemos decir que son analíticas (en su dominio) las funciones que vienen dadas por una sola fórmula (pág. 35).

Ejemplo 33. La función *seno cardinal*, $\operatorname{sinc}(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$, desempeña un importante papel en el procesamiento digital de señales, entre otras áreas. Tiene una discontinuidad evitable en $x=0$, pues $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$, por lo que se define $\operatorname{sinc}(0)=1$. De esta manera, sinc es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Se denota por Si a la función cuya derivada es sinc, normalizada a $\operatorname{Si}(0)=0$. Partiendo del desarrollo en serie de Taylor de la función seno, $\operatorname{sen}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1!}x^{2k+1}$, es fácil obtener los de las funciones sinc y Si

$$\operatorname{sinc}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}.$$

$$\mathrm{Si}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} x^{2k+1}.$$

Las funciones sinc y Si son analíticas. ■

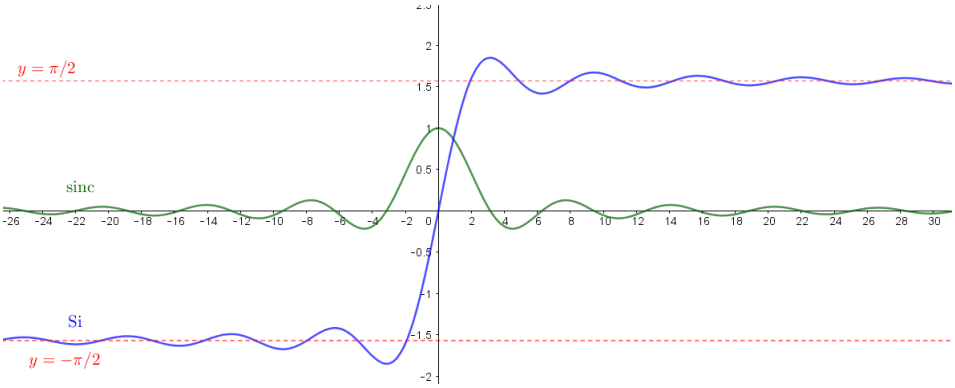


Figura 8. Las funciones sinc y Si (distinta escala en cada eje). Ejemplo 33.

CONTESTE AHORA AL CUESTIONARIO 4.

2.10. Funciones características y funciones escalonadas.

La *función característica* de un subconjunto A de un conjunto arbitrario X, es la función $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo 34. La función $\chi_{[0,+\infty)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se denomina *función escalón de Heaviside*, se denota por H y aparece en distintas ramas de la ingeniería. ■

Las siguientes propiedades (que se comprueban fácilmente) nos dicen que las funciones características transforman en algebraicas las operaciones conjuntistas: si $A, B \subset X$,

- $\chi_\emptyset(x) = 0$, para todo $x \in X$.

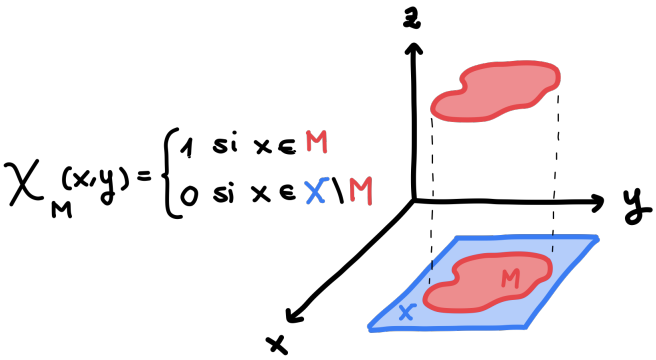


Figura 9. Gráfica de la función característica, χ_M, correspondientes a un subconjunto M de $\mathbb{R}^2$.

- $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\,\chi_B(x)$, para todo $x \in X$.
- $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$, para todo $x \in X$, siempre que $A \cap B = \emptyset$.
- $\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x)\,\chi_B(y)$, para todo $x, y \in X$.

Recordemos que no todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son el resultado de hacer el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ (por ejemplo, el conjunto D de la figura 4 (página 32) no es el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$).

Ejemplo 35. El triángulo $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2y \le 2\}$ (figura 10) no se puede expresar como el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, pero su función característica sí se puede expresar como un producto de funciones características en $\mathbb{R}$:

$$\chi_B(x, y) = \chi_{[0,1]}(y)\,\chi_{[0,2y]}(x).$$

Esa misma función característica también se puede expresar como

$$\chi_B(x, y) = \chi_{[0,2]}(x)\,\chi_{[x/2,1]}(y). \blacksquare$$

Ejemplo 36. El cilindro $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\ , 0 \le z \le 2\}$ es el producto cartesiano del círculo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ por el intervalo $[0, 2]$, es decir $B = D \times [0, 2]$; pero el círculo D no es el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. No obstante, la función característica de B sí se puede expresar como el producto de tres funciones características de una variable:

$$\chi_B(x, y, z) = \chi_D(x, y)\ \chi_{[0,2]}(z) = \chi_{[-1,1]}(x)\ \chi_{[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}]}(y)\ \chi_{[0,2]}(z). \blacksquare$$

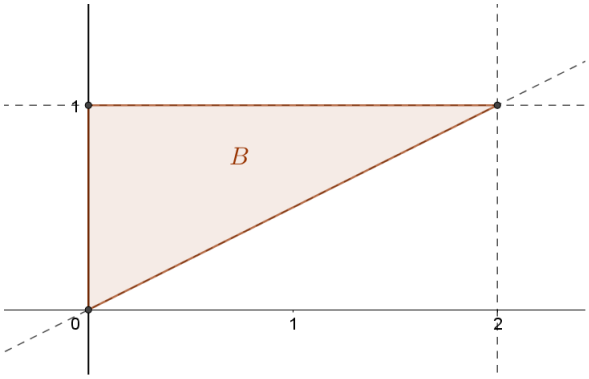


Figura 10. El triángulo B del ejemplo 35.

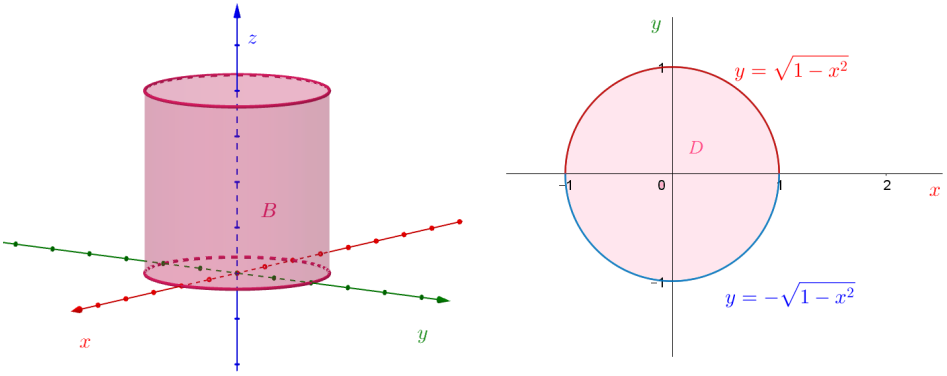


Figura 11. El cilindro B y círculo D del ejemplo 36.

Dados $f\colon X \to \mathbb{R}$, $A \subset X$, hay que tener cuidado para no confundir la función $f\chi_A : X \to \mathbb{R}$ con la función $f|_A : A \to \mathbb{R}$. Las dos valen $f(x)$, cuando $x \in A$, pero, $f\chi_A(x) = f(x)\chi_A(x) = f(x) \cdot 0 = 0$, cuando $x \notin A$, mientras que $f|_A(x)$ no está definida para $x \notin A$.

Denominamos *funciones escalonadas* a las combinaciones lineales de funciones características de intervalos: es decir, si $B_1, B_2, \ldots, B_m$ son intervalos n dimensionales de $\mathbb{R}^n$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ son números reales, entonces la función $\sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalonada.

Ejemplo 37. La función $f = 5\chi_{[1,4)} - 2\chi_{(2,5]}$ tiene por dominio toda la recta real, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, y por recorrido el conjunto de cuatro elementos $f(\mathbb{R}) = \{-2, 0, 3, 5\}$. Se puede expresar, de forma mucho menos compacta, como:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 5, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3, & \text{si } 2 < x < 4 \\ -2, & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

■

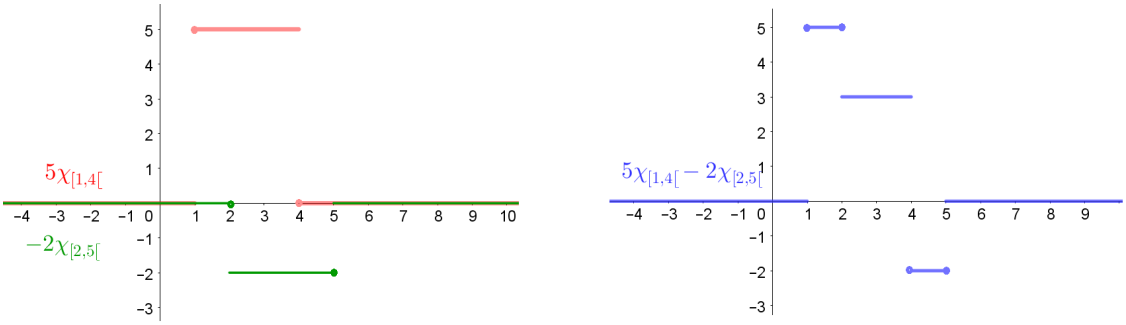


Figura 12. Funciones escalonadas del ejemplo 37.

Ejemplo 38. La función $f = 2\chi_{[1,3]\times[-1,1]} - \chi_{[2,5]\times[-2,0]}$ tiene dominio $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ y recorrido $f(\mathbb{R}^2) = \{-1, 0, 1, 2\}$. Calculemos algunos valores de f.

$$f(1,0) = 2\chi_{[1,3]}(1)\,\chi_{[-1,1]}(0) - \chi_{[2,5]}(1)\,\chi_{[-2,0]}(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 2.$$
$$f(3,-1) = 2\chi_{[1,3]}(3)\,\chi_{[-1,1]}(-1) - \chi_{[2,5]}(3)\,\chi_{[-2,0]}(-1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$

En la figura 13 se pueden ver todos los valores $f(x, y)$. Ese dibujo *no* es la gráfica de $z = f(x, y)$, que se representaría en el espacio tridimensional. ■

También podemos considerar funciones con «infinitos escalones» (no las incluiremos bajo el término *funciones escalonadas*), $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j \chi_{B_j} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en donde $B_1, B_2, \ldots$ son intervalos n dimensionales de $\mathbb{R}^n$, mientras que $\beta_1, \beta_2, \cdots \in \mathbb{R}$. En este caso, el dominio de f está formado por los $x \in \mathbb{R}^n$ para los que la serie $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j \chi_{B_j}(x)$ es absolutamente convergente.

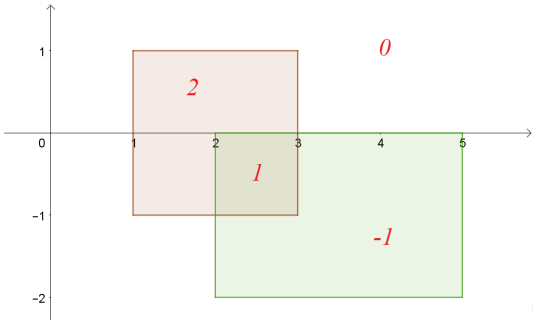


Figura 13. En rojo, valores de la función f del ejercicio 38.

Ejemplo 39. La *función rectangular*, $\operatorname{rect}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (también conocida como *pulso unitario*) se define como $\operatorname{rect}(t) = \chi_{[-1/2,1/2]}(t) - \frac{1}{2}\chi_{[-1/2,-1/2]}(t) - \frac{1}{2}\chi_{[1/2,1/2]}(t)$. Algunos autores la definen de distinta manera en los puntos $x = \pm 1/2$, por ejemplo, $\operatorname{rect}(t) = \chi_{[-1/2,1/2]}(t)$.

El *tren de pulsos* de periodo $T > 0$ y *ciclo de trabajo* $d \in [0,1]$, correspondiente a esta última definición sería $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[kT,(k+d)T]}$ ■

Ejemplo 40. La función *suelo* $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $\lfloor x \rfloor = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} j\chi_{[j,j+1)}(x)$. Obsérvese que $\lfloor x \rfloor = \max\{j \in \mathbb{Z} : j \leq x\}$, es decir $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que x. Por ejemplo, $\lfloor 3.66 \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor 0.99 \rfloor = 0$, $\lfloor -3.66 \rfloor = -4$, etc. ■

Ejemplo 41. La función *techo* $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $\lceil x \rceil = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} j\chi_{(j-1,j]}(x)$. Corresponde a $\lceil x \rceil = \min\{j \in \mathbb{Z} : j \geq x\}$, es decir $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil 3.66 \rceil = 4$, $\lceil 5 \rceil = 5$, $\lceil 0.99 \rceil = 1$, $\lceil -3.66 \rceil = -3$, etc. ■

Ejemplo 42. La función de *Dirichlet*, $\chi_{\mathbb{Q}}$, en donde $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es el conjunto de los números racionales, vale $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$, cuando x es racional, mientras que $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$, cuando x es irracional. El conjunto $\mathbb{Q}$ es *numerable*, es decir, existe una sucesión $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que $r(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $\chi_{\mathbb{Q}} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{[r(j),r(j)]}$.

La de Dirichlet es una función extraña: su dominio es $\operatorname{dom} \chi_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, su recorrido solo tiene dos valores, $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \{0,1\}$, y no es continua en ningún punto. Sin embargo, se puede expresar como límite de funciones de clase infinito:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m\to\infty} \chi_{\mathbb{Z}}(m!x) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} \cos^{2k}(m!\pi x) \right).$$

Obsérvese que $\lim_{k\to\infty} \cos^{2k}(\pi y) = \chi_{\mathbb{Z}}(y)$, pues $\cos^2(\pi y) = 1$, cuando $y \in \mathbb{Z}$, mientras que $0 \leq \cos^2(\pi y) < 1$, cuando $y \notin \mathbb{Z}$. ■

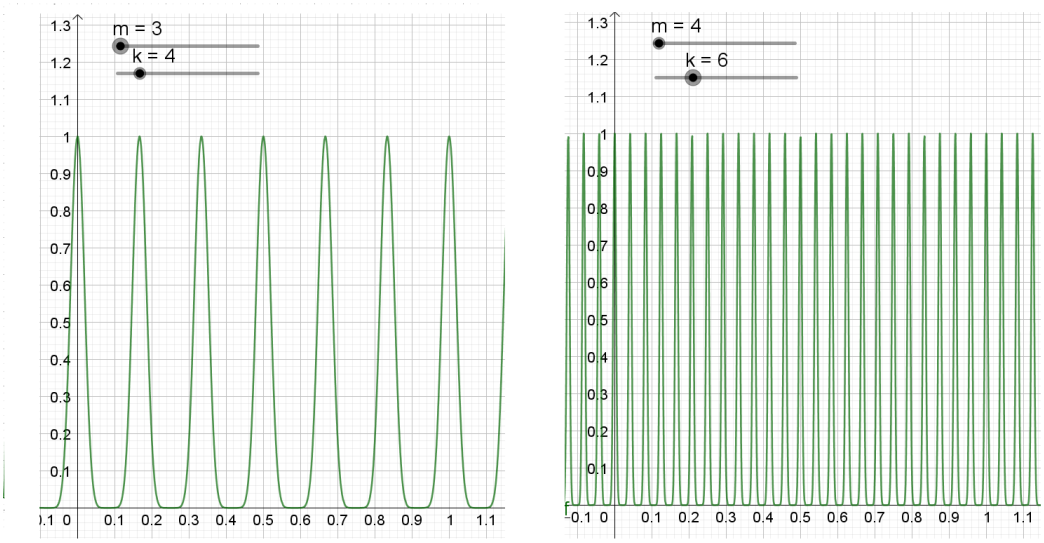


Figura 14. La función $y = \cos^{2k}(m!\pi x)$ para distintos valores de k, m (ejemplo 42).

CONTESTE AHORA AL CUESTIONARIO 5.

3. REPASO DE INTEGRACIÓN EN UNA DIMENSIÓN.

3.1. Integración de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Si pedimos a quienes hayan concluido un curso de cálculo que expliquen en una frase breve qué es la integral, probablemente nos encontraremos con respuestas del tipo «la integral es un área» o «integrar es lo contrario de derivar». Son representaciones mentales válidas, en el contexto adecuado. Por otra parte, las representaciones mentales pertenecen al ámbito privado; son palancas de uso individual para facilitar la comprensión y el aprendizaje.

Sin embargo, esas dos representaciones mentales son incapacitantes, bloquean la comprensión de la integración en cualquier marco más amplio que el estrechísimo para el que se han creado. Es mejor pensar que «integrar es sumar».

Si nos dan un saco de monedas y queremos saber el valor total, tenemos que sumar los valores de cada una. Si nos dan las monedas agrupadas en cartuchos (en cada uno, monedas del mismo valor), multiplicaremos el valor marcado en cada cartucho por el número de monedas que contiene y sumaremos todo (fig. 15).

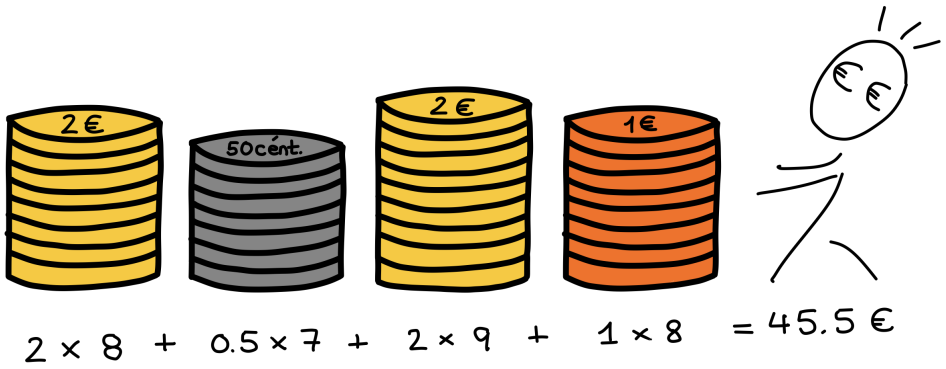


Figura 15. El valor total es la suma de los productos de los valores por el número de monedas.

En una integral $\int_a^b f(x)\,dx$, los valores de las monedas serían los $f(x)$, el número de monedas del cartucho sería dx, el número total de monedas sería $\int_a^b dx = b - a$, o sea, la amplitud del intervalo $[a, b]$, y el importe total sería $\int_a^b f(x)\,dx$.

La dificultad de formalizar esa idea reside en que, en una integral, podemos tener *infinitos* cartuchos con un número *infinitamente pequeño* de monedas cada uno. No sabemos, a primera vista, cómo lidiar con eso, pero hay un tipo particular de funciones para las que esta dificultad no existe: las funciones escalonadas.

Empezamos quitándonos de encima el engorro del recinto de integración $[a, b]$. Se defina como se defina la integral, $\int_a^b f(x)\,dx$ tendrá que coincidir con $\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)\,dx$, pues añadir o quitar ceros no altera la *suma*. Por lo tanto, al integrar, solo hay que fijarse en el soporte del integrando (pág. 35). Podemos concentrarnos en definir integrales en todo $\mathbb{R}$. Siguiendo el ejemplo de las monedas, resulta lógico definir la integral de la función escalonada $f = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$ como

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx := \sum_{j=1}^{m} \beta_j |B_j|, \tag{22}$$

en donde $|B_j|$ es la longitud del intervalo B_j.

Ejemplo 43. La integral de la función escalonada

$$f(x) = 2\chi_{[0,8]}(x) + 0.5\chi_{[8,15]}(x) + 2\chi_{[15,24]}(x) + \chi_{[24,32]}(x),$$

sobre el intervalo $[0, 32]$ es

$$\begin{aligned}\int_0^{32} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[0,32]}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \\ &= 2\times(8-0) + 0.5\times(15-8) + 2\times(24-15) + 1\times(32-24) = 45.5.\end{aligned}$$ ■

Ejemplo 44. Calculemos $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$, en donde $f = 7\chi_{[-4,2]} - 5\chi_{[-1,5]}$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[-2,3]}\,dx = \int_{\mathbb{R}} (7\chi_{[-2,2]}(x) - 5\chi_{[-1,3]}(x))\,dx \\ &= 7\times 4 - 5\times 4 = 8.\end{aligned}$$

Quien se aferre a la idea de que *la integral es un área*, todavía podrá hacer esa integral, pero seguramente necesitará representar $y = f(x)$ (ver figura 16). ■

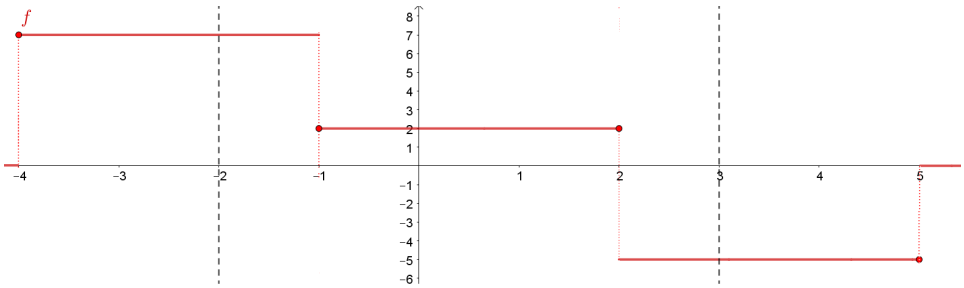


Figura 16. La integral del ejemplo 44 es $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 7\times 1 + 2\times 3 - 5\times 1 = 8$

Podría parecer que estamos aún muy lejos de definir la integral en general, porque la mayoría de las funciones no son escalonadas. Sin embargo, estamos solo a un paso, porque las funciones que se pueden integrar son las que se pueden aproximar mediante funciones escalonadas. Veamos cómo es eso.

- Denominamos *integral inferior* de f al *supremo* de las integrales de las funciones escalonadas *menores* que f.
- Denominamos *integral superior* de f al *ínfimo* de las integrales de las funciones escalonadas *mayores* que f.

I.5: Integral (de Riemann) de una función real

Si coinciden las integrales inferior y superior de una función f, ese valor se denomina *integral* de f y se denota por $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ o por $\int_{\mathbb{R}} f$.
Definimos la integral de f en $[a,b]$, en donde $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, mediante

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)\,dx, \tag{23}$$

siempre que exista la integral de la derecha.
Se dice que una función es *integrable* en $[a,b]$ si su integral existe y, además, es finita; es decir, si $-\infty < \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$.

El procedimiento habitual es definir la integral de Riemann solamente para integrandos acotados (para evitar que salgan valores infinitos al considerar supremos e ínfimos) y considerar como recintos de integración solo intervalos acotados (para que el recinto de integración coincida con la unión de intervalos de los escalones). En etapas posteriores, se van haciendo ñapas para cubrir ciertos casos en los que, o bien el recinto, o bien los valores del integrando, no estén acotados (a eso se les llama *integrales impropias*, en este contexto), porque son absolutamente imprescindibles en las aplicaciones.

Es importante observar que las definiciones de *integral inferior*, *integral superior* e *integral* sirven, sin modificaciones, para funciones de varias variables. Lógicamente, las funciones escalonadas estarán definidas, en ese caso, mediante intervalos multidimensionales (bidimensionales, si el integrando tiene dos variables, tridimensionales, si tiene tres; n–dimensionales, si tiene n variables).

Vemos que las funciones integrables son las que se pueden aproximar adecuadamente mediante funciones escalonadas. El mismo concepto de continuidad sugiere que las funciones continuas se pueden aproximar mediante funciones escalonadas en intervalos acotados ($-\infty < a < b < +\infty$). De hecho, basta con que el conjunto de puntos de discontinuidad sea *pequeño*: una función acotada en un intervalo acotado es integrable en él (en el sentido de Riemann) si y solo si la «longitud» del conjunto de los puntos de discontinuidad en $[a,b]$ es cero.

Ejemplo 45. El ejemplo típico de función no integrable en ningún intervalo (en el sentido de Riemann) es la función de Dirichlet (ejemplo 42), que es discontinua en todos los puntos. Para esta función, la integral inferior vale 0 (porque cualquier intervalo contiene números irracionales), mientras que la integral superior vale 1 (porque cualquier intervalo contiene números racionales). ■

Para el ingeniero, la noción de integral es más una herramienta de comprensión que un procedimiento para echar cuentas, es decir, es mucho más importante entender qué es la integral, saber leer un texto científico-tecnológico en el que aparezcan integrales, que aprenderse recetas para calcularlas. Al fin y al cabo, la mayor parte de esos cálculos se harán con el apoyo de sistemas algebraicos computacionales o de cálculo numérico. El estudiante sí que tiene que echar esas cuentas como procedimiento para alcanzar una mayor comprensión de los conceptos.

Ejemplo 46. Un alambre rectilíneo de longitud l se calienta por uno de sus extremos, en el que convencionalmente situamos el origen de la variable espacial x. Si $T(x,t)$ denota la temperatura en el punto x, en el instante t, medido desde $t=0$ hasta $t=t_1$, ¿cómo interpretamos las siguientes expresiones?

$$I_1(t)=\frac{\int_0^l T(x,t)\,dx}{\int_0^l dx} \qquad ; \qquad I_2(x)=\frac{\int_0^{t_1} T(x,t)\,dt}{\int_{t_0}^{t_1} dt}.$$

Si se ha comprendido la noción de integral como suma, se pueden interpretar las expresiones sin necesidad de haber estudiado física.

En la primera, la variable t está fijada fuera de la integral (internamente es como si fuera una constante). Al integrar respecto de la variable espacial, nos imaginamos el alambre dividido en eslabones de amplitud δ, en cada uno de los cuales la temperatura es la misma en todo punto. La integral sería

$$\frac{\sum_{j=1}^N T(x_j,t)\delta}{\sum_{j=1}^N \delta}=\frac{\delta\sum_{j=1}^N T(x_j,t)}{N\delta}=\frac{\sum_{j=1}^N T(x_j,t)}{N},$$

es decir, la suma de las temperaturas dividida entre el número de sumandos, luego, $I_1(t)$ es la temperatura media del alambre entero en el instante t.

En la segunda, es el intervalo temporal $[0,t_1]$ el que dividimos mentalmente en eslabones, de manera que $I_2(x)$ es la temperatura media del alambre medida en el punto x durante el intervalo temporal $[0,t_1]$. ■

El enfoque de Riemann para definir la integral consiste, como hemos visto, en aproximar el integrando mediante funciones escalonadas. Más adelante, extenderemos esta noción de integral al permitir que las funciones escalonadas tengan un número infinito de escalones. Este enfoque conduce a la integral en el sentido de Lebesgue. Esta teoría tiene la ventaja, entre otras, de que resulta imposible construir ejemplos de funciones acotadas no integrables en intervalos acotados (con lo que desaparece una complicación en

las aplicaciones). El inconveniente es que resulta mucho más difícil demostrar con todo rigor los resultados, pero eso no nos preocupa en este curso, porque nos conformamos con justificarlos, sin llegar, en todos los casos, a demostraciones rigurosas.

Por supuesto, la extensión del concepto se hará en varias direcciones: no solo al permitir infinitos escalones (lo que afecta poco a la práctica), sino al integrar respecto de varias variables e incluso sobre curvas y superficies.

3.2. Cálculo diferencial integral intuitivo en $\mathbb{R}$.

La noción de límite es la base para definir buena parte de los conceptos del cálculo. Sin embargo, históricamente la noción de límite (esencialmente, la noción de supremo) es posterior a los conceptos y resultados básicos del cálculo.

Originalmente los razonamientos dependían del empleo de *infinitésimos* (cantidades no nulas, menores, en valor absoluto, que cualquier número real positivo). Pero esos infinitésimos no pueden ser números reales (se llega a contradicciones si se asume que lo son), lo que daba lugar a inconsistencias en la teoría. Hoy, ya es posible definir los infinitésimos con rigor, aunque su formulación precisa es excesivamente abstracta. Sin embargo, puede resultar muy útil razonar con infinitésimos a nivel intuitivo, para facilitar la comprensión y la aplicación de los conceptos que estudiamos con más rigor a través de la noción de límite.

Fijemos mentalmente un infinitésimo δ e imaginemos el intervalo $[a, b]$ dividido (como los eslabones de una cadena) en intervalos $J = [x_0, x_0 + \delta]$ de longitud δ.

Podemos imaginarnos la diferencial dg de una función g como una especie de escáner que recorre el intervalo $[a, b]$ y, al detectar uno de los intervalos $J = [x_0, x_0 + \delta]$, devuelve el valor infinitesimal $(dg)\langle J\rangle = g'(x_0)\delta = \frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}\delta = g(x_0 + \delta) - g(x_0)$, que es una diferencia de valores: de ahí el nombre de diferencial, porque, a nivel infinitesimal intuitivo, es una diferencia, una resta.

Integrar es sumar, así que imaginamos la integral $\int_a^b dg$ como la suma de todos los infinitos valores infinitesimales $dg\langle J\rangle$ para todos los infinitos eslabones $J \subset [a, b]$ de la cadena de intervalos infinitesimales. Cada extremo aparece en dos intervalos: en uno, como punto inicial y, en otro, como punto final. Así, se cancelan todos, menos el primero y el último:

$$\int_a^b dg = dg\langle[a, a + \delta]\rangle + dg\langle[a + \delta, a + 2\delta]\rangle + \cdots + dg\langle[b, b - \delta\rangle]$$

$$= (\cancel{g(a+\delta)} - g(a)) + (g(a+2\delta) - \cancel{g(a+\delta)}) + \cdots + (g(b) - \cancel{g(b-\delta)})$$
$$= g(b) - g(a).$$

Esta, y no otra, es la idea intuitiva que subyace tras cualquier versión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). La diferencia $g(b) - g(a)$ frecuentemente se denota mediante $g(b) - g(a) = [g]_a^b$, o también mediante $g(b) - g(a) = [g(x)]_{x=a}^{x=b}$, etc.

I.6: TFC para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase uno, entonces $\displaystyle\int_a^b dg = [g]_a^b$. (TFC)

Si dividimos la cantidad infinitesimal $g(x_0 + \delta) - g(x_0)$ entre δ, obtenemos el número $g'(x_0)$ (la derivada). Como $dg = g'(x)\,dx$, la expresión de I.6 se puede escribir así: $\displaystyle\int_a^b g'(x)\,dx = [g(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Ejemplo 47. Cuando *hacemos integrales* estamos aplicando I.6, puede que sin darnos cuenta. Por ejemplo, si tenemos que hallar $\int_3^5 (x+1)^2\,dx$, buscamos una función g cuya derivada sea $g'(x) = (x+1)^2$. Leyendo al revés la tabla de derivadas, encontramos $g(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3$. Luego, aplicamos I.6, para obtener

$$\int_3^5 (x+1)^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}(x+1)^3\right]_{x=3}^{x=5} = \left[\tfrac{1}{3}(5+1)^3\right] - \left[\tfrac{1}{3}(3+1)^3\right] = 152/3. \quad \blacksquare$$

CONTESTE AHORA AL CUESTIONARIO 6.

Lecturas y actividades recomendadas para el tema I.

Las notaciones y la terminología de la Teoría de Conjuntos constituyen, hoy en día, la base común a muchas áreas de las matemáticas. Quien se interese por esa teoría, puede consultar una introducción en el libro [9]. En el momento de redactar esta nota, se podía acceder al documento, libre y legalmente, en la dirección indicada en la sección de Bibliografía.

El lector interesado en una presentación moderna y, más o menos, rigurosa del Cálculo no estándar (teoría de infinitesimales), puede consultar [4].

Si se desea una presentación rigurosa del cálculo infinitesimal clásico, una buena opción es [10].

ÍNDICE ALFABÉTICO DE TÉRMINOS

Abierto, conjunto, 37
Absolutamente convergente, serie, 47
Absolutamente sumable, sucesión, 47
Acotado, conjunto, 37
Adherencia de un conjunto, 37
Analítica, función real, 52
Aplicación, 23
Aproximación de números reales por racionales, 22
Armónica, serie, 48

Base canónica, 31
Binomio de Newton, 25
Biyectiva, función, 23

Canónica, base, 31
Característica, función, χ_A, 53
Cerrado, conjunto, 37
Cerrado, intervalo, 22
Clase k, función, 45
Clase cero, función, 45
Clase dos, función, 45
Clase infinito, función, 45
Clase uno, función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, 45
Compacto, conjunto, 37
Componentes de una función, 34
Composición de funciones, 36
Conexo, conjunto, 40
Conjunto
    abierto, 37
    acotado, 37
    cerrado, 37
    compacto, 37

conexo, 40
conexo por caminos, 40
convexo, 41
finito, 21
infinito, 21
numerable, 21
vacío, 20
Continua en un punto, función real, 38
Continua, función real, 39
Convergente
serie, 47
sucesión, 28
Convexo, conjunto, 41
Cota inferior de un conjunto, 22
Cota superior de un conjunto, 22
Cuaterna ordenada, 24
Cuerpo, 21
Cuerpo ordenado, 21

Derivable, función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, 41
Diferenciable, función, 45
Dirichlet, función de, 57
Discontinuidad, 39
Discontinuidad evitable, 39
Distancia, 34
euclídea, 34
Dominio de una función, 23

Escalar, producto, 34
Escalonada, función, 55
Euclídea, distancia, 34
Evitable, discontinuidad, 39

Factorial de un número, 25
Familia, 23
monótona, 36
Frontera de un conjunto, 37
Función, 23
analítica, 52

biyectiva, 23
característica de un conjunto, χ_A, 53
como diferencia de dos no negativas, 36
continua (real), 39
continua en un punto (real), 38
de clase k, 45
de clase cero, 45
de clase dos, 45
de clase infinito, 45
de clase uno, 45
de Dirichlet, 57
derivable (real de variable real), 41
diferenciable, 45
escalón de Heaviside, 53
escalonada, 55
expresada por una sola fórmula, 35
integrable, de variable real en sentido de Riemann, 61
inyectiva, 23
no negativa, 36
pulso unitario, 57
rectangular, 57
seno cardinal, 52
suelo, 57
techo, 57
Función continua en un punto, 28

Gráfica de una función, 35
Gradiente, 46

Heaviside, función, 53

Imagen de un subconjunto, 23
Imagen inversa de un subconjunto, 23
Impropia, integral en sentido de Riemann, 61
Ínfimo, 22
Infinitésimo, 63
Infinito, conjunto, 21
Infinito, puntos del, 27
Integrable, función de variable real en sentido de Riemann, 61

Integral
de Riemann de una función de variable real, 61
impropia en sentido de Riemann, 61
inferior, 60
superior, 60
Interior de un conjunto, 37
Intervalo
abierto, 22
acotado, 27
bidimensional, 31
cerrado, 22
n dimensional, 31
n dimensional abierto, 31
n dimensional semiabierto, 31
no acotado, 27
Inyectiva, función, 23
Irracional número, 22

Jacobiana, matriz, 42

Límite de una sucesión, 28
Llaves (notación), 20

Módulo
de un vector, 34
Matriz, 31
jacobiana, 42
singular, 33
Monótona
familia, 36
sucesión, 27
Multifunción, 23

Número
irracional, 22
racional, 21
Número combinatorio, 25
Numerable, conjunto, 21
n-tupla ordenada, 24

Orden
    parcial, 20
    total, 20, 36
Ordenado, cuerpo, 21

Par ordenado, 24
Producto
    cartesiano de conjuntos, $\times$, 24
    escalar, 34
Progresión aritmética, suma, 25
Progresión geométrica, suma, 25

Racional, número, 21
Radio de convergencia, 51
Real, recta, 22
Recorrido de una función, 23
Recta real, 22
Región de $\mathbb{R}^n$, 40
Restricción de una función a un conjunto, 35

Seno cardinal, función, 52
Serie, 47
    absolutamente convergente, 47
    armónica, 48
    bilátera, 50
    convergente, 47
    de potencias, 51
    trigonométrica, 50
Singular, matriz, 33
Soporte de una función, 35
Subconjunto de un conjunto, 20
Subfamilia, 23
Subsucesión, 26
Sucesión, 26
    absolutamente sumable, 47
    convergente, 28
    creciente, 27
    decreciente, 27
    monótona, 27

sumable, 47
Suelo, función, 57
Suma de una progresión aritmética, 25
Suma de una progresión geométrica, 25
Sumable, sucesión, 47
Supremo, 22

Techo, función, 57
Teorema
fundamental del cálculo, 64
Terna ordenada, 24
TFC, Teorema Fundamental del Cálculo, 64
Total, orden, 36

Vacío, conjunto, 20
Variables de una función, 34

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$: números naturales, 21
$\mathbb{Z}$: números enteros, 21
$\mathbb{Q}$: números racionales, 21
$\mathbb{R}$: números reales, 22
$\mathbb{R}^n$: n-tuplas de números reales. Se identifica $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n\times 1}$, 30, 34
$\mathbb{R}^{n\times m}$: espacio de matrices de orden $n \times m$ (n filas, m columnas), 32
$\mathbb{R}^{n\times 1}$: espacio de matrices columna $n \times 1$. Se identifica $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$, 32
$(\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n))^m$: funciones de clase k con n variables y m componentes reales, 45
$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: funciones reales continuas con n variables, 45
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$: funciones reales de clase k con n variables, 45
$[a, b]$: intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, 22
$\begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix}$: matrices. En este manual las matrices van entre corchetes, 32
(a, b): intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Notación coincidente con la de par ordenado, 22
(a, b): par ordenado. Por definición, $(a, b) = [a\ b]^T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 24
(a, b, c): terna ordenada, 24
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: n-tupla ordenada, 24

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_n]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, 34$$

$\leq$: menor o igual que, 21
$<$: menor que, 20
$\overline{M}$: adherencia de un conjunto M, el menor cerrado que contiene a M, 37
$\mathring{M}$: interior de un conjunto M, el mayor abierto contenido en M, 37
$\mathrm{Fr}(M)$: frontera de un conjunto M, es $\overline{M} \setminus \mathring{M}$, 37
$m!$: factorial del natural m, 25
χ_A: función característica de A, 53
$\mathrm{dom}\, f$: dominio de la función f, 23
$\emptyset$: conjunto vacío, 20
$\setminus$: complemento relativo. No confundir $A \setminus B$ con $A - B$, 25
$\subset$ o $\subseteq$: contenido, 20

$\{\dots\}$: llaves, 20
$\in$: pertenece, 20
$\cap$: intersección de conjuntos, 24
$\cup$: unión de conjuntos, 24
$\notin$: no pertenece, 20
$\mathcal{E} = [\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_n]$: base canónica, 31
$\times$: producto cartesiano. Notación coincidente con el producto vectorial, 24
$f : X \rightarrowtail Y$: función de un subconjunto de X en Y; es decir, $\operatorname{dom} f \subset X$, 23
$f : X \to Y$: función de X en Y; es decir, $\operatorname{dom} f = X$, 23
$f(A)$: imagen de $A \subset X$; es $f(A) = \{f(x) : x \in A \cap \operatorname{dom} f\}$, 23
$f^{-1}(B)$: imagen inversa de $B \subset Y$; es $f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f \colon f(x) \in B\}$, 23
$+\infty$: punto del infinito $\sup \mathbb{R}$, 27
$-\infty$: punto del infinito $\operatorname{ínf} \mathbb{R}$, 27
∞: $\{+\infty, -\infty\}$ como un solo punto, 27
∞ en vez de $+\infty$, notación alternativa (solo en $\mathbb{R}$), 27
$\pm\infty$ en vez de ∞, notación alternativa (solo en $\mathbb{R}$), 27
$\binom{m}{k}$: número combinatorio, 25

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill Book Company, 2nd edition, 1966.

[2] Bombal Gordón, F., L. Rodríguez Marín y G. Vera Botí: *Problemas de análisis matemático. Cálculo integral. Tomo III*. Editorial AC, Madrid, primera edición, 1987.

[3] Courant, R. and F. John: *Introduction to Calculus and Analysis*. Number 1 in *A Wiley-Interscience publication*. Interscience Publishers, 1965.

[4] Keisler, H.J.: *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2012.

[5] Kreyszig, E.: *Matematicas avanzadas para ingeniería*. Limusa, México, D.F., segunda edición, 1980.

[6] Marsden, J. E. y A.J. Tromba: *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley, Madrid, 1987.

[7] Mikusinski, P. and M.D. Taylor: *An Introduction to Multivariable Analysis from Vector to Manifold*. Springer Nature Book Archives Millennium. Birkhäuser Boston, 2002.

[8] Rodríguez Marín, L.: *Ampliación de cálculo. Segunda parte. Cálculo integral, funciones de variable compleja*. UNED, 1997.

[9] Roitman, J.: *Introduction to Modern Set Theory*. A Wiley-interscience publication. Wiley, 1990. `https://www.people.vcu.edu/~clarson/roitman-set-theory.pdf`.

[10] Spivak, M., J.M.O. Sala y L.S. Camó: *Calculus*. Reverte, 2019.