Universidad Nacional de Educación a Distancia
Universidad Complutense de Madrid

Máster Universitario en Ingeniería de Sistemas y de Control

Trabajo Fin de Máster

Estudios sobre el Péndulo Invertido Rotacional y el Péndulo Doble Invertido Rotacional

Autor: José Ramón Figuerola Aboy

Directores: Dictino Chaos García y Ernesto Aranda Escolástico

Curso 2022-23

Máster Universitario en Ingeniería de Sistemas y de Control

Trabajo Fin de Máster

Estudios sobre el Péndulo Invertido Rotacional y el Péndulo Doble Invertido Rotacional

Autor: José Ramón Figuerola Aboy

Directores: Dictino Chaos García y Ernesto Aranda Escolástico

Autorización

Autorizo a la Universidad Complutense de Madrid y a la UNED a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor, tanto la memoria de este Trabajo Fin de Máster como el código y la documentación desarrollados.

Fdo.

José Ramón Figuerola Aboy

DECLARACIÓN JURADA DE AUTORÍA DEL TRABAJO CIENTÍFICO

Quien suscribe hace constar que es el autor del trabajo:

Estudios sobre el Péndulo Invertido Rotacional y el Péndulo Doble Invertido Rotacional

En tal sentido, manifiesto la originalidad de la conceptualización del trabajo, interpretación de datos y la elaboración de las conclusiones, dejando establecido que aquellos aportes intelectuales de otros autores se han referenciado debidamente en el texto de dicho trabajo.

DECLARACIÓN:

- ✓ Garantizo que el trabajo que remito es un documento original y no ha sido publicado, total ni parcialmente, en otra revista.
- ✓ Certifico que he contribuido directamente al contenido intelectual de este manuscrito, a la génesis y análisis de sus datos, por lo cual estoy en condiciones de hacerme públicamente responsable de él.
- ✓ No he incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario, aceptaré las medidas disciplinarias sancionadoras que correspondan.

Fdo.

José Ramón Figuerola Aboy

Febrero de 2023

Resumen

En el presente Trabajo Fin de Máster se han desarrollado modelos matemáticos del péndulo invertido rotacional (péndulo de Furuta) y del péndulo doble invertido rotacional que tienen en cuenta el tensor completo de inercia. Se han estudiado soluciones estacionarias de las ecuaciones y la bifurcación del punto de equilibrio estable en el modelo de dimensión 2 para el péndulo simple y el de dimensión 4 para el péndulo doble.

Se han establecido relaciones entre los modelos matemáticos del péndulo invertido rotacional, el péndulo invertido sobre carro y el péndulo simple, así como entre el péndulo doble invertido rotacional y el péndulo doble sobre carro y el péndulo doble simple.

Se ha propuesto una función de conmutación y un criterio basado en la energía para la conmutación entre el control no lineal de levantamiento del péndulo y el lineal de estabilización.

Se han linealizado los modelos en torno a los puntos de equilibrio estables e inestables. Se han simulado diversas estrategias de control no lineal basadas en el control de la energía y de control lineal basadas en control óptimo LQR.

Se han generalizado al péndulo doble rotacional las estrategias de control de la energía de Åström y Furuta, basada en el método directo de Lyapunov, y la de Gordillo, Acosta y Aracil, basada en el método del pseudogradiente de velocidad de Fradkov.

Palabras clave

Péndulo invertido, péndulo invertido rotacional, péndulo de Furuta, modelado de sistemas dinámicos, sistemas dinámicos no lineales, control lineal, control no lineal, estabilidad de Lyapunov, pseudogradiente de Fradkov, caos, bifurcación de equilibrios en sistemas dinámicos

Contenidos

Índice de tablas ix

Índice de figuras x

Lista de símbolos xii

1. INTRODUCCIÓN 1

1.1 Breve reseña histórica y estado del arte 1

1.2 Objetivos del trabajo 3

2. MODELO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL 5

2.1 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Lagrange. Energía del sistema 8

2.2 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Hamilton 11

2.3 Puntos de equilibrio 14

2.4 Modelos en el espacio de estados 15

2.4.1 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo lagrangiano 16

2.4.2 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo hamiltoniano 17

2.5 Linealización del modelo 18

2.5.1 Reducción de ángulos al intervalo $[\theta_{i0} - \pi, \theta_{i0} + \pi)$ 19

2.5.2 Linealización en torno al punto de equilibrio estable abajo 20

2.5.3 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable arriba 22

2.6 Estudio del modelo no lineal y análisis de casos particulares 23

2.6.1 Soluciones estacionarias. Puntos de equilibrio del modelo de dimensión 2 equivalente. Velocidad angular crítica. Bifurcación supercrítica del punto de equilibrio estable 23

2.6.2 Momento de inercia del brazo grande. Modelo de dimensión 2. Formalismo hamiltoniano del modelo de dimensión 2 25

2.6.3 Longitud del brazo grande. Péndulo invertido sobre carro 28

2.6.4 Aceleración angular del brazo pequeña. Potencial efectivo. Transición atractivo-repulsivo 29

2.6.5 Aceleración y velocidad angular del brazo pequeñas. Brazo inmóvil. Par de reacción. Péndulo simple 31

2.6.6 Aceleración angular del brazo pequeña. Par de control para velocidad angular del brazo constante 32

2.7 Sistema actuador. Motor DC y tren de engranajes 33

2.8 Parámetros del modelo utilizado en las simulaciones 34

2.9 Simulaciones: bifurcación supercrítica, dependencia de la frecuencia de oscilación con la velocidad angular del brazo. Análisis de resultados 35

3. CONTROL DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL 38

3.1 Levantamiento del péndulo (swing-up) 38

3.1.1 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2 38

3.1.2 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2 con compensación de pares de reacción ... 40

3.1.3 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2 con compensación de pares de reacción y de fricción viscosa ... 40

3.1.4 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2 con compensación de pares de reacción y potencial efectivo ... 42

3.1.5 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4. Pseudogradiente de velocidad ... 42

3.1.6 Simulaciones. Análisis de resultados ... 44

3.2 Estabilización del péndulo. Control LQR ... 52

3.2.1 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio inestable ... 53

3.2.2 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio estable ... 53

3.2.3 Simulaciones. Análisis de resultados ... 54

3.3 Conmutación entre los modos de control levantamiento-estabilización ... 56

3.3.1 Función sigmoide como función de conmutación ... 56

3.3.2 Conmutación entre los controles levantamiento-estabilización por energía y por ángulo 57

3.3.3 Conmutación entre los controles bajada-estabilización por energía y por ángulo 58

3.3.4 Relación entre los modos de conmutación por energía y por ángulo ... 59

3.3.5 Simulaciones. Análisis de resultados ... 59

3.4 Bajada del péndulo (swing-down) ... 62

3.4.1 Sin acción de control ... 63

3.4.2 Brazo inmóvil ... 63

3.4.3 Ley de control de la energía con compensación de pares de reacción ... 63

3.4.4 Ley de control de la energía con compensación de pares de reacción y conmutación a control LQR de estabilización ... 63

3.4.5 Simulaciones. Análisis de resultados ... 64

4. MODELO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO DOBLE INVERTIDO ROTACIONAL ... 72

4.1 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Lagrange. Energía del sistema ... 74

4.2 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Hamilton ... 76

4.3 Puntos de equilibrio ... 78

4.4 Modelo en el espacio de estados ... 79

4.4.1 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo lagrangiano ... 79

4.4.2 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo hamiltoniano ... 80

4.5 Linealización del modelo ... 80

4.5.1 Reducción de ángulos al intervalo $[\theta_{10} - \pi, \theta_{10} + \pi)$ ... 80

4.5.2 Linealización en torno al punto de equilibrio estable abajo-abajo ... 81

4.5.3 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable arriba-arriba 82
4.5.4 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable abajo-arriba 83
4.5.5 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable arriba-abajo 83
4.6 Estudio del modelo no lineal y análisis de casos particulares 84
4.6.1 Soluciones estacionarias Velocidad angular crítica. Bifurcación supercrítica del punto de equilibrio estable 85
4.6.2 Masa, momento de inercia y coeficiente de fricción del segundo péndulo pequeños. Péndulo invertido rotatorio simple 88
4.6.3 Momento de inercia del brazo grande. Modelo de dimensión 4. Formalismo hamiltoniano del modelo de dimensión 4 88
4.6.4 Longitud del brazo grande. Péndulo doble invertido sobre carro 92
4.6.5 Aceleración angular del brazo pequeña. Potencial efectivo 95
4.6.6 Aceleración y velocidad angular del brazo pequeñas. Brazo inmóvil. Péndulo doble 96
4.6.7 Aceleración angular del brazo pequeña 97
4.7 Sistema actuador. Motor DC y tren de engranajes 98
4.8 Parámetros del modelo utilizado en las simulaciones 99
4.9 Simulaciones: bifurcación supercrítica. Análisis de resultados 99
5. CONTROL DEL PÉNDULO DOBLE INVERTIDO ROTACIONAL 101
5.1 Levantamiento del péndulo (swing-up) 101
5.1.1 Evolución del sistema dinámico en *E*=0. Secciones de Poincaré 101
5.1.2 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4 103
5.1.3 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4 con compensación de pares de reacción 104
5.1.4 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4 con compensación de pares de reacción y de fricción viscosa 106
5.1.5 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4 con compensación de pares de reacción y potencial efectivo 108
5.1.6 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 6. Pseudogradiente de velocidad 108
5.1.7 Simulaciones. Análisis de resultados 109
5.2 Estabilización del péndulo. Control LQR 117
5.2.1 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio inestable arriba-arriba 118
5.2.2 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio estable abajo-abajo 118
5.2.3 Simulaciones. Análisis de resultados 119
5.3 Conmutación entre los modos de control levantamiento-estabilización 122
5.3.1 Simulaciones. Análisis de resultados 122

Conclusiones 125
Trabajo futuro 126
Referencias 127

Índice de tablas

Tabla 2.1: Parámetros del modelo del péndulo invertido rotacional 35
Tabla 2.2: Parámetros del modelo del actuador 35
Tabla 4.1: Parámetros del modelo del péndulo doble invertido rotacional 100

Índice de figuras

Figura 1.1.1: Ejemplo de aplicación del modelo de péndulo invertido: etapa inicial del lanzamiento de un cohete. 1

Figura 1.1.2: Ejemplos de péndulo invertido sobre carro y péndulo rotacional invertido o péndulo de Furuta 2

Figura 1.1.3: Ejemplo de péndulo doble rotacional invertido 2

Figura 2.1.0: Péndulo invertido rotacional: geometría y convenciones adoptadas 5

Figura 2.7.1: Modelo electromecánico equivalente del sistema motor DC-tren de engranajes 33

Figura 3.2.1: Control LQR para la estabilización del péndulo en su posición de equilibrio inestable 56

Figura 3.2.2: Control LQR para la estabilización del péndulo en su posición de equilibrio estable 57

Figura 3.3.1: Representación gráfica de la función sigmoide para varios parámetros 58

Figura 3.3.2: Levantamiento del péndulo y conmutación a control estabilizador LQR. Ley de control de la energía con compensación de pares de reacción y de términos de fricción viscosa 62

Figura 3.3.3: Levantamiento del péndulo y conmutación a control estabilizador LQR. Ley de control de la energía, variante 2 63

Figura 3.4.1: Bajada del péndulo sin acción de control (V=0) 67

Figura 3.4.2: Bajada del péndulo sin acción de control (tm0=0) 68

Figura 3.4.3: Bajada del péndulo con brazo inmóvil 69

Figura 3.4.4: Bajada del péndulo con ley de control de la energía con compensación de pares de reacción 70

Figura 3.4.5: Bajada del péndulo con ley de control de la energía con compensación de pares de reacción y conmutación a control LQR de estabilización 72

Figura 4.1.0: Péndulo doble invertido rotacional: geometría y convenciones adoptadas Fuente: elaboración propia. 73

Figura 4.9.1: Bifurcación supercrítica del punto de equilibrio estable. Péndulo doble 101

Figura 5.1.1: Secciones de Poincaré del péndulo doble en función de la energía 103

Figura 5.1.2: Simulación de la generalización al péndulo doble de la ley de control de la energía 115

Figura 5.1.3: Simulación de la generalización al péndulo doble de la ley de control de la energía en su variante con signo, con compensación de los pares de reacción 116

Figura 5.1.4: Simulación de la generalización al péndulo doble de la ley del pseudogradiente de velocidad de Fradkov 118

Figura 5.2.1: Control LQR para la estabilización del péndulo doble en su posición de equilibrio inestable 121
Figura 5.2.2: Control LQR para la estabilización del péndulo doble en su posición de equilibrio estable 122
Figura 5.3.1: Levantamiento del péndulo doble y conmutación a control estabilizador LQR. Ley de control de la energía en su variante con signo, con compensación de pares de reacción 125

Lista de símbolos

Símbolo	Descripción	Unidades
E	Energía	J
Er	Energía de referencia	J
g	Aceleración de la gravedad	ms^{-2}
J_{0zz}	Momento de inercia del brazo-eje z	kgm^2
J_{1xx}	Momento de inercia del péndulo-eje x	kgm^2
J_{1yy}	Momento de inercia del péndulo-eje y	kgm^2
J_{1zz}	Momento de inercia del péndulo-eje z	kgm^2
J_{2xx}	Momento de inercia del segundo péndulo-eje x	kgm^2
J_{2yy}	Momento de inercia del segundo péndulo-eje y	kgm^2
J_{2zz}	Momento de inercia del segundo péndulo-eje z	kgm^2
k_g	Relación de transmission tren de engranajes	-
k_m	Constante de fuerza electromotriz	Vs
k_t	Constante de par del motor	NmA^{-1}
k_s	Constante de conmutación	-
l_0	Longitud al centro de masas del brazo	m
l_1	Longitud al centro de masas del péndulo	m
l_2	Longitud al centro de masas del segundo péndulo	m
L_0	Longitud del brazo	m
L_1	Longitud del péndulo	m
L_2	Longitud del segundo péndulo	m
L_m	Inductancia motor	H
r_t	Factor de conmutación	-
R_m	Resistencia motor	Ω
m_0	Masa del brazo	kg
m_1	Masa del péndulo	kg
m_2	Masa del segundo péndulo	kg
u	Ley de control	Nm o s^{-2}
U	Energía potencial	J
U_t	Energía de conmutación	J
V	Función de Lyapunov, función objetivo	J
V_{nom}	Voltaje nominal del motor	V
V_s	Voltaje de alimentación del motor	V
δ_0	Coeficiente amortiguamiento brazo	Nms
δ_1	Coeficiente amortiguamiento péndulo	Nms

δ_2	Coeficiente amortiguamiento segundo péndulo	Nms
θ_0	Ángulo que forma el brazo con el sistema de referencia	
θ_1	Ángulo que forma el péndulo con la vertical	
θ_2	Ángulo que forma el segundo péndulo con la vertical	
η_g	Eficiencia del tren de engranajes	-
η_m	Eficiencia del motor	-
σ	Función de conmutación	

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Breve reseña histórica y estado del arte

La primera referencia al péndulo invertido data de 1966 [2], si bien su introducción en los laboratorios de control podría haber tenido lugar ya en la década de 1950 [8], habiendo sido ampliamente utilizado desde entonces como herramienta didáctica y como banco de pruebas para evaluar y verificar todo tipo de algoritmos de control [1].

El péndulo invertido es un ejemplo clásico de sistema no lineal subactuado e inherentemente inestable, siendo estas características, junto con su estructura simple, las que lo han llevado a ser un sistema tan popular [3].

Este sistema tiene además importantes aplicaciones prácticas, siendo utilizado para el modelado del vuelo de cohetes y misiles en la etapa inicial del lanzamiento [1, 5] (Figura 1.1.1), así como de brazos robóticos, vehículos de transporte personal Segway, humanoides bípedos y sismógrafos, entre otras [4].

Figura 1.1.1: Ejemplo de aplicación del modelo de péndulo invertido: etapa inicial del lanzamiento de un cohete. Crédito: NASA

Las implementaciones más comunes del sistema de péndulo invertido son el péndulo invertido sobre carro, el péndulo rotacional invertido (péndulo de Furuta), el péndulo doble invertido sobre carro, el pendubot y el acrobot, entre otros. Se muestran en la Figura 1.1.2 ejemplos de péndulo invertido sobre carro y de péndulo rotacional invertido. Versiones menos comunes son el péndulo doble rotacional invertido, el péndulo doble paralelo invertido, el péndulo esférico invertido, el péndulo triple invertido y el péndulo cuádruple invertido [3]. En la Figura 1.1.3 puede verse un ejemplo de péndulo doble rotacional invertido.

El péndulo rotacional invertido, conocido también como péndulo de Furuta, fue desarrollado en los años 90 en el Instituto de Robótica de Tokio por Katsuhisa Furuta y sus colaboradores,

con el objeto de superar la limitación que supone tener una longitud finita de carril en el sistema de péndulo invertido sobre carro [7, 25]. Cabe señalar que el péndulo rotacional invertido presenta una dinámica muy rápida, y un grado de no linealidad muy elevado debido a la existencia de fuerzas centrífugas y de Coriolis, inexistentes en el péndulo invertido sobre carro, por lo que presenta un mayor desafío a las estrategias de control.

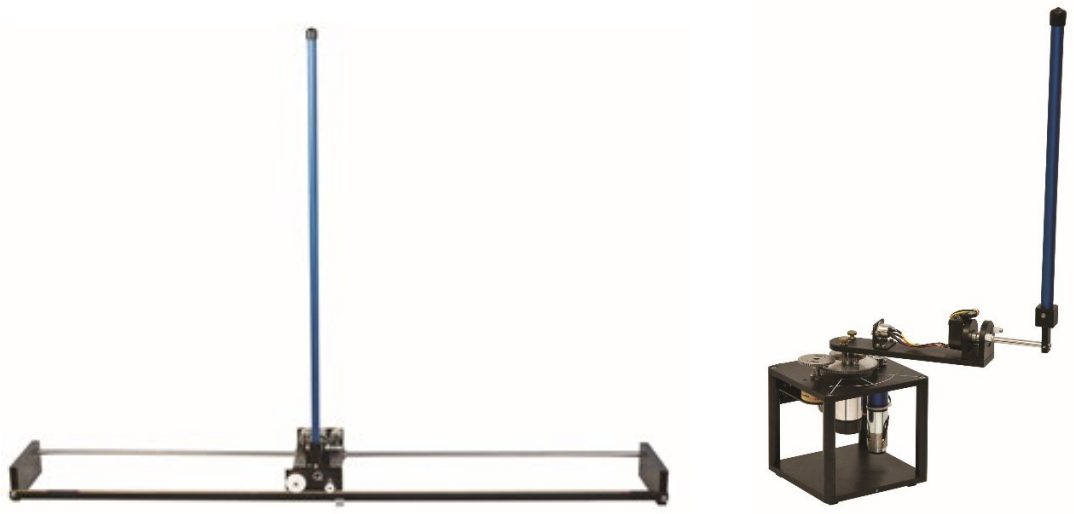


Figura 1.1.2: Ejemplos de péndulo invertido sobre carro (izquierda) y péndulo rotacional invertido o péndulo de Furuta (derecha). Crédito: Quanser Inc.

Figura 1.1.3: Ejemplo de péndulo doble rotacional invertido. Crédito: Quanser Inc.

Tanto el péndulo invertido simple como el rotacional presentan dos estados de equilibrio, uno estable (péndulo abajo) y otro inestable (péndulo levantado). En el caso del péndulo doble el número de estados de equilibro aumenta a cuatro, uno estable y otros tres inestables.

Si bien al principio las estrategias de control del péndulo invertido se limitaban al control local, estabilizándolo en su posición invertida de equilibrio inestable, posteriormente abarcaron también el levantamiento del péndulo (swing-up), siendo este último un problema de control no lineal global que requiere de técnicas completamente distintas, utilizándose típicamente una estrategia de conmutación de leyes de control o bien de parámetros para coordinar las fases de levantamiento y estabilización [7].

En lo que se refiere al levantamiento del péndulo es clásico el trabajo de Åström y Furuta [8], en el que proponen una estrategia efectiva y sencilla basada en el control de la energía del péndulo en lugar de controlar su posición y velocidad directamente. El levantamiento se logra aportando energía al sistema hasta que ésta se aproxima lo suficiente a la correspondiente a la configuración de péndulo levantado, instante en el que se conmuta a una estrategia de control local para estabilizarlo.

A pesar de que para el levantamiento del péndulo doble invertido se han propuesto diversas estrategias de control, por ejemplo [9, 10, 11, 12, 13], en la literatura revisada no se generaliza al péndulo doble la ley basada en el control de la energía utilizada por Åström y Furuta para el péndulo invertido simple.

Por otra parte, para el desarrollo, análisis e implementación de las estrategias de control es importante contar con un modelo matemático adecuado del sistema a controlar. Cazzolato y Prime [6] remarcan el hecho de que, si bien existen numerosas publicaciones en las que se desarrolla el modelo matemático del péndulo invertido rotacional, no en todas se tiene en cuenta el tensor completo de inercia, existiendo además en algunos casos errores en la formulación de los modelos, por lo que desarrolla de manera independiente, utilizando dos procedimientos diferentes para minimizar la posibilidad de error, un modelo matemático del péndulo de Furuta, de manera que pueda tomarse como referencia segura para futuros trabajos.

En el caso del péndulo doble rotacional invertido esta problemática se agudiza más todavía, y si bien Srinivas desarrolla un modelo matemático en el que considera el tensor de inercia completo utilizando una variación del algoritmo de Denavitt-Hartenberg [13], las expresiones que obtiene son poco manejables para el trabajo teórico.

1.2 Objetivos del trabajo

El presente trabajo tiene como principal objetivo el desarrollo y análisis de los modelos matemáticos del péndulo invertido rotacional y del péndulo doble invertido rotacional, así como la generalización al péndulo doble invertido rotacional de las estrategias de Åström y Furuta y de Gordillo, Acosta y Aracil para el levantamiento (swing-up) del péndulo.

Se establecerán también relaciones entre los distintos modelos matemáticos, y concretamente entre los sistemas sobre carro y rotacionales, y entre los sistemas simples y dobles, obteniéndose los primeros como casos particulares de los segundos.

Se han estudiado soluciones estacionarias de las ecuaciones y la bifurcación del punto de equilibrio estable en el modelo de dimensión 2 para el péndulo simple y el de dimensión 4 para el péndulo doble.

Estudiar la conmutación entre el control de levantamiento del péndulo y el control estabilizador mediante una función, tomando como criterio la energía.

Linealizar los modelos en torno a los puntos de equilibrio estables e inestables y diseñar controles LQR óptimos.

Generalizar al péndulo doble rotacional las leyes de control de energía de Åström y Furuta, de Gordillo, Acosta y Aracil.

2. MODELO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

El péndulo invertido rotacional o de Furuta (RIP, Rotary Inverted Pendulum) consta de un brazo horizontal que pivota en torno a un eje vertical, con un péndulo acoplado a uno de los extremos del brazo. Sobre el brazo actúa un par de control, mientras que el enlace entre el brazo y el péndulo no está actuado, por lo que éste puede girar libremente en torno a su eje de rotación.

Resulta así que el RIP tiene dos grados de libertad (el ángulo de brazo y el ángulo del péndulo), pero únicamente un actuador (el par que actúa sobre el brazo), por lo que se trata de un sistema subactuado de grado 1.

En el desarrollo que sigue se utilizará el subíndice 0 para hacer referencia al primer eslabón (el brazo) y el subíndice 1 para hacer referencia al segundo eslabón (el péndulo). L_0 y L_1 representan las longitudes del brazo y del péndulo, respectivamente, y m_0 y m_1 sus masas. Los centros de masa están localizados a unas distancias l_0 y l_1 de los respectivos ejes de rotación. Los tensores de inercia, referidos a los respectivos centros de masa, son $\mathbf{J}_0$ y $\mathbf{J}_1$. Se considera la existencia de fricción viscosa, con coeficientes de amortiguamiento δ_0 y δ_1. El par de control que actúa sobre el brazo es τ_{m0}. Unos pares perturbadores τ_{p0} y τ_{p1} pueden actuar sobre el brazo y el péndulo, respectivamente. El ángulo de rotación del brazo en torno a su eje se representa por θ_0, y el del péndulo con respecto a la vertical por θ_1. Se define un sistema de coordenadas base (x, y, z), y los sistemas de coordenadas (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1), vinculados al brazo y al péndulo, respectivamente. En la Figura 2.1 se representan la geometría del péndulo y las convenciones adoptadas.

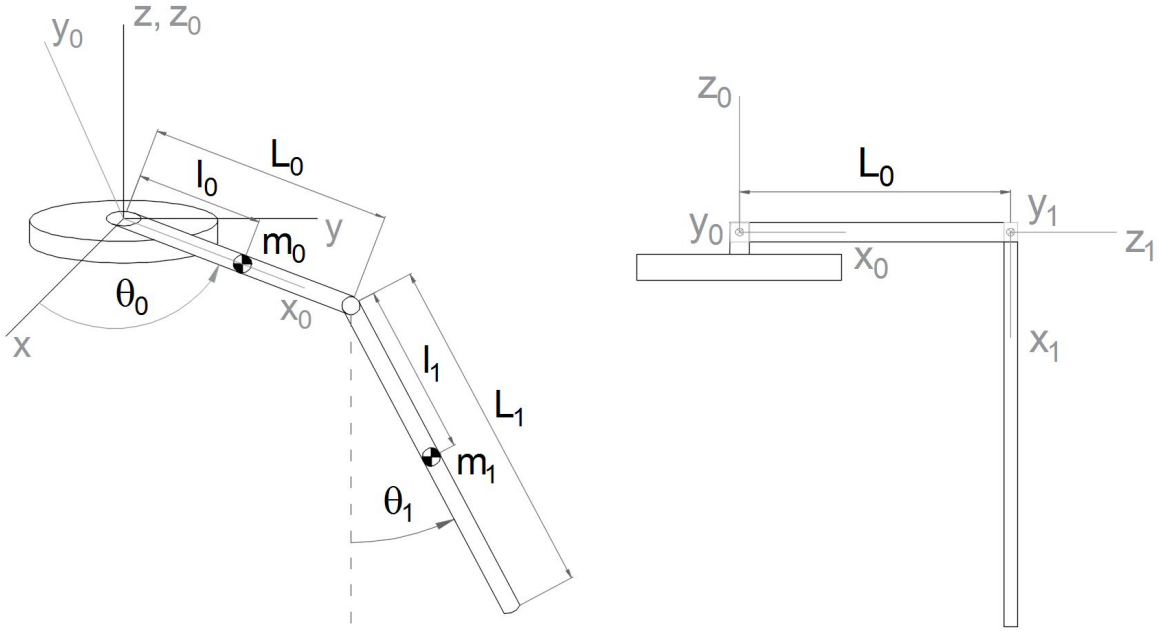


Figura 2.1.0: Péndulo invertido rotacional: geometría y convenciones adoptadas. Fuente: elaboración propia

Se asumirá que los ejes de los sistemas de coordenadas del brazo y el péndulo son ejes principales de inercia, por lo que los tensores de inercia adoptan una forma diagonal:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} J_{0xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{0yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{0zz} \end{bmatrix}, \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta consideraciones geométricas y la nomenclatura y convenciones fijadas anteriormente, el vector de posición del centro de masa del brazo viene dado en el sistema de coordenadas base por:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} l_0 \cos(\theta_0) \\ l_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La velocidad del centro de masa del brazo viene dada por la derivada temporal de su vector de posición:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} -l_0 \operatorname{sen}(\theta_0)\dot{\theta}_0 \\ l_0 \cos(\theta_0)\dot{\theta}_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde se ha utilizado la notación habitual para representar la derivada temporal.

La velocidad angular de rotación del brazo en torno a su centro de masa coincide con la velocidad angular de rotación del brazo en el sistema de coordenadas base:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{d\boldsymbol{\theta}_0}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

La energía cinética del brazo se obtiene sumando la energía cinética de rotación en torno a su centro de masa y la de traslación del centro de masa, que vienen dadas por:

$$T_{0t} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^T m_0 \mathbf{v}_0 = \frac{1}{2} m_0 l_0^2 \dot{\theta}_0^2$$

$$T_{0r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{2} J_{0zz} \dot{\theta}_0^2$$

La energía cinética del brazo será así:

$$T_0 = T_{0t} + T_{0r} = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + J_{0zz}\right)\dot{\theta}_0^2$$

Por otra parte, el movimiento del brazo está constreñido a un plano horizontal, por lo que, considerando que la energía potencial está definida salvo una constante arbitraria, podemos tomarla igual a cero:

$$U_0 = 0$$

Siguiendo un desarrollo análogo al anterior, el vector de posición del centro de masa del péndulo viene dado en el sistema de coordenadas base por:

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} L_0 \cos(\theta_0) - l_1 \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_0) \\ L_0 \operatorname{sen}(\theta_0) + l_1 \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_0) \\ -l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix}$$

La velocidad del centro de masa del péndulo vendrá dada por:

$$\mathbf{v_1} = \dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} \left(-l_1 \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_0) - L_0 \operatorname{sen}(\theta_0)\right)\dot{\theta}_0 - l_1 \cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_0)\dot{\theta}_1 \\ \left(-l_1 \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_0) + L_0 \cos(\theta_0)\right)\dot{\theta}_0 + l_1 \cos(\theta_1)\cos(\theta_0)\dot{\theta}_1 \\ l_1 \operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

La velocidad angular de rotación del péndulo en torno a su centro de masa viene dada por la suma vectorial de la velocidad angular de rotación $\boldsymbol{\omega}_{10}$ en torno al eje del brazo y la velocidad angular de rotación $\boldsymbol{\omega}_{11}$ en torno a su eje. Expresando las componentes de estas velocidades angulares en el sistema de referencia vinculado al péndulo se tendrá:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{11} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\dot{\theta}_0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\dot{\theta}_0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

La energía cinética de traslación del centro de masa del péndulo es:

$$T_{1t} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1^T m_1 \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\left(m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \operatorname{sen}^2(\theta_1)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1$$

Y la energía cinética de rotación del péndulo en torno a su centro de masa:

$$T_{1r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2}\left(J_{1xx}\cos^2(\theta_1) + J_{1yy}\operatorname{sen}^2(\theta_1)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} J_{1zz}\dot{\theta}_1^2$$

La energía cinética del péndulo es la suma de los dos términos:

$$T_1 = T_{1t} + T_{1r} = \frac{1}{2}\left(m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \operatorname{sen}^2(\theta_1) + J_{1xx}\cos^2(\theta_1) + J_{1yy}\operatorname{sen}^2(\theta_1)\right)\dot{\theta}_0^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1$$

La energía potencial del péndulo, tomando el origen de potenciales en la posición correspondiente al péndulo completamente levantado ($\theta_1=\pi$), viene dada por la siguiente expresión:

$$U_1 = -m_1 l_1 g\left(\cos(\theta_1) + 1\right)$$

La energía cinética del sistema completo brazo más péndulo es:

$$T = T_0 + T_1 = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right) + J_{1xx}\cos^2\left(\theta_1\right) + J_{1yy}\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right) + J_{0zz}\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \tag{2.1}$$

Y la energía potencial:

$$U = U_0 + U_1 = -m_1 l_1 g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) \tag{2.2}$$

Cuando θ_1=0 (péndulo abajo) la energía potencial es:

$$U = -2m_1 l_1 g \tag{2.3}$$

La energía mecánica del sistema es la suma de la energía cinética y potencial:

$$E = T + U = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 l_1 g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) \tag{2.4}$$

2.1 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Lagrange. Energía del sistema

Obtendremos en este apartado las ecuaciones del movimiento utilizando la formulación lagrangiana. Algunas ventajas del formalismo lagrangiano son que no aparecen de forma explícita las fuerzas de ligadura en las expresiones y trata con magnitudes escalares (energías cinéticas y potenciales) en lugar de magnitudes vectoriales (fuerzas y aceleraciones), simplificándose así el proceso de obtención de las ecuaciones del movimiento. En general, al aplicar el formalismo de Lagrange a un sistema con *n* grados de libertad (en el sentido de coordenadas independientes), se obtiene un sistema de *n* ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden [14].

El lagrangiano viene dado por la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_1 l_1 g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right)$$

Los términos disipativos viscosos los consideramos mediante la función de disipación de Rayleigh:

$$F = \frac{1}{2}\left(\delta_0\dot{\theta}_0^2 + \delta_1\dot{\theta}_1^2\right)$$

La expresión general de las ecuaciones de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Donde q_i representa las coordenadas generalizadas y Q_i las fuerzas generalizadas.

Habiendo tomado como coordenadas generalizadas los ángulos del brazo y del péndulo, y como fuerzas generalizadas los pares correspondientes, las ecuaciones de Euler-Lagrange se expresan así:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_0}+\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}_0}=\tau_{m0}+\tau_{p0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_1}+\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}_1}=\tau_{p1}$$

Al evaluar los términos resulta un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de segundo orden. Estas ecuaciones coinciden con las obtenidas por Cazzolato y Prime en [6], si bien han sido obtenidas mediante un procedimiento independiente, lo que corrobora su validez. Expresamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} m_0 l_0^2+m_1 L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}+\left(m_1 l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_1) & m_1 L_0 l_1\cos(\theta_1)\\ m_1 L_0 l_1\cos(\theta_1) & J_{1zz}+m_1 l_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_0\\ \ddot{\theta}_1\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}\left(m_1 l_1^2+J_{1yy}-J_{1xx}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1\operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1\\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_0 & 0\\ 0 & \delta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}0\\ m_1 l_1 g\operatorname{sen}(\theta_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_{m0}+\tau_{p0}\\ \tau_{p1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

O de manera más compacta:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\tau} \tag{2.1.2}$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de coordenadas generalizadas, $\boldsymbol{\tau}$ el vector de fuerzas generalizadas, **M** la matriz de masas, **C** la matriz de términos centrífugos y de Coriolis, **D** la matriz de términos disipativos y **G** el vector de términos gravitatorios:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix} m_0 l_0^2+m_1 L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}+\left(m_1 l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_1) & m_1 L_0 l_1\cos(\theta_1)\\ m_1 L_0 l_1\cos(\theta_1) & J_{1zz}+m_1 l_1^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)=\begin{bmatrix}\left(m_1 l_1^2+J_{1yy}-J_{1xx}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1\operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1\\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\delta_0 & 0\\ 0 & \delta_1\end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}0\\ m_1 l_1 g\operatorname{sen}(\theta_1)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\theta_0\\ \theta_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_{m0}+\tau_{p0}\\ \tau_{p1}\end{bmatrix}$$

En este formalismo matricial la energía mecánica viene dada por [16]:

$$E=T+U=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}+U(\boldsymbol{\theta})$$

La derivada temporal de la energía es:

$$\dot{E} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \nabla U(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) - 2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

La matriz $\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) - 2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right)$ es antisimétrica [8, 15], por lo que:

$$\mathbf{x}^T \left(\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) - 2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x}$$

De esta manera, la expresión que permite calcular la derivada temporal de la energía queda así:

$$\dot{E} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{2.1.4}$$

La matriz de masas es simétrica [15] y se cumple que $M_{11}>0$ y $M_{11}M_{22}-M_{12}^2>0$, por lo que es definida positiva (criterio de Sylvester) [17]. Esto último significa que:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$$

Por otra parte, el determinante de una matriz definida positiva es positivo, por lo que **M** es invertible para todo valor de $\boldsymbol{\theta}$. Así mismo, la inversa de una matriz definida positiva es también definida positiva.

Al ser **M** invertible podemos resolver para las aceleraciones angulares:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\tau}\right) \tag{2.1.5}$$

Es usual considerar la siguiente aproximación [6]:

$$J_{1xx} \ll J_{1yy}, J_{1zz}, J_{0zz}$$
$$J_{1yy} \approx J_{1zz} \tag{2.1.6}$$

La primera condición suele cumplirse. Si consideramos que la dimensión lineal característica de la sección transversal del péndulo es una décima parte de su dimensión longitudinal característica, se tendrá:

$$J_{1xx} \sim 10^{-2} J_{1yy}, 10^{-2} J_{1zz}, 10^{-3} J_{0zz}.$$

En lo que se refiere a la segunda condición, se cumplirá de forma exacta si la sección transversal del péndulo presenta simetría bajo rotaciones de 90°. Los péndulos de sección circular o cuadrada cumplen esta condición.

Teniendo en cuenta además el teorema de Steiner o de los ejes paralelos, podemos escribir:

$$J_{0p} = J_{0zz} + m_0 l_0^2, \; J_{1p} = J_{1zz} + m_1 l_1^2$$

Donde J_{0p} y J_{1p} son los momentos de inercia del brazo y del péndulo con respecto a sus correspondientes ejes de rotación.

Definimos el término:

$$J_{01p} = J_{0zz} + m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 = J_{1p} + m_1 L_0^2$$

Este término representa el momento de inercia del conjunto brazo más péndulo, con respecto al eje de rotación del brazo, cuando el péndulo se encuentra en posición vertical (θ_1=0 o θ_1=π).

Teniendo en cuenta estas consideraciones el modelo 2.1.1 se simplifica:

$$\begin{bmatrix} J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)+J_{01p} & m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \\ m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) & J_{1p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{1p}\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 \\ -\frac{1}{2}J_{1p}\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1) g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0}+\tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix} \tag{2.1.7}$$

Para calcular las aceleraciones angulares invertimos la matriz de masas:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)+J_{01p} & m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \\ m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) & J_{1p} \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} J_{1p}\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 \\ -\frac{1}{2}J_{1p}\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1) g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_{m0}+\tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}\right)$$

De donde:

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{-J_{1p}\delta_0\dot{\theta}_0 + m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\delta_1\dot{\theta}_1 - J_{1p}^2\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - \frac{1}{2}J_{1p}m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0^2}{J_{01p}J_{1p} + J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)}$$
$$+\frac{J_{1p}m_1 L_0 l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + J_{1p}(\tau_{m0}+\tau_{p0}) - m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\tau_{p1} + \frac{1}{2}m_1^2 L_0 l_1^2 g\,\mathrm{sen}(2\theta_1)}{J_{01p}J_{1p} + J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)}$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\delta_0\dot{\theta}_0 - (J_{01p} + J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1))\delta_1\dot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 J_{1p}\cos(\theta_1)\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1}{J_{01p}J_{1p} + J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)} \tag{2.1.8}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}(J_{01p}J_{1p} + J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1))\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}m_1^2 L_0^2 l_1^2\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)(\tau_{m0}+\tau_{p0})}{J_{01p}J_{1p} + J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)}$$
$$+\frac{(J_{01p} + J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1))\tau_{p1} - m_1 l_1 g\,\mathrm{sen}(\theta_1)(J_{01p} + J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1))}{J_{01p}J_{1p} + J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)}$$

2.2 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Hamilton

Es posible obtener un conjunto equivalente de ecuaciones del movimiento utilizando el formalismo hamiltoniano. En general, al aplicar el formalismo de Hamilton a un sistema con

n grados de libertad, se obtiene un sistema de 2*n* ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden [14].

Habiendo tomando como coordenadas generalizadas los ángulos del brazo y del péndulo, los correspondientes momentos conjugados vienen dados por:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} = \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0 + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \\ p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0 + \left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Resolvemos el sistema para expresar las velocidades angulares en función de los momentos conjugados:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 &= \frac{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)p_0 - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{-m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)p_0 + \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

El hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = &\frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 l_1 g\left(\cos\left(\theta_1\right)+1\right) \end{aligned}$$

Expresándolo en función de las coordenadas generalizadas y momentos conjugados se tiene:

$$\begin{aligned} H\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) = &\frac{\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)p_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)p_1^2}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \\ &- \frac{m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)p_0 p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \\ &- m_1 l_1 g\left(\cos\left(\theta_1\right)+1\right) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Nótese que la coordenada generalizada $q_0=\theta_0$ no interviene en la expresión del hamiltoniano (se trata de una coordenada cíclica), por lo que el momento conjugado p_0 se conservará en ausencia de pares externos y de fricción.

Las ecuaciones de Hamilton modificadas para tener en cuenta la acción de fuerzas generalizadas son:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i$$

Escribimos las ecuaciones anteriores en forma matricial, incluyendo en el término de fuerzas generalizadas la fricción viscosa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \theta_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix}$$

Reescribimos la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\delta_0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \theta_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

Evaluamos los términos:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_0} = \frac{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right) p_0 - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{-m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_0 + \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_0} - \delta_0 \dot{\theta}_0\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) + \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ &= -\delta_0 \frac{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right) p_0 - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} + \tau_{m0} + \tau_{p0} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} - \delta_1 \dot{\theta}_1 (\mathbf{q},\mathbf{p}) + \tau_{p1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right) p_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2(\theta_1)\right) p_1^2 - m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\, p_0 p_1}{\left(\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2(\theta_1)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)\right)^2}$$

$$\cdot\left(\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) + m_1^2 L_0^2 l_1^2\right)\text{sen}(2\theta_1)$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}(2\theta_1)\, p_1^2 + m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}(\theta_1)\, p_0 p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2(\theta_1)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)} - m_1 l_1 g \,\text{sen}(\theta_1)$$

$$- \delta_1 \frac{-m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\, p_0 + \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2(\theta_1)\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2(\theta_1)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1)} + \tau_{p1}$$

Nótese que las expresiones para las velocidades angulares coinciden con las obtenidas anteriormente, como cabía esperar.

2.3 Puntos de equilibrio

Obtendremos en este apartado los puntos de equilibrio del sistema. Un estado de un sistema dinámico es un punto de equilibrio si, una vez el sistema en su evolución llega a él, permanece en ese estado indefinidamente en ausencia de perturbaciones. Por lo tanto, si el sistema está dado por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, los puntos de equilibrio cumplen la siguiente ecuación:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Recordemos que el modelo matemático del péndulo invertido rotacional viene dado de forma general por la ecuación 2.1.2:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\tau}$$

Un método alternativo para obtener los puntos de equilibrio es hacer en la ecuación anterior $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ y determinar los valores de $\boldsymbol{\theta}$ que cumplen:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\right) = \mathbf{0} \tag{2.3.1}$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio deberán cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \,\text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Todos los puntos de equilibrio serán solución de esta ecuación, y no existirán más que éstos, ya que de existir alguna raíz de $\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\right) = \mathbf{0}$ con $\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0}$, multiplicando a la izquierda por $\left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\right)^T$ se tendría que:

$$\left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\right)^T \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\right) = \mathbf{0}$$

lo que representaría una contradicción, ya que $\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ es una matriz definida positiva.

Por la hipótesis de ausencia de perturbaciones se tiene que $\tau_{p0}=\tau_{p1}=0$, y en consecuencia habrá de cumplirse también que $\tau_{m0}=0$, con lo que $\boldsymbol{\tau}=0$ y las ecuaciones 2.3.1 se escribirán así:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}0\\ m_1 l_1 g\,\mathrm{sen}(\theta_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

Resolviendo para θ_1 se obtiene la siguiente expresión:

$$\theta_{1eq}=n\pi\,,\ n\in\mathbb{Z}$$

Y los puntos de equilibrio vendrán dados por:

$$\mathbf{x}_{eq}=\begin{bmatrix}\theta_0 & n\pi & 0 & 0\end{bmatrix}^T,\ n\in\mathbb{Z}$$

Donde θ_0 puede tomar cualquier valor en el equilibrio, ya que esta variable no interviene de forma directa en las ecuaciones del movimiento.

De acuerdo con el teorema de estabilidad de Lyapunov basado en la linealización del sistema no lineal, si los autovalores de la matriz **A** del sistema linealizado en torno a un determinado punto de equilibrio caen estrictamente el semiplano izquierdo del plano complejo, este punto de equilibrio será asintóticamente estable en el sistema no lineal, y será inestable si al menos uno de los autovalores cae estrictamente en el semiplano derecho. Si todos los autovalores caen en el semiplano izquierdo, salvo uno al menos que cae sobre el eje jω, el criterio no decide [19].

No obstante, la determinación de la estabilidad se simplifica teniendo en cuenta consideraciones de carácter físico, ya que la energía potencial del péndulo presenta mínimos en $\theta_1=2n\pi$ y máximos en $\theta_1=(2n+1)\pi$, con $n\in\mathbb{Z}$, por lo que en lazo abierto los primeros son puntos de equilibrio estable y los segundos de equilibrio inestable:

De esta manera, si restringimos el ángulo θ_1 al intervalo $[0, 2\pi)$ y consideramos además que $\theta_{0eq}=0$, se tendrá sólo un punto de equilibrio estable:

$$\mathbf{x}_{eq,es}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

y otro de equilibrio inestable:

$$\mathbf{x}_{eq,in}=\begin{bmatrix}0 & \pi & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

2.4 Modelos en el espacio de estados

Es importante disponer de un modelo en el espacio de estados del sistema tanto para estudiar sus características y evolución como para simularlo en una computadora. Se obtendrán en este apartado dos modelos del sistema en el espacio de estados: el primero considerando las ecuaciones del movimiento obtenidas con el formalismo de Lagrange, y el segundo teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas con el formalismo de Hamilton.

2.4.1 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo lagrangiano

Tomando en consideración el modelo matemático obtenido a partir del formalismo lagrangiano, definimos el siguiente vector de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \omega_0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}, \text{ con } \omega_0 = \dot{\theta}_0, \ \omega_1 = \dot{\theta}_1$$

La evolución del sistema dinámico vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\omega}_0 \\ \dot{\omega}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \ddot{\theta}_0\left(\theta_1, \omega_0, \omega_1, u, \tau_{p0}, \tau_{p1}\right) \\ \ddot{\theta}_1\left(\theta_1, \omega_0, \omega_1, u, \tau_{p0}, \tau_{p1}\right) \end{bmatrix} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, u, t\right) \tag{2.4.1}$$

donde se ha tenido en cuenta que los pares perturbadores dependen explícitamente del tiempo y la acción de control la representamos con la nomenclatura habitual $u=\tau_{m0}$.

Si consideramos la aproximación 2.1.6 las aceleraciones angulares vienen dadas por las ecuaciones 2.1.8, y la ecuación 2.4.1 toma la siguiente forma, afín en control:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\omega}_0\\ \dot{\omega}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_0\\ \omega_1\\ \dfrac{-J_{1p}\delta_0\omega_0+m_1L_0l_1\cos(\theta_1)\delta_1\omega_1-J_{1p}^2\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\omega_0\omega_1-\frac{1}{2}J_{1p}m_1L_0l_1\cos(\theta_1)\mathrm{sen}(2\theta_1)\omega_0^2}{J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)-m_1^2L_0^2l_1^2\cos^2(\theta_1)}\\ +\dfrac{J_{1p}m_1L_0l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\omega_1^2+J_{1p}\tau_{p0}-m_1L_0l_1\cos(\theta_1)\tau_{p1}+\frac{1}{2}m_1^2L_0l_1^2g\,\mathrm{sen}(2\theta_1)}{J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)-m_1^2L_0^2l_1^2\cos^2(\theta_1)}\\ \dfrac{m_1L_0l_1\cos(\theta_1)\delta_0\omega_0-\left(J_{01p}+J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)\right)\delta_1\omega_1+m_1L_0l_1J_{1p}\cos(\theta_1)\mathrm{sen}(2\theta_1)\omega_0\omega_1}{J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)-m_1^2L_0^2l_1^2\cos^2(\theta_1)}\\ +\dfrac{\frac{1}{2}\left(J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)\right)\mathrm{sen}(2\theta_1)\omega_0^2+\frac{1}{2}m_1^2L_0^2l_1^2\,\mathrm{sen}(2\theta_1)\omega_1^2-m_1L_0l_1\cos(\theta_1)\tau_{p0}}{J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)-m_1^2L_0^2l_1^2\cos^2(\theta_1)}\\ +\dfrac{\left(J_{01p}+J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)\right)\tau_{p1}-m_1l_1g\,\mathrm{sen}(\theta_1)\left(J_{01p}+J_{1p}\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)\right)}{J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)-m_1^2L_0^2l_1^2\cos^2(\theta_1)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{J_{1p}}{J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)-m_1^2L_0^2l_1^2\cos^2(\theta_1)}\\ \dfrac{-m_1L_0l_1\cos(\theta_1)}{J_{01p}J_{1p}+J_{1p}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1)-m_1^2L_0^2l_1^2\cos^2(\theta_1)}\end{bmatrix}u \tag{2.4.2}$$

En general, teniendo en cuenta la ecuación 2.1.5 para las aceleraciones angulares la expresión 2.4.1. queda así:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\omega}_0\\ \dot{\omega}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_0\\ \omega_1\\ -\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}+\mathbf{D}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}+\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}u \tag{2.4.3}$$

Si los pares perturbadores son despreciables ($\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}=0$) y la ley de control es de la forma $u=u(\mathbf{x})$, el sistema será autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

2.4.2 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo hamiltoniano

Podemos obtener un modelo equivalente en espacio de estados tomando como referencia el modelo del sistema obtenido a partir del formalismo hamiltoniano. Definimos el vector de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de Hamilton definen ahora la evolución del sistema dinámico. Las escribimos de siguiente forma, afín en control:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_0} - \delta_0 \dfrac{\partial H}{\partial p_0} + \tau_{p0} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} - \delta_1 \dfrac{\partial H}{\partial p_1} + \tau_{p1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, u, t\right) \tag{2.4.4}$$

Desarrollando los términos se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right) p_0 - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \\ \dfrac{-m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_0 + \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \\ \tau_{p0} - \delta_0 \dfrac{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right) p_0 - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \\ \dfrac{\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right) p_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) p_1^2 - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_0 p_1}{\left(\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)\right)^2} \\ \cdot\left(\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) + m_1^2 L_0^2 l_1^2\right)\mathrm{sen}\left(2\theta_1\right) \\ -\dfrac{\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}\left(2\theta_1\right) p_1^2 + m_1 L_0 l_1 \,\mathrm{sen}\left(\theta_1\right) p_0 p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} - m_1 l_1 g\,\mathrm{sen}\left(\theta_1\right) + \tau_{p1} \\ -\delta_1 \dfrac{-m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) p_0 + \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) p_1}{\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2 \cos^2\left(\theta_1\right)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{2.4.5}$$

Al igual que antes, si los pares perturbadores son despreciables y la ley de control es de la forma $u=u(\mathbf{x})$, el sistema será autónomo.

2.5 Linealización del modelo

Para la estabilización del péndulo en su posición de equilibrio inestable usualmente se utilizan estrategias de control lineal (LQR, realimentación de estados, etc.). Para implementar estas estrategias de control lineal es necesario obtener un modelo lineal del

sistema, para lo que se desarrollará en serie de Taylor cada uno de los términos del modelo en torno al punto en consideración, reteniendo los términos hasta el primer orden. El desarrollo en serie de Taylor de una función de varias variables $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ en torno al punto $\mathbf{x}_0=(x_{10},\ldots,x_{d0})$ viene dado por la siguiente expresión [20]:

$$f\left(x_1,...,x_{\mathrm{d}}\right)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{\mathrm{d}}=0}^{\infty}\frac{\left(x_1-x_{10}\right)^{\mathrm{n}_1}\cdots\left(x_{\mathrm{d}}-x_{\mathrm{d}0}\right)^{\mathrm{n}_{\mathrm{d}}}}{n_1!\cdots n_{\mathrm{d}}!}\left(\frac{\partial^{\mathrm{n}_1+\cdots+n_{\mathrm{d}}}f}{\partial x_1^{\mathrm{n}_1}\cdots\partial x_{\mathrm{d}}^{\mathrm{n}_{\mathrm{d}}}}\right)\Bigg|_{(x_1,\ldots,x_{\mathrm{d}})=(x_{10},\ldots,x_{\mathrm{d}0})}$$

Reteniendo únicamente los términos hasta el primer orden resulta:

$$f\left(x_1,...,x_{\mathrm{d}}\right)\simeq f\left(x_{10},...,x_{\mathrm{d}0}\right)+\sum_{n=1}^{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{\mathrm{n}}}\Bigg|_{(x_1,\ldots,x_{\mathrm{d}})=(x_{10},\ldots,x_{\mathrm{d}0})}\right)\left(x_{\mathrm{n}}-x_{\mathrm{n}0}\right)$$

Si la función es vectorial la aproximación a primer orden se escribe en términos de la matriz jacobiana:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)\simeq\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right)+\mathbf{J}\left(\mathbf{x}_0\right)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)$$

De forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix}f_1\left(x_1,...,x_{\mathrm{d}}\right)\\ \vdots\\ f_n\left(x_1,...,x_{\mathrm{d}}\right)\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}f_1\left(x_{10},...,x_{\mathrm{d}0}\right)\\ \vdots\\ f_n\left(x_{10},...,x_{\mathrm{d}0}\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\ldots,x_{\mathrm{d}})=(x_{10},\ldots,x_{\mathrm{d}0})} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_d}\Big|_{(x_1,\ldots,x_{\mathrm{d}})=(x_{10},\ldots,x_{\mathrm{d}0})}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_{\mathrm{n}}}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\ldots,x_{\mathrm{d}})=(x_{10},\ldots,x_{\mathrm{d}0})} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\mathrm{n}}}{\partial x_d}\Big|_{(x_1,\ldots,x_{\mathrm{d}})=(x_{10},\ldots,x_{\mathrm{d}0})}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_{10}\\ \vdots\\ x_n-x_{n0}\end{pmatrix}$$

Se obtendrán en este apartado los modelos linealizados del sistema en torno a sus puntos de equilibrio estable (péndulo abajo) e inestable (péndulo arriba).

2.5.1 Reducción de ángulos al intervalo $[\theta_{i0} - \pi, \theta_{i0} + \pi)$

Es importante señalar que para trabajar con los modelos linealizados es conveniente reducir los ángulos al intervalo $[\theta_{i0} - \pi, \theta_{i0} + \pi)$, donde θ_{i0} representa el punto en torno al que se linealiza el correspondiente ángulo θ_i. Para esto se utilizarán las siguientes expresiones:

$$\theta_{ir}=\begin{cases}\theta_i \bmod 2\pi & \text{si } \theta_{i0}-\pi\le\theta_i \bmod 2\pi<\theta_{i0}+\pi\\ \theta_i \bmod 2\pi-2\pi & \text{si } \theta_i \bmod 2\pi\ge\theta_{i0}+\pi\\ \theta_i \bmod 2\pi+2\pi & \text{si } \theta_i \bmod 2\pi<\theta_{i0}-\pi\end{cases} \tag{2.5.1}$$

donde a mod b representa el resto de la división de a entre b, esto es:

$$a \bmod b = a-\left[\!\left[a/b\right]\!\right]$$

Nótese que, aunque el ángulo θ_0 no interviene explícitamente en las expresiones del modelo matemático, es necesario reducirlo cuando se desee estabilizar el brazo mediante un control

lineal. En particular, para θ_{00}=0 el ángulo θ_0 se reducirá al intervalo [-π, π) y las expresiones anteriores quedan así:

$$\theta_{0r} = \begin{cases} \theta_0 \bmod 2\pi & \text{si } -\pi \le \theta_0 \bmod 2\pi < \pi \\ \theta_0 \bmod 2\pi - 2\pi & \text{si } \theta_0 \bmod 2\pi \ge \pi \\ \theta_0 \bmod 2\pi + 2\pi & \text{si } \theta_0 \bmod 2\pi < -\pi \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Estas mismas ecuaciones se utilizarían para reducir el ángulo θ_1 al intervalo [-π, π) cuando se linealizan las ecuaciones del péndulo en torno a su punto de equilibrio estable, al ser entonces θ_{10}=0.

Si se linealizan las ecuaciones del péndulo en torno a su punto de equilibrio inestable se tendrá θ_{10}=π, con lo que θ_1 se reducirá al intervalo [0, 2π) y, por lo tanto:

$$\theta_{1r} = \begin{cases} \theta_1 \bmod 2\pi & \text{si } 0 \le \theta_1 \bmod 2\pi < 2\pi \\ \theta_1 \bmod 2\pi - 2\pi & \text{si } \theta_1 \bmod 2\pi \ge 2\pi \\ \theta_1 \bmod 2\pi + 2\pi & \text{si } \theta_1 \bmod 2\pi < 0 \end{cases} \tag{2.5.3}$$

2.5.2 Linealización en torno al punto de equilibrio estable abajo

Desarrollando en serie de Taylor los términos del modelo matemático 2.1.1 en torno al punto de equilibrio estable que, como vimos en el epígrafe 2.3, si hacemos θ_0=0 y restringimos el ángulo θ_1 al intervalo [0, 2π) corresponde al punto $\mathbf{x} = \left[\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1\right]^T = [0,0,0,0]^T$, y reteniendo los términos hasta el primer orden se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} & m_1 L_0 l_1 \\ m_1 L_0 l_1 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

De forma más compacta:

$$\mathbf{M}_\mathrm{d}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}_\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}$$

con

$$\mathbf{M}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} & m_1 L_0 l_1 \\ m_1 L_0 l_1 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix},\ \mathbf{G}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para las aceleraciones angulares:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{M}_\mathrm{d}^{-1}\left(\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}_\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\tau}\right)$$

Evaluando los términos se obtiene:

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_0\\ \ddot{\theta}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-\left(J_{1zz}+m_1l_1^2\right)\delta_0\dot{\theta}_0+m_1L_0l_1\delta_1\dot{\theta}_1+\left(J_{1zz}+m_1l_1^2\right)\left(\tau_{m0}+\tau_{p0}\right)-m_1L_0l_1\tau_{p2}-m_1^2L_0l_1^2g\theta_1}{\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)\left(J_{1zz}+m_1l_1^2\right)-m_1^2L_0^2l_1^2}\\ \dfrac{m_1L_0l_1\delta_0\dot{\theta}_0-\left(J_{01p}+J_{1xx}\right)+\delta_1\dot{\theta}_1-m_1L_0l_1\left(\tau_{m0}+\tau_{p0}\right)+\left(J_{01p}+J_{1xx}\right)\tau_{p1}+m_1l_1gJ_{01p}\theta_1}{\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)\left(J_{1zz}+m_1l_1^2\right)-m_1^2L_0^2l_1^2}\end{bmatrix}$$

El modelo linealizado de espacio de estados será así:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}+\mathbf{B}_\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2x2} & \mathbf{I}_2\\ -\mathbf{M}_\mathrm{d}^{-1}\mathbf{G}_\mathrm{d} & -\mathbf{M}_\mathrm{d}^{-1}\mathbf{D}\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2x2}\\ \mathbf{M}_\mathrm{d}^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{\tau} \tag{2.5.4}$$

O bien, de forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\omega}_0\\ \dot{\omega}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{-m_1^2L_0l_1^2g}{\Delta} & \dfrac{-\left(J_{1zz}+m_1l_1^2\right)\delta_0}{\Delta} & \dfrac{m_1L_0l_1\delta_1}{\Delta}\\ 0 & \dfrac{m_1l_1\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)g}{\Delta} & \dfrac{m_1L_0l_1\delta_0}{\Delta} & \dfrac{-\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)\delta_1}{\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_0\\ \theta_1\\ \omega_0\\ \omega_1\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \dfrac{J_{1zz}+m_1l_1^2}{\Delta} & \dfrac{-m_1L_0l_1}{\Delta}\\ \dfrac{-m_1L_0l_1}{\Delta} & \dfrac{m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}}{\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau_{m0}+\tau_{p0}\\ \tau_{p1}\end{bmatrix}$$

donde se ha definido $\Delta=\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)\left(J_{1zz}+m_1l_1^2\right)-m_1^2L_0^2l_1^2$, $\omega_0=\dot{\theta}_0$, $\omega_1=\dot{\theta}_1$.

Si consideramos que los pares perturbadores son despreciables, las ecuaciones dinámicas que dan la evolución del sistema linealizado tendrán la forma $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}+\mathbf{B}_\mathrm{d}u$, con

$$\mathbf{A}_\mathrm{d}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{-m_1^2L_0l_1^2g}{\Delta} & \dfrac{-\left(J_{1zz}+m_1l_1^2\right)\delta_0}{\Delta} & \dfrac{m_1L_0l_1\delta_1}{\Delta}\\ 0 & \dfrac{m_1l_1\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)g}{\Delta} & \dfrac{m_1L_0l_1\delta_0}{\Delta} & \dfrac{-\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)\delta_1}{\Delta}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\mathrm{d}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{J_{1zz}+m_1l_1^2}{\Delta}\\ \dfrac{-m_1L_0l_1}{\Delta}\end{bmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}\theta_0\\ \theta_1\\ \omega_0\\ \omega_1\end{bmatrix},\ u=\tau_{\mathrm{m0}} \tag{2.5.5}$$

2.5.3 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable arriba

Desarrollando ahora en serie de Taylor los términos del modelo matemático en torno al punto de equilibrio inestable correspondiente al péndulo levantado, que teniendo en cuenta las mismas consideraciones que en el epígrafe 2.5.2 es $\mathbf{x} = \left[\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1\right]^T = \left[0, \pi, 0, 0\right]^T$, y reteniendo los términos hasta el primer orden se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} & -m_1 L_0 l_1 \\ -m_1 L_0 l_1 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 l_1 g \theta_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

donde $\theta_1^* = \theta_1 - \pi$, $\dot{\theta}_1^* = \dot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_1^* = \ddot{\theta}_1$.

Resolviendo para las aceleraciones angulares:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right)\delta_0 \dot{\theta}_0 - m_1 L_0 l_1 \delta_1 \dot{\theta}_1^* + \left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right)\left(\tau_{m0} + \tau_{p0}\right) + m_1 L_0 l_1 \tau_{p2} + m_1^2 L_0 l_1^2 g \theta_1^*}{\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx}\right)\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2} \\ \dfrac{-m_1 L_0 l_1 \delta_0 \dot{\theta}_0 - \left(J_{01p} + J_{1xx}\right)\delta_1 \dot{\theta}_1^* + m_1 L_0 l_1 \left(\tau_{m0} + \tau_{p0}\right) + \left(J_{01p} + J_{1xx}\right)\tau_{p1} + m_1 l_1 g J_{01p} \theta_1^*}{\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx}\right)\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right) - m_1^2 L_0^2 l_1^2} \end{bmatrix}$$

El modelo linealizado de espacio de estados será ahora:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\mathrm{u}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\mathrm{u}\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2x2} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{M}_\mathrm{u}^{-1}\mathbf{G}_\mathrm{u} & -\mathbf{M}_\mathrm{u}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2x2} \\ \mathbf{M}_\mathrm{u}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \tag{2.5.4}$$

Si hacemos $\omega_0 = \dot{\theta}_0$, $\omega_1^* = \dot{\theta}_1^*$ el modelo linealizado queda así:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1^* \\ \dot{\omega}_0 \\ \dot{\omega}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{m_1^2 L_0 l_1^2 g}{\Delta} & \dfrac{-\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right)\delta_0}{\Delta} & \dfrac{-m_1 L_0 l_1 \delta_1}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{m_1 l_1 \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx}\right) g}{\Delta} & \dfrac{-m_1 L_0 l_1 \delta_0}{\Delta} & \dfrac{-\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx}\right)\delta_1}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1^* \\ \omega_0 \\ \omega_1^* \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{J_{1zz} + m_1 l_1^2}{\Delta} & \dfrac{m_1 L_0 l_1}{\Delta} \\ \dfrac{m_1 L_0 l_1}{\Delta} & \dfrac{m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx}}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

De manera semejante al epígrafe anterior, considerando que los pares perturbadores son despreciables, las ecuaciones adoptan la forma $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_\mathrm{u}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}_\mathrm{u}u$, siendo ahora:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{u}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{m_1^2 L_0 l_1^2 g}{\Delta} & \dfrac{-\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2\right)\delta_0}{\Delta} & \dfrac{-m_1 L_0 l_1 \delta_1}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{m_1 l_1\left(m_0 l_0^2+m_1 L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)g}{\Delta} & \dfrac{-m_1 L_0 l_1 \delta_0}{\Delta} & \dfrac{-\left(m_0 l_0^2+m_1 L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}\right)\delta_1}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{u}}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{J_{1zz}+m_1 l_1^2}{\Delta} \\ \dfrac{m_1 L_0 l_1}{\Delta} \end{bmatrix},\ \mathbf{x}^*=\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1^* \\ \omega_0 \\ \omega_1^* \end{bmatrix},\ u=\tau_{\mathrm{m0}} \tag{2.5.7}$$

2.6 Estudio del modelo no lineal y análisis de casos particulares

En este apartado, por su interés teórico, se estudiarán las configuraciones en las que puede permanecer el péndulo de forma estacionaria cuando la velocidad angular del brazo es constante, y se obtendrán aproximaciones del modelo general que pueden ser útiles a la hora de plantear estrategias de control. Se estudiará la aproximación de momento de inercia del brazo grande, con la que se obtendrá el modelo de dimensión 2 del péndulo, la aproximación de longitud del brazo grande, a partir de la cual se obtendrá el modelo de péndulo invertido sobre carro, la aproximación de aceleración del brazo pequeña, obteniéndose el par que se necesario aplicar sobre el eje del brazo para que su velocidad angular no varíe y definiéndose un potencial efectivo que tiene en cuenta los términos gravitatorio y centrífugo, y la aproximación de aceleración y velocidad angular del brazo pequeñas, a partir de la cual se obtiene el modelo de péndulo simple y se determinan los pares de reacción que actúan sobre el eje del brazo cuando se fija su posición.

2.6.1 Soluciones estacionarias. Puntos de equilibrio del modelo de dimensión 2 equivalente. Velocidad angular crítica. Bifurcación supercrítica del punto de equilibrio estable

Estudiaremos en este apartado las soluciones estacionarias del sistema, entendidas aquí en el sentido de que $\ddot{\theta}_0=\ddot{\theta}_1=\dot{\theta}_1=0$, con $\dot{\theta}_0$ una constante dada.

Puesto que, por hipótesis, $\dot{\theta}_0$ es constante, y por lo tanto $\ddot{\theta}_0$ es siempre cero, la segunda ecuación del modelo (ecuaciones 2.4) está desacoplada, pudiendo definirse así un modelo de dimensión 2 equivalente, siendo θ_1, $\dot{\theta}_1$ las variables de estado y considerándose $\dot{\theta}_0$ como un parámetro ajustable. En este modelo las soluciones estacionarias definidas antes corresponden a puntos de equilibrio.

Con esta condición, las ecuaciones del movimiento 2.1.1 toman la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g\,\text{sen}\left(\theta_1\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_{m0}+\tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

Considerando que no actúan pares perturbadores, de la segunda ecuación, para que la aceleración angular del péndulo sea nula deberá cumplirse que:

$$\left(\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\dot{\theta}_0^2\cos\left(\theta_1\right) - m_1 l_1 g\right)\text{sen}\left(\theta_1\right) = 0$$

Dos soluciones vienen dadas por las raíces del término en seno:

$$\theta_{1eq} = n\pi\ ,\ n \in \mathbb{Z}$$

Si nos restringimos al intervalo [-π, π):

$$\theta_{1eq} \in \{0, \pi\}$$

Por lo tanto, idealmente y siempre que no existan perturbaciones el péndulo mantendrá la posición vertical independientemente del valor que tenga la velocidad angular del brazo, siempre que ésta sea constante. Si el péndulo es apartado de cualquiera de los dos puntos de equilibrio oscilará en torno a ellos, terminando por estabilizarse en $\theta_1 = 0$ si existe disipación.

Igualando ahora a cero el término entre paréntesis y resolviendo para el ángulo θ_1 obtenemos la siguiente expresión:

$$\theta_{1eq} = \pm\arccos\left(\frac{m_1 l_1 g}{\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\dot{\theta}_0^2}\right) \tag{2.6.1}$$

El dominio de la función arcocoseno es [-1,1], por lo que, para que estas dos soluciones existan, habrá de cumplirse que el valor absoluto de la velocidad angular del brazo alcance un valor crítico dado por:

$$\left|\dot{\theta}_0\right| \geq \dot{\theta}_{0c} = \sqrt{\frac{m_1 l_1 g}{m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}}} \tag{2.6.2}$$

Existe así una velocidad angular crítica del brazo, dada por la ecuación 2.6.2, a partir de la cual el péndulo, si es apartado de la posición vertical, alcanzará una nueva posición angular de equilibrio dada por la Ecuación 2.6.1.Independientemente del signo de la velocidad angular del brazo son posibles las soluciones positiva y negativa para el ángulo de equilibrio del péndulo, dependiendo el signo del ángulo únicamente de las condiciones iniciales θ_{1i}, $\dot{\theta}_{1i}$ o, en su caso, del signo de la perturbación que lo desplazó de su estado de equilibrio vertical si se encontraba en él, lo que representa desde luego un comportamiento contraintuitivo. Si la velocidad angular del brazo no alcanza este valor crítico los únicos puntos de equilibrio serán $\theta_{1eq} = 0, \pi$.

Se tiene así una bifurcación local supercrítica de tipo tridente (pitchfork) del punto de equilibrio estable, por la que éste pasa de estable a inestable, apareciendo dos nuevos puntos de equilibrio estable distribuidos simétricamente (Figura 2.2). Este tipo de bifurcación es común en sistemas que presentan alguna simetría [18], como es el caso que nos ocupa, en el

que la coordenada θ_0 es cíclica y la transformación $\dot{\theta}_0 \to -\dot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_1 \to -\dot{\theta}_1$ deja la energía invariante.

El valor de la velocidad angular crítica disminuye al aumentar la longitud del péndulo y no depende de su masa, al ser todos los términos que intervienen en la expresión proporcionales a m_1.

Nótese la diferencia con el sistema de péndulo sobre un carro, en el que no se tienen soluciones estacionarias distintas de $\theta_{1eq} = 0, \pi$ si la velocidad del carro es constante, independientemente de su valor.

Si la velocidad angular del brazo es muy grande, esto es, si se cumple que:

$$\dot{\theta}_0^2 \gg \frac{m_1 l_1 g}{\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)}$$

de la ecuación 2.6.1 resulta:

$$\theta_{1eq} \approx \pm \arccos(0) = \pm \frac{\pi}{2} \tag{2.6.3}$$

y por lo tanto el péndulo se estabilizará en la posición horizontal.

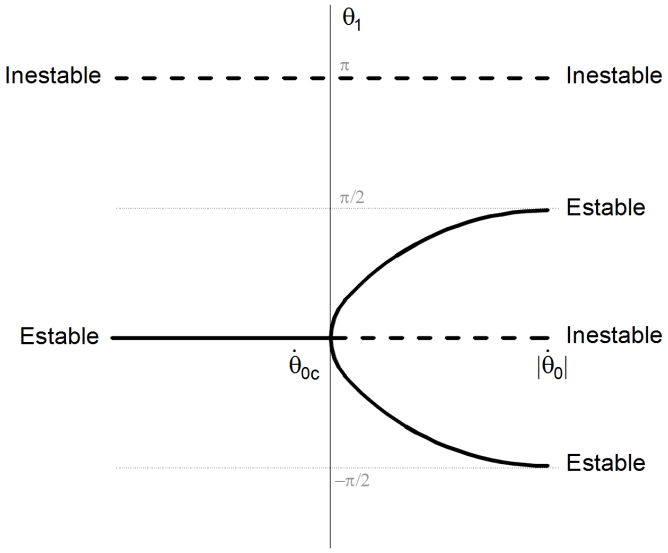


Figura 2.6.1: Bifurcación local supercrítica de tipo tridente (pitchfork) del punto de equilibrio estable.
Fuente: Elaboración propia

2.6.2 Momento de inercia del brazo grande. Modelo de dimensión 2. Formalismo hamiltoniano del modelo de dimensión 2

Cuando el momento de inercia del brazo es grande comparado con los otros términos $\left(m_0 l_0^2 + J_{0zz} \gg m_1 l_1^2, J_{1xx}, J_{1yy}, m_1 L_0 l_1\right)$, el péndulo tendrá una influencia despreciable sobre el movimiento del brazo, que dependerá así únicamente del par de control aplicado τ_{m0}.

Teniendo en cuenta que el movimiento del brazo produce un par de reacción en el péndulo, en este caso resultará muy fácil determinar la influencia de τ_{m0} sobre el movimiento del péndulo.

Con esta aproximación, el modelo matemático adopta la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 \\ m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

Reescribimos las ecuaciones anteriores de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

Evaluamos $\ddot{\theta}_0$ con la primera ecuación y sustituimos la expresión resultante en la segunda ecuación:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\dfrac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - \delta_0\dot{\theta}_0}{m_0 l_0^2 + J_{0zz}} + \tau_{p1} \end{bmatrix} \qquad (2.6.2)$$

Comprobamos que la evolución de θ_0 no está influenciada por el movimiento del péndulo, dependiendo únicamente del par de control aplicado, y por lo tanto resulta sencillo en este caso establecer una ley de control para el péndulo, al intervenir directamente en la ecuación que gobierna la evolución del ángulo θ_1 el par aplicado τ_{m0}.

Si además se cumple que la velocidad angular del brazo es pequeña:

$$\dot{\theta}_0 \ll \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)}}$$

será despreciable el término centrífugo en $\dot{\theta}_0^2$ y la segunda ecuación adopta la forma correspondiente a un péndulo simple actuado por el par efectivo dado por el término del segundo miembro de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \dfrac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - \delta_0 \dot{\theta}_0}{m_0 l_0^2 + J_{0zz}} + \tau_{p1} \end{bmatrix} \tag{2.6.3}$$

En este caso podemos observar que si el coeficiente de fricción viscosa δ_0 es despreciable o se cancela el término con la acción de control, las dos ecuaciones estarán completamente desacopladas.

Por el gran interés que presenta esta aproximación (modelo de dimensión 2, siendo ésta la dimensión del espacio de fases del péndulo al no tener en cuenta el brazo), se desarrolla a continuación un modelo equivalente utilizando el formalismo hamiltoniano. El lagrangiano del péndulo, que es la diferencia entre la energía cinética y potencial, viene dado ahora por:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1 g\left(\cos(\theta_1) + 1\right)$$

El momento conjugado asociado a la coordenada generalizada θ_1 es:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1$$

Resolviendo para la velocidad angular resulta:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{p_1}{m_1 l_1^2 + J_{1zz}}$$

El hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 - m_1 l_1 g\left(\cos(\theta_1) + 1\right)$$

Expresándolo en función de las coordenadas generalizadas y momentos conjugados se tiene:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{m_1 l_1^2 + J_{1zz}} - m_1 l_1 g\left(\cos(\theta_1) + 1\right) \tag{2.6.4}$$

Escribimos las ecuaciones de Hamilton modificadas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix}$$

Reescribimos la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{p}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -\delta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H}{\partial \theta_1}\\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -m_1L_0l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0+\tau_{p1}\end{bmatrix}$$

Por último, evaluamos los términos:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{p}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{p_1}{m_1l_1^2+J_{1zz}}\\ -m_1l_1g\,\mathrm{sen}(\theta_1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -m_1L_0l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0-\dfrac{\delta_1p_1}{m_1l_1^2+J_{1zz}}+\tau_{p1}\end{bmatrix} \tag{2.6.5}$$

2.6.3 Longitud del brazo grande. Péndulo invertido sobre carro

Cuando la longitud del brazo es mucho mayor que las otras longitudes características del sistema $\left(L_0 \gg L_1, L_0\Delta\theta_0\right)$, las trayectorias circulares que describen los extremos del brazo y del péndulo en su rotación en torno al eje *z* se confunden con las tangentes, por lo que se simplificará la matriz de términos centrífugos y de Coriolis, así como la de masas.

Reescribimos las ecuaciones de movimiento de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}+\left(m_1l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2(\theta_1)}{L_0^2} & m_1l_1\cos(\theta_1)\\ m_1l_1\cos(\theta_1) & J_{1zz}+m_1l_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_0\ddot{\theta}_0\\ \ddot{\theta}_1\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(m_1l_1^2+J_{1yy}-J_{1xx}\right)\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1}{L_0^2} & -m_1l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(m_1l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0}{L_0} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_0\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\delta_0}{L_0^2} & 0\\ 0 & \delta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_0\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0\\ m_1l_1g\,\mathrm{sen}(\theta_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\tau_{m0}+\tau_{p0}}{L_0}\\ \tau_{p1}\end{bmatrix}$$

Tomando en consideración que L_0 es grande, que el extremo del brazo describe una trayectoria prácticamente rectilínea, con $\dot{x}_0 = L_0\dot{\theta}_0$ representando la velocidad lineal del extremo del brazo y $\ddot{x}_0 = L_0\ddot{\theta}_0$ su aceleración lineal, y que un par τ que actúa sobre el brazo dividido entre su longitud es equivalente a una fuerza tangencial *f* aplicada en su extremo con una magnitud dada por ese cociente, podemos escribir:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{m_0l_0^2+m_1L_0^2+J_{0zz}}{L_0^2} & m_1l_1\cos(\theta_1)\\ m_1l_1\cos(\theta_1) & J_{1zz}+m_1l_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_0\\ \ddot{\theta}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -m_1l_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \delta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0\\ m_1l_1g\,\mathrm{sen}(\theta_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{m0}+f_{p0}\\ \tau_{p1}\end{bmatrix}$$

Consideramos ahora que la masa del brazo está concentrada en su extremo, y por lo tanto $l_0=L_0$ y $J_{0zz}=0$, y que se dispone un carril para guiar la masa, con coeficiente de fricción viscosa b_0. Las ecuaciones del movimiento toman así la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_0+m_1 & m_1 l_1 \cos(\theta_1) \\ m_1 l_1 \cos(\theta_1) & J_{1zz}+m_1 l_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -m_1 l_1 \operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}+ \\ \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{m0}+f_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix} \tag{2.6.6}$$

Se obtiene de esta manera el modelo matemático del péndulo sobre un carro como caso particular del modelo del péndulo rotatorio.

De manera similar a lo visto en el epígrafe 2.6.2, pero considerando ahora las masas en lugar de los momentos de inercia, si m_0 es grande comparado con m_1, el movimiento del carro no se verá afectado por el péndulo y éste se podrá controlar directamente con la fuerza aplicada sobre el carro:

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & J_{1zz}+m_1 l_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{m0}+f_{p0} \\ -m_1 l_1 \cos(\theta_1)\dfrac{f_{m0}+f_{p0}-b_0\dot{x}_0}{m_0}+\tau_{p1} \end{bmatrix} \tag{2.6.7}$$

Vemos que, si el coeficiente de fricción viscosa b_0 es despreciable o se cancela el término con la acción de control, las dos ecuaciones estarán completamente desacopladas.

2.6.4 Aceleración angular del brazo pequeña. Potencial efectivo. Transición atractivo-repulsivo

Consideraremos ahora que la aceleración angular del brazo es pequeña $\left(\ddot{\theta}_0 \approx 0\right)$, y que por lo tanto la velocidad angular $\dot{\theta}_0$ es sensiblemente constante. Reescribimos las ecuaciones del modelo de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2+m_1 L_0^2+J_{0zz}+J_{1xx}+\left(m_1 l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_1) & m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \\ 0 & J_{1zz}+m_1 l_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ +\begin{bmatrix} \left(m_1 l_1^2+J_{1yy}-J_{1xx}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1 \operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ +\begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1)-\dfrac{1}{2}\left(m_1 l_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_{m0}+\tau_{p0} \\ -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0+\tau_{p1} \end{bmatrix}$$

Al ser $\dot{\theta}_0$ constante podemos definir una energía potencial efectiva U_e realizando la siguiente integración con respecto a θ_1:

$$U_e = \int \left(m_1 l_1 g \,\mathrm{sen}(\theta_1) - \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\mathrm{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0^2 \right) d\theta_1 + C$$
$$= -m_1 l_1 g\left(\cos(\theta_1)+1\right) + \frac{1}{4}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\left(\cos(2\theta_1)-1\right)\dot{\theta}_0^2 \qquad (2.6.8)$$

donde hemos escogido la constante de integración C de manera que U_e se anule cuando $\theta_1=\pi$, esto es, cuando el péndulo está completamente levantado.

De esta manera, la segunda ecuación adopta de nuevo la forma correspondiente a un péndulo simple actuado por el par efectivo dado por el segundo término de la ecuación, y con una energía potencial efectiva dada por U_e en lugar del término de energía potencial gravitatoria:

$$\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right)\ddot{\theta}_1 + \delta_1\dot{\theta}_1 - \frac{dU_e}{d\theta_1} = -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p1}$$

Considerando pequeñas oscilaciones del péndulo en torno a $\theta_1=0$, desarrollando en serie de Taylor la energía potencial efectiva y reteniendo términos hasta el segundo orden se tiene:

$$U_{epo} = m_1 l_1 g\left(\frac{\theta_1^2}{2} - 1\right) - \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\dot{\theta}_0^2\frac{\theta_1^2}{2} = \frac{1}{2}m_1 l_1 g\left(1 - \frac{m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}}{m_1 l_1 g}\dot{\theta}_0^2\right)\theta_1^2 - m_1 l_1 g$$

Vemos de esta manera que, si las oscilaciones son pequeñas, y la aceleración angular del brazo y el par perturbador y de fricción viscosa del péndulo son pequeños, el movimiento del péndulo será armónico simple, con una aceleración de la gravedad efectiva dada por:

$$g_e = g\left(1 - \frac{m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}}{m_1 l_1 g}\dot{\theta}_0^2\right) \qquad (2.6.9)$$

La frecuencia angular del movimiento armónico simple en este régimen de oscilaciones pequeñas será así:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\left(1 - \dfrac{m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}}{m_1 l_1 g}\dot{\theta}_0^2\right)}{l_1}} \qquad (2.6.10)$$

Se puede observar que el valor de la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones disminuye desde $\omega = \sqrt{g/l_1}$ para $\dot{\theta}_0 = 0$ hasta $\omega = 0$ para un valor crítico de la velocidad angular del brazo dado por:

$$\dot{\theta}_{0c} = \sqrt{\frac{m_1 l_1 g}{m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}}}$$

Cuando el valor absoluto de la velocidad angular del brazo toma este valor, el período se hace infinito y no hay oscilaciones (la aceleración de la gravedad efectiva se anula). Si lo supera, el potencial pasa de ser atractivo a repulsivo y el péndulo, si es perturbado, se estabilizará en una posición de equilibrio distinta de $\theta_1=0$, en la que la atracción gravitatoria

compensa la fuerza de repulsión, fuera del entorno en la que es válida la aproximación anterior. De esta manera, cuando la velocidad angular del brazo supera el valor crítico, la posición de equilibrio $\theta_1=0$ pasa de ser estable a inestable. Nótese que esta ecuación coincide con la ecuación 2.6.1, como cabía esperar.

Cuando la aproximación anterior deja de ser válida el movimiento ya no será armónico simple y el período vendrá dado en términos de integrales elípticas, que sólo admiten solución numérica. No obstante, cabe esperar que la frecuencia de las oscilaciones aumente con la velocidad angular del brazo una vez ésta supera el valor crítico, debido a la componente de la fuerza centrífuga sobre el eje longitudinal del péndulo, que aumenta al aumentar la velocidad angular del brazo, aumentado así también la aceleración de la gravedad efectivo y por lo tanto la frecuencia de las oscilaciones.

En la Figura 2.6.2 se representan las fuerzas centrífuga y gravitatoria actuando sobre el centro de masas del péndulo. La dirección y sentido de la fuerza centrífuga $\mathbf{F}_c$ no depende del sentido de rotación del brazo, estando siempre dirigida hacia el exterior según la línea que une el centro de rotación con el centro de masas. Cuando el péndulo está inclinado (izquierda), la fuerza centrífuga genera un momento no nulo sobre éste, que si es superior al momento generado por la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}_g$ tenderá a levantar el péndulo hasta que es compensado por el momento generado por la fuerza gravitatoria. La existencia de una velocidad angular crítica del brazo se debe desde este punto de vista a que, para que el péndulo se levante, el momento debido a la fuerza centrífuga deberá ser superior al generado por la fuerza gravitatoria, lo que sucede cuando la velocidad angular del brazo es superior a la velocidad angular crítica. Para que esto suceda el péndulo deberá estar apartado de la posición vertical, ya que de lo contrario el momento de la fuerza centrífuga será cero (derecha).

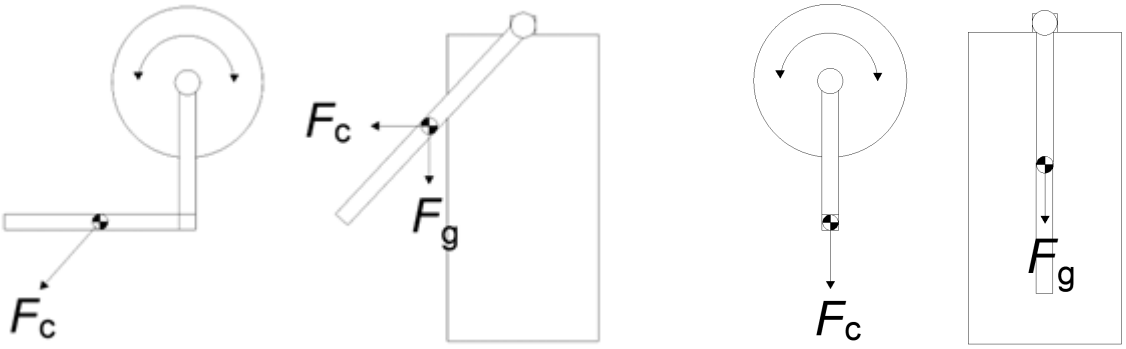


Figura 2.6.2: Fuerzas centrífuga y gravitatoria actuando en el centro de masas del péndulo. Izquierda: péndulo formando un determinado ángulo. Derecha: péndulo vertical. Fuente: elaboración propia

2.6.5 Aceleración y velocidad angular del brazo pequeñas. Brazo inmóvil. Par de reacción. Péndulo simple

Si tanto la velocidad como aceleración angular del brazo son nulas o muy pequeñas $\left(\ddot{\theta}_0, \dot{\theta}_0 \approx 0\right)$, lo que sucede por ejemplo si se fija su posición, el modelo del sistema toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right) & m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) \\ m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \,\text{sen}\left(\theta_1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

Resolviendo para τ_{m0} obtenemos el par de reacción que actúa sobre el eje del brazo cuando lo fijamos para que permanezca inmóvil:

$$\tau_{m0} = m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 - \tau_{p0}$$

Nótese que cuando el brazo permanece inmóvil la segunda ecuación del modelo está desacoplada, y se reduce a:

$$\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right)\ddot{\theta}_1 + \delta_1 \dot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \,\text{sen}\left(\theta_1\right) = \tau_{p1} \tag{2.6.11}$$

que es la ecuación del movimiento de un péndulo simple.

Resolviendo para $\ddot{\theta}_1$ y sustituyendo en la expresión para τ_{m0} resulta:

$$\tau_{m0} = \frac{\left(-m_1 l_1 g \,\text{sen}\left(\theta_1\right) - \delta_1 \dot{\theta}_1 + \tau_{p1}\right) m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)}{J_{1zz} + m_1 l_1^2} - m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 - \tau_{p0} \tag{2.6.12}$$

2.6.6 Aceleración angular del brazo pequeña. Par de control para velocidad angular del brazo constante

Reescribimos las ecuaciones generales de movimiento del péndulo de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right) & 0 \\ m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \,\text{sen}\left(\theta_1\right) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \tau_{m0} - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 - \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - \delta_0\dot{\theta}_0 + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación se tiene:

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 - \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 - \delta_0\dot{\theta}_0}{m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)}$$

Para que la aceleración angular del brazo sea despreciable $\left(\ddot{\theta}_0 \approx 0\right)$, el par de control deberá compensar los pares de reacción, el par de fricción y el par perturbador:

$$\tau_{m0} = m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \text{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \delta_0\dot{\theta}_0 - \tau_{p0}$$

Resolviendo para $\ddot{\theta}_1$ y sustituyendo:

$$\tau_{m0} = \frac{\left(-m_1 l_1 g\,\text{sen}(\theta_1) - \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0^2 - \delta_1\dot{\theta}_1 + \tau_{p1}\right) m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)}{J_{1zz} + m_1 l_1^2} \quad (2.6.13)$$
$$+\left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \text{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \delta_0\dot{\theta}_0 - \tau_{p0}$$

Por lo tanto, al aplicar este par de control la velocidad angular del brazo permanecerá constante. En el caso particular de que el brazo se encuentre inmóvil, la expresión que da el par que es necesario aplicar para que permanezca en reposo se simplifica y coincide con la ecuación 2.6.12.

2.7 Sistema actuador. Motor DC y tren de engranajes

El péndulo invertido rotatorio está actuado usualmente por un motor de corriente continua (DC) acoplado a tren de engranajes (por ejemplo [23]), por lo que desarrollaremos en este apartado un modelo matemático de este sistema.

Los motores de corriente continua típicamente se modelan con un circuito en configuración serie alimentado por una tensión V_s, en el que intervienen una resistencia R_m, que representa la resistencia del bobinado, una inductancia L_m, que representa la inductancia del bobinado, siendo usualmente despreciable, y un generador de tensión V_fcem con dependencia lineal de la velocidad angular del eje $\dot{\theta}_m$, con constante de proporcionalidad k_m ($V_\text{fcem} = k_\text{m}\dot{\theta}_\text{m}$), que representa la fuerza contraelectromotriz generada en el bobinado por la inducción magnética al rotar éste (Figura 2.7.1).

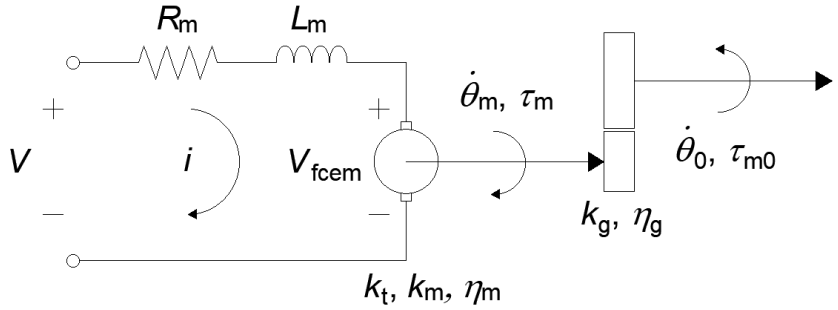


Figura 2.7.1: Modelo electromecánico equivalente del sistema motor DC-tren de engranajes. Fuente: elaboración propia

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito se obtiene la siguiente expresión:

$$V_s = R_m i + L_m \dot{i} + k_m \dot{\theta}_m \quad (2.7.1)$$

El par generado por el motor τ_{m} es directamente proporcional a la intensidad i que recorre el circuito de acuerdo con la siguiente ecuación, siendo k_{t} la constante de proporcionalidad y η_{m} la eficiencia del motor:

$$\tau_{\mathrm{m}} = \eta_m k_t i$$

Realizando un balance de energía se deduce de forma inmediata que las constantes k_{m} y k_{t} han de ser numéricamente iguales si se utiliza un conjunto consistente de unidades de medida.

Resolviendo para i y sustituyendo en la ecuación 2.7.1 se tiene, despreciando el término en L_{m}:

$$V_s = R_m \frac{\tau_{\mathrm{m}}}{\eta_m k_t} + k_m \dot{\theta}_m \tag{2.7.2}$$

de donde:

$$\tau_{\mathrm{m}} = \eta_m k_t \frac{V_s - k_m \dot{\theta}_m}{R_m} \tag{2.7.3}$$

Si el eje del motor se acopla a un tren de engranajes de relación de transmisión k_{g} y eficiencia η_{g} (Figura 2.3) deberán cumplirse las ecuaciones 2.7.4, donde $\dot{\theta}_0$ es la velocidad angular de salida y τ_{m0} es el par de salida:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\dot{\theta}_m}{k_g},\ \tau_{m0} = \eta_g k_g \tau_m \tag{2.7.4}$$

Resolviendo para $\dot{\theta}_m$, τ_m y sustituyendo en la ecuación 2.7.2 se obtiene la expresión para el voltaje V que es necesario aplicar al motor para que actúe un par efectivo τ_{m0} sobre el brazo del péndulo conocida la velocidad angular del brazo $\dot{\theta}_0$:

$$V_s = \frac{R_m \tau_{\mathrm{m0}}}{\eta_g \eta_m k_g k_t} + k_g k_m \dot{\theta}_0 \tag{2.7.5}$$

De manera semejante, de la ecuación 2.7.3 se obtiene la expresión para el par efectivo τ_{m0} que actúa sobre el brazo del péndulo, en función del voltaje V aplicado al motor y de la velocidad angular del brazo.

$$\tau_{\mathrm{m0}} = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t}{R_m}\left(V_s - k_g k_m \dot{\theta}_0\right) \tag{2.7.6}$$

2.8 Parámetros del modelo utilizado en las simulaciones

Los parámetros utilizados para el modelo del péndulo se han tomado iguales a los del péndulo empleado por Cazzolato y Prime en [6], a los que se ha añadido el momento de inercia $J_{1\mathrm{xx}}$, siendo éste un valor estimado. Para el actuador se han tomado los parámetros de la base servomotor SRV02 de Quanser [23], en la configuración de par alto.

Se muestran en la tabla 2.1 los parámetros utilizados para el modelo del péndulo y en la tabla 2.2 los utilizados para el modelo del actuador. Se limitará la tensión de alimentación del motor al valor de su tensión nominal V_{nom}.

Tabla 2.1: Parámetros del modelo del péndulo invertido rotacional

Parámetro	Unidades	Valor
m_0	kg	0,300
m_1	kg	0,075
L_0	m	0,278
L_1	m	0,300
l_0	m	0,150
l_1	m	0,148
J_{0zz}	kgm^2	$2{,}48\cdot10^{-2}$
J_{1zz}, J_{1yy}	kgm^2	$3{,}86\cdot10^{-3}$
J_{1xx}	kgm^2	$J_{1zz}\cdot10^{-2}$
δ_0	Nms	$1{,}0\cdot10^{-4}$
δ_1	Nms	$2{,}8\cdot10^{-4}$
g	ms^{-2}	9,81

Tabla 2.2: Parámetros del modelo del actuador

Parámetro	Unidades	Valor
R_m	Ω	2,6
L_m	H	$1{,}8\cdot10^{-4}$
k_{m}	Vs	$7{,}68\cdot10^{-3}$
k_{t}	NmA^{-1}	$7{,}68\cdot10^{-3}$
k_{g}	-	70
η_{m}	-	0,69
η_{g}	-	0,90
V_{nom}	N	6

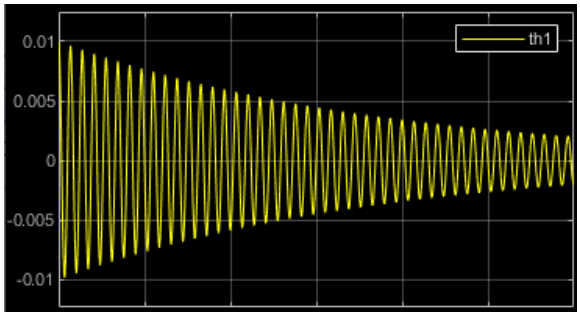
2.9 Simulaciones: bifurcación supercrítica, dependencia de la frecuencia de oscilación con la velocidad angular del brazo. Análisis de resultados

Se simulará en este apartado el comportamiento del péndulo rotacional cuando la velocidad angular del brazo es constante, con objeto de estudiar el comportamiento del péndulo a distintas velocidades angulares y contrastar los resultados teóricos obtenidos en los epígrafes 2.6.1 y 2.6.4 con los de las simulaciones.

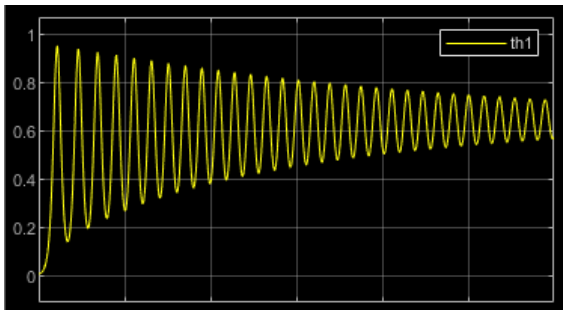
En la Figura 2.9.1 se simula el comportamiento del péndulo a velocidades angulares del brazo inferiores y superiores a la velocidad angular crítica (ecuación 2.6.2). El tiempo de simulación es 60 s en todos los casos. Teniendo en cuenta los valores de los parámetros dados en la tabla 2.1, de la ecuación 2.6.2 resulta una velocidad angular crítica $\dot{\theta}_{0c} = 4,46\ \text{s}^{-1}$. En a) se muestra la evolución del ángulo θ_1, para las condiciones iniciales dadas en la leyenda, cuando la velocidad angular del brazo es constante e igual a $\dot{\theta}_0 = 4\ \text{s}^{-1}$,

valor que está por debajo de la velocidad angular crítica. El péndulo se estabiliza así en la posición vertical a medida que pierde energía por fricción, al solo existir la solución de equilibrio θ_{1eq}=0, que es estable. En b) y c) la velocidad angular del brazo es $\dot{\theta}_0 = 5$ s^{-1}, valor que supera el valor crítico. Podemos comprobar la influencia que tienen las condiciones iniciales en el signo del ángulo de equilibrio del péndulo, positivo en el primer caso y negativo en el segundo, siendo la velocidad angular del brazo la misma. De la ecuación 2.6.1 se obtienen los ángulos de equilibrio estable θ_{1eq}=±0,65, valores que concuerdan con los resultados de las simulaciones. El ángulo de equilibrio θ_{1eq}=0 es ahora inestable, por lo que una pequeña desviación alejará al péndulo de la posición vertical, como vemos que sucede. En d) la velocidad angular del brazo es elevada, por lo que el péndulo se estabilizará en posición casi horizontal (ecuación 2.6.3). Nótese que el ángulo θ_1 alcanza al principio un valor cercano a 3, superando el valor $\pi/2$ aun siendo la velocidad angular del brazo constante, debido a la energía que adquiere en su movimiento inicial de ascenso hacia la posición de equilibrio. En e) la velocidad angular del brazo (izquierda) no es constante, evolucionando libremente desde el valor inicial $\dot{\theta}_{0i} = 5$ s^{-1}. Podemos comprobar que el ángulo de equilibrio en torno al que oscila el péndulo (derecha) decrece muy lentamente hasta que la velocidad angular del brazo se acerca a su valor crítico, momento en el que, de forma muy abrupta, el péndulo pasa a oscilar en torno al ángulo de equilibrio θ_{1eq}=0, que pasa a ser estable.

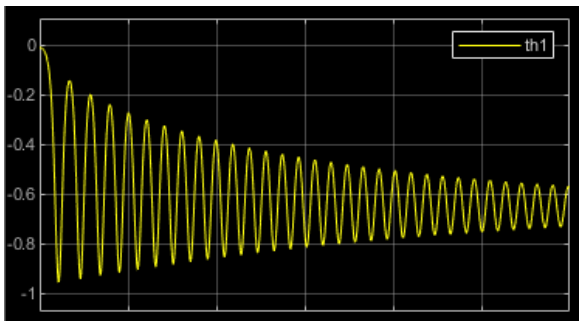
En la Figura 2.9.2 se estudia la variación del período de las oscilaciones del péndulo con la velocidad angular del brazo. El tiempo de simulación es 60 s en todos los casos. En a), b) y c) podemos comprobar que, de acuerdo con la ecuación 2.6.10, el período aumenta a medida que la velocidad angular del brazo aumenta desde 0 s^{-1} hasta el valor crítico, para el que se hace infinito. Posteriormente disminuye a medida que sigue aumentando la velocidad angular del brazo. De los resultados de las simulaciones se sigue que, una vez la velocidad angular del brazo supera el valor crítico, el período del péndulo disminuye de forma monótona a medida que sigue aumentando la velocidad angular del brazo, lo que puede explicarse por la componente que la fuerza centrífuga tiene sobre el eje longitudinal del péndulo, lo que da lugar a un potencial efectivo repulsivo según lo visto en el epígrafe 2.6.4. Esto hace que, además de disminuir el período de sus oscilaciones, el péndulo se estabiliza en una posición angular distinta de la vertical, como podemos comprobar en d) y en la Figura 2.9.1.



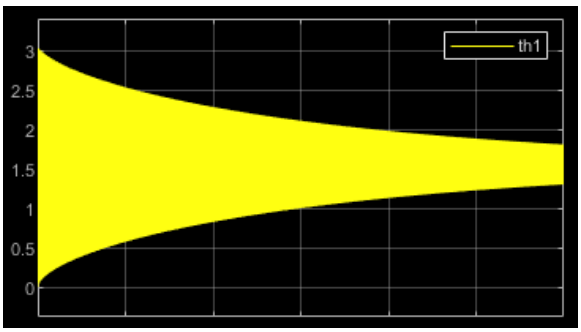
a) $\dot{\theta}_0$ =4 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, θ_{1eq}=0



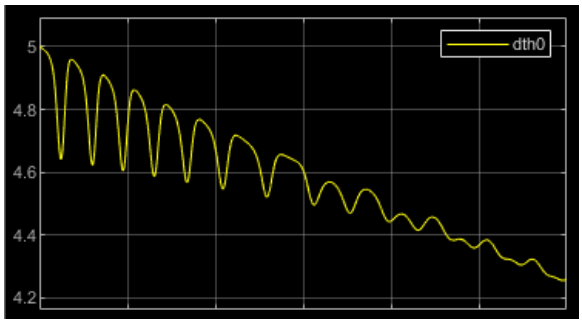
b) $\dot{\theta}_0$ =5 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, θ_{1eq}=0,65

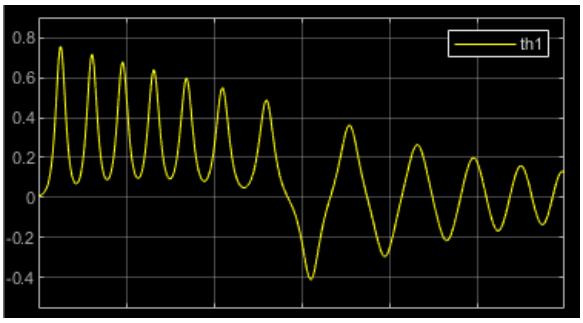


c) $\dot{\theta}_0$ =5 s^{-1}, θ_{1i} =-0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, θ_{1eq}=-0,65



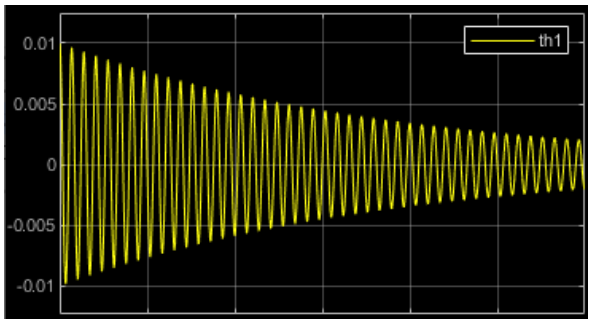
d) $\dot{\theta}_0$ =100 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, $\theta_{1eq}\approx\pi/2$



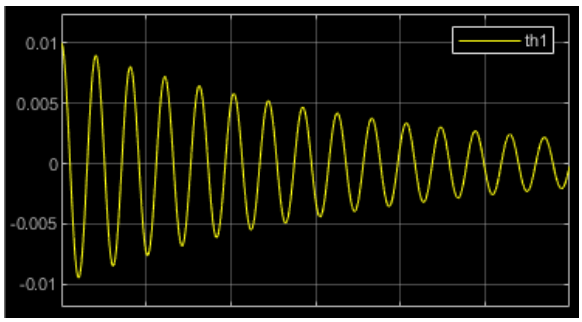


e) $\dot{\theta}_{0i}$ =5 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}. Izquierda: $\dot{\theta}_0$, derecha: θ_1

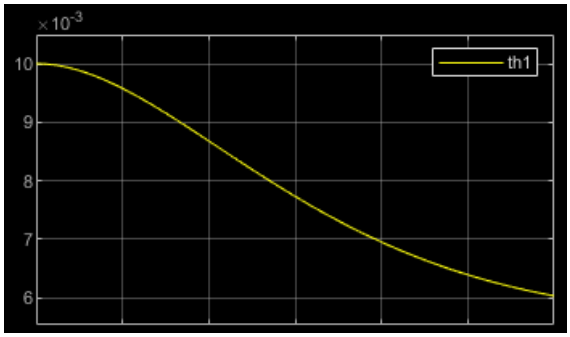
Figura 2.9.1: Bifurcación supercrítica del punto de equilibrio estable. Péndulo simple



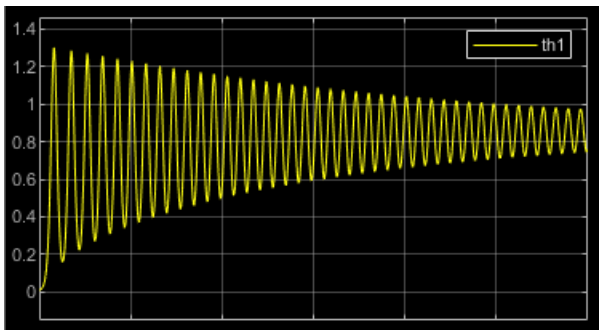
a) $\dot{\theta}_0$ =0 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}



b) $\dot{\theta}_0$ =4,2 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}



c) $\dot{\theta}_0 \approx \dot{\theta}_{0c}$ =4,46 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}



d) $\dot{\theta}_0$ =6 s^{-1}, θ_{1i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}

Figura 2.9.2: Variación del período de oscilación del péndulo con la velocidad angular del brazo. Péndulo simple

3. CONTROL DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

Se desarrollarán y aplicarán a lo largo de este capítulo diversas estrategias de control para el levantamiento, estabilización y bajada del péndulo invertido rotacional. Se utilizarán para el modelo empleado en las simulaciones los valores de los parámetros dados en las tablas 2.1 y 2.2.

3.1 Levantamiento del péndulo (swing-up)

Se desarrollarán en este apartado leyes de control para el levantamiento del péndulo. Se comienza con la estrategia propuesta por Åström y Furuta, basada en el control de la energía, y se propondrán variaciones para compensar los pares de reacción del péndulo, los términos disipativos, se utilizará la energía potencial efectiva en vez de la gravitatoria y se revisará la estrategia de control propuesta por Gordillo, Acosta y Aracil, basada en el método del pseudogradiente de velocidad de Fradkov.

3.1.1 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2

Aplicaremos en este epígrafe el método de control de la energía propuesto por Åström y Furuta [8] para el levantamiento del péndulo.

Considerando la aproximación de momento de inercia del brazo grande y velocidad angular del brazo pequeña se tiene que la ecuación diferencial que describe el movimiento del brazo se desacopla de la ecuación que rige el movimiento del péndulo (modelo de dimensión 2). Recordemos que en este caso el movimiento está definido por las ecuaciones 2.6.3:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \ddot{\theta}_0 + \tau_{p1} \end{bmatrix}$$

Si despreciamos las fuerzas de fricción y los pares perturbadores, la ecuación del movimiento del brazo viene dada por:

$$\left(m_0 l_0^2 + J_{0zz}\right) \ddot{\theta}_0 = \tau_{m0} \tag{3.1.1}$$

y la ecuación del movimiento del péndulo es:

$$\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right) \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \operatorname{sen}(\theta_1) = -m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) u \ , \ u = \ddot{\theta}_0$$

La energía del péndulo, sin considerar el brazo, viene dada por:

$$E = T + U = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + J_{1zz}\right) \dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 - m_1 l_1 g \left(\cos(\theta_1) + 1\right)$$

Siguiendo el método directo de Lyapunov [19], se intenta definir una función V tal que $V(\mathbf{x})$ sea definida positiva y $\dot{V}(\mathbf{x})$ definida negativa.

Tomamos como candidata a función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\left(E - E_r\right)^2$$

donde E_r es la energía de referencia objetivo, que para la configuración de equilibrio péndulo totalmente levantado toma el valor E_r=0.

La derivada temporal de V es:

$$\dot{V} = \left(E - E_r\right)\dot{E}$$

Calculamos la derivada de la energía con respecto al tiempo:

$$\dot{E} = -m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 u$$

Si definimos la ley de control

$$u = k\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \tag{3.1.2}$$

con k una constante positiva, se tendrá:

$$\dot{E} = -m_1 L_0 l_1 k\left(E - E_r\right)\left(\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1\right)^2$$

y por lo tanto:

$$\dot{V} = -m_1 L_0 l_1 k\left(\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1\right)^2 \leq 0$$

V será decreciente siempre que $\cos\left(\theta_1\right) \neq 0$ y $\dot{\theta}_1 \neq 0$. No obstante, para $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ y para $\dot{\theta}_1 = 0$ (salvo cuando se encuentra en reposo en su posición de equilibrio estable o inestable en este último caso) el péndulo no puede mantener una posición estacionaria, con lo que terminará alcanzándose el objetivo E=E_r. Nótese que cuando $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ o $\dot{\theta}_1 = 0$ el sistema no es controlable en la energía.

Cuando el péndulo se encuentra en reposo en su posición de equilibrio estable se tiene que $\theta_1 = 0$, por lo que el control no actuará y V no decrecerá. Por este motivo, cuando el péndulo se encuentra inicialmente en reposo en su posición de equilibrio estable es preciso perturbarlo ligeramente para que el control comience a actuar.

Definida así la ley de control u para la aceleración angular del brazo (ecuación 3.1.2), de acuerdo con la ecuación 3.1.1 el par que es necesario aplicar viene dado por la siguiente expresión:

$$\tau_{m0} = k\left(m_0 l_0^2 + J_{0zz}\right)\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \tag{3.1.3}$$

Åström y Furuta proponen la siguiente variante de esta la ley de control, con objeto de que la energía varíe lo más rápidamente posible (variante 1):

$$u = \mathrm{sat}_{\ddot{\theta}_{0,\max}}\left(k\left(E - E_r\right)\mathrm{sign}\left(\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1\right)\right) \tag{3.1.4}$$

y por lo tanto:

$$\tau_{m0} = \mathrm{sat}_{\tau_{m0,\max}}\left(k\left(E - E_r\right)\mathrm{sign}\left(\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1\right)\right) \tag{3.1.5}$$

Para evitar el fenómeno de chattering a que puede dar lugar esta variante, proponen la siguiente modificación (variante 2):

$$u = \ddot{\theta}_{0,\max} \operatorname{sign}\left(\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1\right) \tag{3.1.6}$$

de donde resulta la siguiente expresión para el par:

$$\tau_{m0} = \tau_{m0,\max} \operatorname{sign}\left(\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1\right) \tag{3.1.7}$$

3.1.2 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2 con compensación de pares de reacción

Reescribimos la primera ecuación del modelo matemático completo del péndulo invertido rotacional (ecuación 3.1.1) de la siguiente forma, donde hemos despreciado pares perturbadores y de fricción:

$$\begin{aligned}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\ddot{\theta}_0 = \tau_{m0} - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 \\ -\left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Si hacemos $\tau_{m0} = \tau_{mu0} + \tau_{mr0}$, con:

$$\tau_{mr0} = m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2$$

la ecuación 3.1.8 se simplifica a:

$$\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\ddot{\theta}_0 = \tau_{mu0}$$

Considerando para $u=\ddot{\theta}_0$ la ley de control dada por la ecuación 3.1.2 se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau_{mu0} = k\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1$$

Por lo tanto, el par de control vendrá dado ahora por:

$$\begin{aligned}\tau_{m0} = k\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \\ + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

3.1.3 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2 con compensación de pares de reacción y de fricción viscosa

Si despreciamos los pares perturbadores, pero no los de fricción, la primera ecuación del modelo matemático completo del péndulo invertido rotacional toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\ddot{\theta}_0 = \tau_{m0} - m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 \\ -\left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 - \delta_0\dot{\theta}_0\end{aligned}$$

Hacemos ahora $\tau_{m0} = \tau_{mu0} + \tau_{mr0} + \tau_{mf0}$, donde τ_{mr0} lo definimos como antes:

$$\tau_{mr0} = \left(m_1 L_0^2 + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\ddot{\theta}_0 + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2$$

El término disipativo del brazo lo compensamos haciendo:

$$\tau_{mf0} = \delta_0 \dot{\theta}_0$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, y asumiendo que el momento de inercia del brazo es grande y su velocidad angular pequeña, las ecuaciones del modelo se pueden escribir así:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \,\text{sen}\left(\theta_1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{mu0} \\ -m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) u \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

Definimos $u = u_u + u_f$, con

$$u_f = -\frac{\delta_1 \dot{\theta}_1}{m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)}$$

expresión válida siempre que $\cos(\theta_1) \neq 0$, esto es, siempre que $\theta_1 \neq \pm\pi/2$.

Con estas definiciones, la segunda ecuación de 3.1.10 queda de la siguiente forma:

$$\left(J_{1zz} + m_1 l_1^2\right)\ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \,\text{sen}\left(\theta_1\right) = -m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) u_u$$

Si obviamos las singularidades esenciales en $\theta_1 = \pm\pi/2$, siguiendo el mismo desarrollo que en el epígrafe 3.1.1 llegamos a la siguiente ley de control para u_u:

$$u_u = k\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1$$

y por lo tanto:

$$u = \left(k\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right) - \frac{\delta_1}{m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)}\right)\dot{\theta}_1 \quad (3.1.11)$$

De esta manera, si $\theta_1 \neq \pm\pi/2$ el par de control estará dado por:

$$\begin{aligned} \tau_{m0} = {} & k\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right) \\ & \cdot\left(\left(E - E_r\right)\cos\left(\theta_1\right) - \frac{\delta_1}{m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)}\right)\dot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 \\ & + \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 + \delta_0\dot{\theta}_0 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

En la práctica el par de control está limitado a un valor máximo, por lo que puede tomarse, cuando $\theta_1 = \pm\pi/2$:

$$\tau_{m0} = \pm\left|\tau\right|_{\max}$$

Nótese que, a pesar de que *u* en 3.1.11 no es continua ni derivable en todos los puntos, y por lo tanto el desarrollo realizado no es matemáticamente riguroso, teniendo en cuenta que sólo existen dos puntos de discontinuidad en el intervalo [0, 2π) es previsible que esta ley logre compensar al menos parcialmente los términos disipativos.

3.1.4 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 2 con compensación de pares de reacción y potencial efectivo

En el epígrafe 2.6.4 vimos que cuando la aceleración angular del brazo es pequeña, el modelo matemático del péndulo invertido rotacional se puede simplificar sustituyendo la energía potencial gravitatoria por una energía potencial efectiva dada por la ecuación 2.6.8:

$$U_e = -m_1 l_1 g\left(\cos\left(\theta_1\right)+1\right)+\frac{1}{4}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\left(\cos\left(2\theta_1\right)-1\right)\dot{\theta}_0^2$$

Al hacer esto, suponiendo despreciables la fricción viscosa y los pares perturbadores, las ecuaciones del modelo toman la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right) & m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) \\ m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{dU_e}{d\theta_1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_{m0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo un desarrollo análogo al de los epígrafes 3.1.1 y 3.1.2, tomando como término de energía $E_e = T + U_e$ y como energía de referencia E_{re}, resulta la siguiente expresión para el par de control:

$$\begin{aligned} \tau_{m0} = {} & k\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right)\left(E_e - E_{re}\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \\ & + m_1 L_0 l_1 \cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

La energía efectiva de referencia para la configuración de péndulo totalmente levantado es E_{re}=0.

3.1.5 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4. Pseudogradiente de velocidad

La ley de control de la energía expuesta en el epígrafe 3.1.1, si bien tiene la ventaja de su simplicidad, toma como referencia el modelo de dimensión 2 del péndulo, por lo que no considera la energía del brazo y no garantiza que su velocidad angular se mantenga siempre en valores pequeños. Asimismo, su validez depende de que efectivamente la velocidad del brazo se mantenga pequeña, y de que el momento de inercia del brazo sea grande en comparación con el momento de inercia del péndulo.

Gordillo, Acosta y Aracil proponen en [21] una ley de control considerando el modelo de dimensión 4 del péndulo, a partir del método del pseudogradiente de velocidad de Fradkov en forma finita [22].

De acuerdo con teorema de Fradkov-Pogromsky, dado el sistema afín en control:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ es la salida y $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, y la función objetivo:

$$V = \frac{1}{2}\left|\mathbf{h}(\mathbf{x})\right|^2$$

entonces la ley de control dada por

$$\mathbf{u} = -k\nabla_u \dot{V}(\mathbf{x}) \tag{3.1.14}$$

hace que la función objetivo se anule cuando el tiempo tiende a infinito [27]:

$$\lim_{t\to\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0$$

Las condiciones de este teorema para sistemas subactuados son las siguientes:

1. Las funciones **f**, **g** y **h** y sus derivadas parciales hasta el segundo orden son continuas y acotadas en una región $\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < V_0\}$ para algún V_0.
2. $\forall \mathbf{x} \in \Omega_0$ se sigue que $\mathbf{h}(\mathbf{x})^T L_\mathbf{f}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \le 0$, con $\mathbf{h}(\mathbf{x})^T L_\mathbf{f}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \in \Omega_0$ y $L_\mathbf{g}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, donde $L_\mathbf{f}\mathbf{h}(\mathbf{x})$ representa la derivada de Lie de la función **h**(**x**) con respecto a **f**.
3. $\exists \varepsilon > 0$ tal que todo subconjunto conexo del conjunto $D_\varepsilon = \Omega_0 \bigcap \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \det\left(L_\mathbf{g}\mathbf{h}(\mathbf{x})^T L_\mathbf{g}\mathbf{h}(\mathbf{x})\right) \le \varepsilon\right\}$ es compacto.
4. $\dim(S(x)) \ge l$, donde $S(x) = \text{span}\left\{L_\mathbf{f}^k\left(L_\mathbf{g}\mathbf{h}(\mathbf{x})\right), k = 0,1...\right\}$, donde dim representa la dimensión del espacio vectorial, l es el número de salidas del sistema y span representa el conjunto generado por el conjunto generador.

Si despreciamos los pares perturbadores y de fricción viscosa, la ecuación 2.4.2 que define el modelo en espacio de estados del péndulo rotacional queda de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}u\,, \quad u = \tau_{m0} \tag{3.1.15}$$

Gordillo, Acosta y Aracil proponen como función objetivo

$$V = \frac{1}{2}\left(\left(E - E_r \right)^2 + \eta \left(p_0 - p_{0r} \right)^2 \right)$$

y demuestran en [21] que se cumplen las condiciones del teorema, por lo que la función objetivo convergerá a cero en el límite $t \to \infty$.

Calculamos la derivada temporal de la función objetivo V:

$$\dot{V} = \left(E - E_r \right) \dot{E} + \eta \left(p_0 - p_{0r} \right) \dot{p}_0 = \left(E - E_r \right) \dot{\theta}_0 u + \eta \left(p_0 - p_{0r} \right) u$$

donde se ha tenido en cuenta que $u = \tau_{m0}$, que de la ecuación 2.1.4 se deduce que, en ausencia de pares perturbadores y de fricción, la energía transferida por unidad de tiempo al sistema completo brazo más péndulo viene dada por $\dot{E} = \dot{\theta}_0 \tau_{m0}$ y que, en ausencia de pares perturbadores y de fricción, la derivada temporal del momento conjugado de la coordenada angular del brazo viene dada por la ecuación 2.2.3:

$$\dot{p}_0 = \tau_{m0}$$

De la ecuación 3.1.14, la ley de control a que da lugar la aplicación del método de Fradkov-Pogromsky en forma finita es:

$$u = -k \nabla_u \dot{V} = -k \frac{\partial \dot{V}}{\partial u} = -k \left(\left(E - E_r \right) \dot{\theta}_0 + \eta \left(p_0 - p_{0r} \right) \right) \tag{3.1.16}$$

Si el estado objetivo es x = [0 π 0 0], considerando que el origen de la energía potencial del péndulo se tomó en la posición arriba, y teniendo en cuenta la ecuación 2.2.1 para el momento conjugado de la coordenada angular del brazo:

$$p_0 = \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy} \right) \text{sen}^2 \left(\theta_1 \right) \right) \dot{\theta}_0 + m_1 L_0 l_1 \cos \left(\theta_1 \right) \dot{\theta}_1$$

resulta:

$$E_r = 0, \; p_{0r} = 0$$

Puesto que la coordenada θ_0 es cíclica, en ausencia de pares externos su momento conjugado p_0 permanecerá constante por lo que, de acuerdo con la ecuación 3.1.16, una vez alcanzado el objetivo cabe esperar que la acción de control sea muy pequeña.

3.1.6 Simulaciones. Análisis de resultados

Se muestran en este apartado los resultados de las simulaciones de las estrategias de control descritas en los epígrafes anteriores.

La Figura 3.1.1 corresponde a la simulación de la estrategia original de Åström y Furuta, ecuaciones 3.1.2 y 3.1.3. Se han tomado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0,1, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, k=10 y E_r=0 J. Podemos comprobar en f) que la energía total del péndulo no alcanza su valor objetivo cero, y por lo tanto la energía potencial g) tampoco, lo que indica que el péndulo no se levanta completamente (el origen

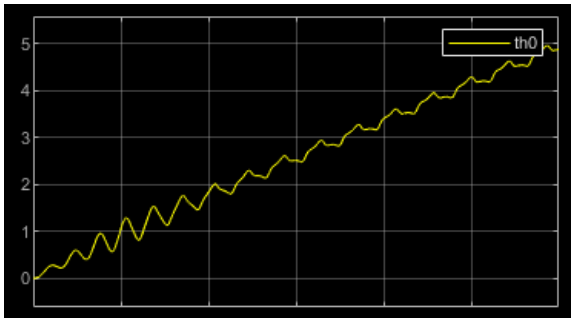
de la energía potencial se tomó en la posición arriba, por lo que si se levanta completamente la energía potencial tomará el valor cero). Teóricamente la función de Lyapunov, tal y como fue definida, no puede crecer y debe estabilizarse en cero, pero sin embargo comprobamos que lo hace. Esto es debido a la aproximación considerada en el desarrollo para la relación entre las masas del brazo y del péndulo, que solo se cumple de forma aproximada, y a la existencia de términos disipativos, que fueron tomados en cuenta en el desarrollo. En a) y b) vemos que el brazo mantiene una pequeña velocidad de deriva, ya que ésta es una ley que toma en consideración el modelo de dimensión 2, por lo que no tiene en cuenta el brazo.

En la Figura 3.1.2 se muestran los resultados de la simulación de la estrategia de control de Åström y Furuta, compensando los pares de reacción en el cálculo del par actuador (ecuación 3.1.9). Se han tomado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0,1, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, k=10 y E_r=0 J. Nótese que ahora la función de Lyapunov (h) es monótona decreciente, la energía total del péndulo se mantiene constante, aunque no alcanza el valor de referencia Er=0, debido a la existencia de fricción y que el modelo utilizado para el desarrollo de esta ley de control es una aproximación del modelo real (f), el péndulo no se levanta completamente, pero sí un poco más que antes (puesto que el origen de la energía potencial se tomó con el péndulo totalmente levantado, cuanto más se acerque el valor de la energía potencial a cero tanto más levantado estará, y estará completamente levantado cuando la energía potencial alcance el valor de referencia cero) (g) y la velocidad angular del brazo es muy pequeña una vez se alcanza el objetivo (b). El control no se hace ahora pequeño una vez se alcanza el objetivo, ya que debe compensar los pares de reacción asociados al movimiento del péndulo (i, j).

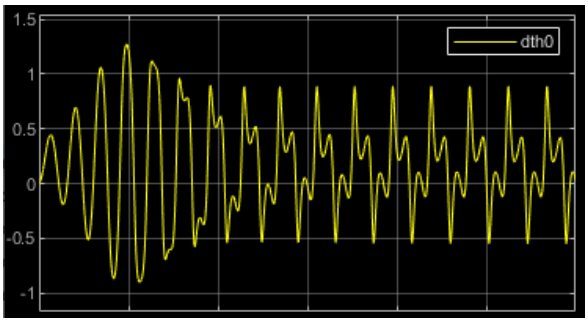
La Figura 3.1.3 muestra los resultados de la simulación del control de Åström y Furuta, compensando los términos de fricción viscosa y los pares de reacción en el cálculo del par de control (ecuación 3.1.12). Se han tomado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i} =0,1, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, k=10 y E_r=0 J. Ahora no se aprecian oscilaciones en la función de Lyapunov (h) ni en la energía del péndulo una vez se alcanza la referencia Er=0 (f, h), El péndulo ahora se levanta completamente, ya que la energía potencial alcanza el valor 0 (g). Esto puede verse también en la evolución del ángulo θ_1 (c). En contrapartida, el control se satura cada vez que θ_1 se acerca a $\pm\pi/2$ (cuatro veces por oscilación que llegue a o sobrepase ese valor), debido a las singularidades esenciales de la ley de control en esos puntos. Nótese que, puesto que esta ley solo controla la energía del péndulo (modelo de dimensión 2), la energía del péndulo se mantiene ahora en su valor de referencia 0 sin oscilaciones, pero no así la energía total del sistema, ya que la energía del brazo no está considerada en la ley de control.

La Figura 3.1.4 se simula la actuación del control de Åström y Furuta, utilizando la energía potencial efectiva en la ley de control y compensando los pares de reacción en el cálculo del par de control (ecuación 3.1.13). Se han tomado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i} =0,1, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}. En este caso no se aprecia diferencia en la evolución del ángulo θ_1, de la función de Lyapunov ni de la energía con respecto a la Figura 3.1.2. No obstante, cabe esperar que si la velocidad angular del brazo fuera más grande, el término en el cuadrado de la velocidad angular del brazo tomaría relevancia en la energía potencial efectiva y las dos leyes serían diferentes.

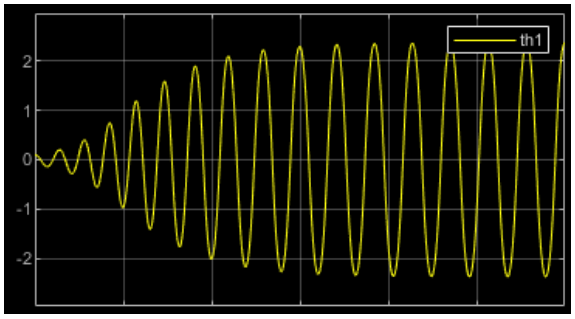
En la Figura 3.1.5 se muestra el resultado de la simulación para las condiciones iniciales θ_{0i} =0, $\dot{\theta}_{0i}$ =0 s^{-1}, θ_{1i} =0,1, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, considerando la estrategia del pseudogradiente de velocidad de Fradkov. El tiempo de simulación es de 90 s, k=5, η=12, E_{re}=0 J y p_{0re}=0 kg·m^2s^{-1}. La energía del péndulo no llega a alcanzar el valor de referencia, y oscila continuamente (h). La función de Lyapunov tampoco se comporta bien (l), ya que no converge a cero y es creciente en algunas regiones. Este comportamiento es posiblemente debido a los términos disipativos por fricción viscosa, que no están considerados en la ley.



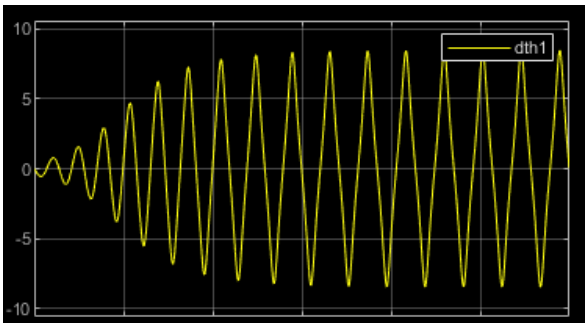
a) Ángulo θ_0



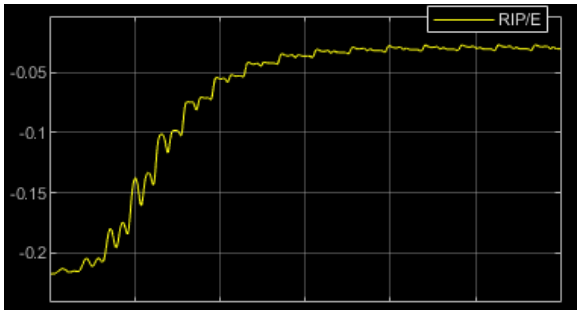
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



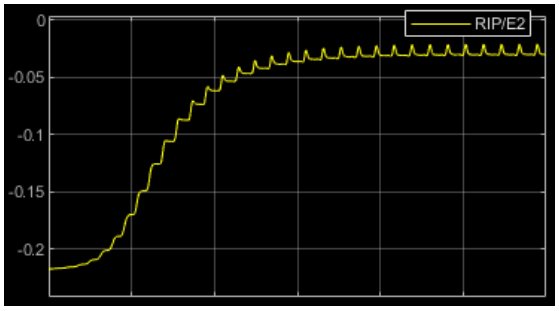
c) Ángulo θ_1



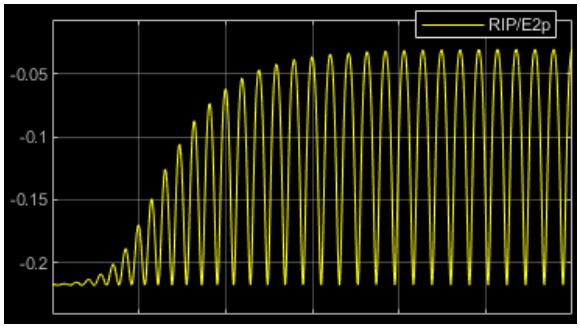
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



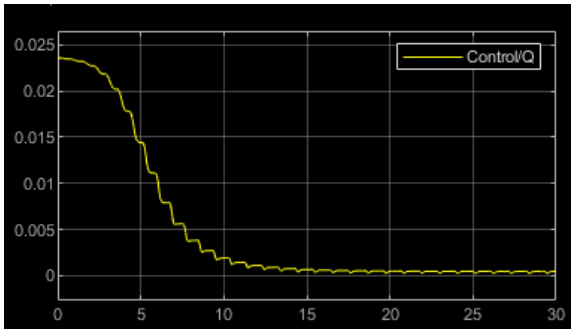
e) Energía total del sistema



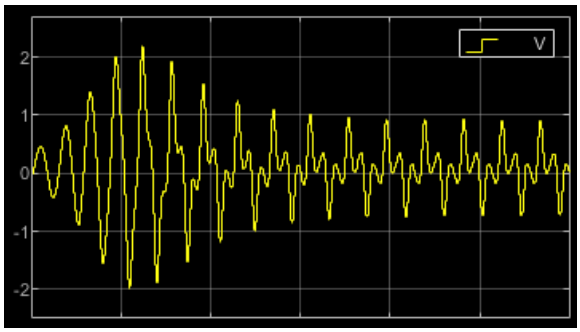
f) Energía total del péndulo



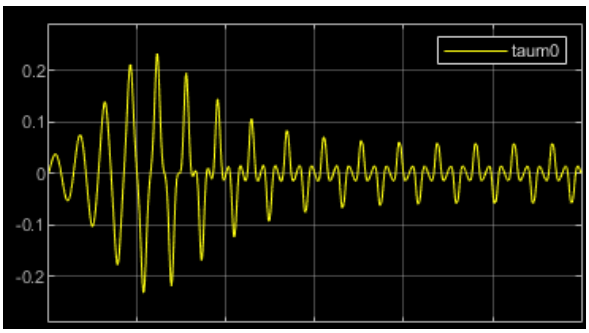
g) Energía potencial del péndulo



h) Función de Lyapunov V

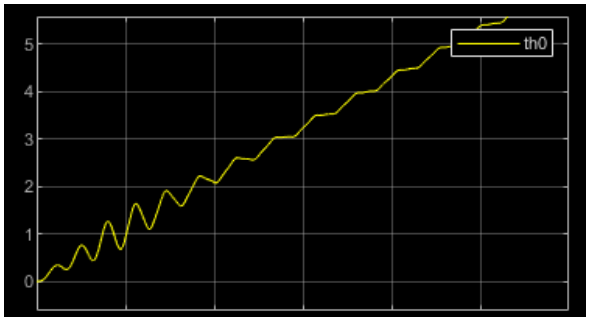


i) Tensión de control Vs

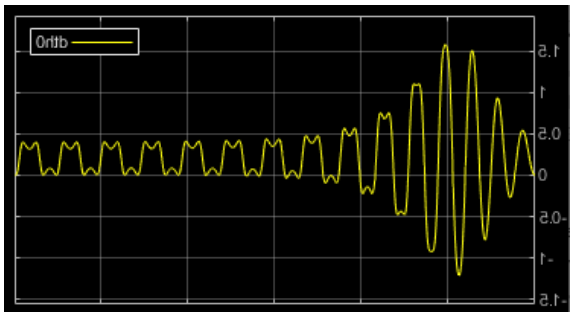


j) Par de control τ_{m0}

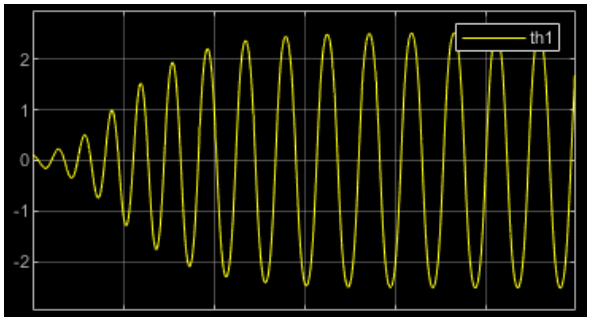
Figura 3.1.1: Simulación de la ley original de Åström y Furuta. Péndulo rotatorio simple



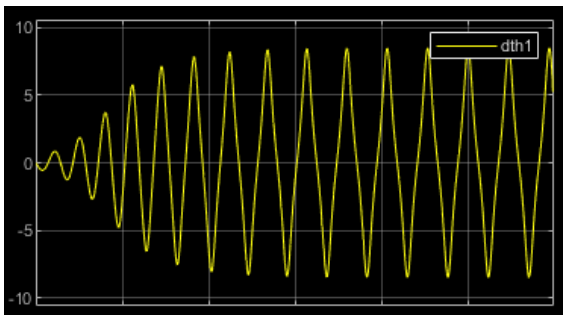
a) Ángulo θ_0



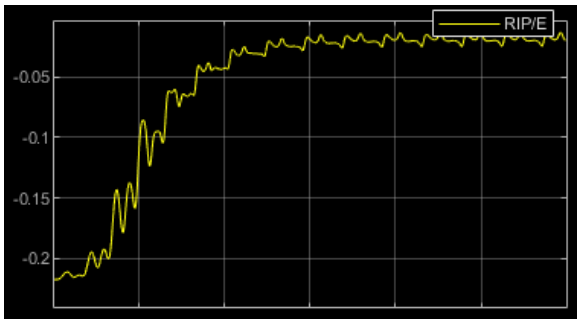
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



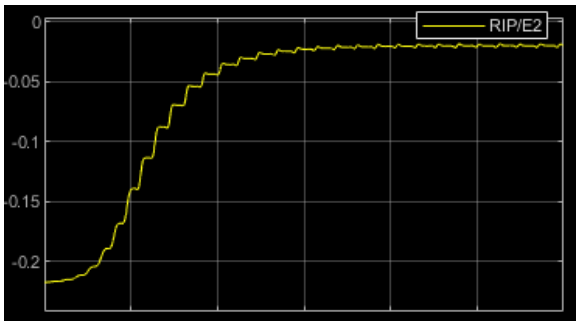
c) Ángulo θ_1



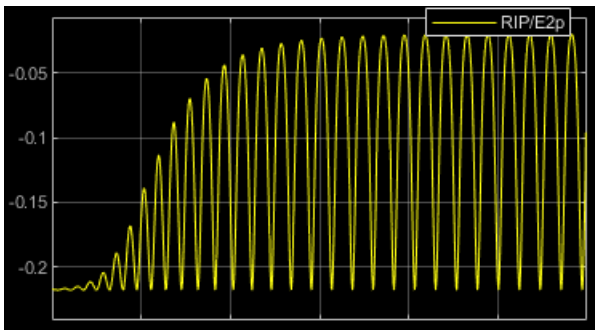
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



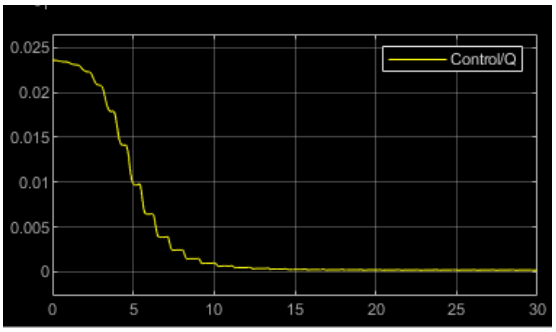
e) Energía total del sistema



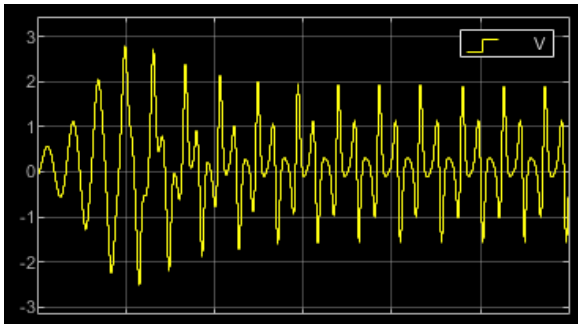
f) Energía total del péndulo



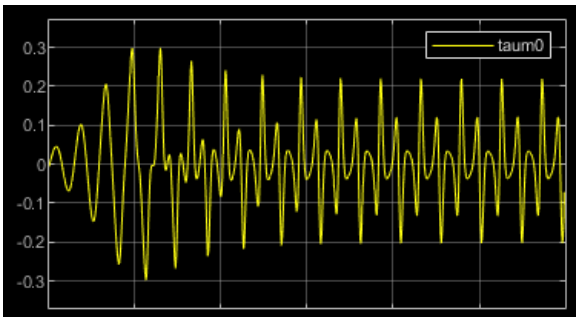
g) Energía potencial del péndulo



h) Función de Lyapunov V

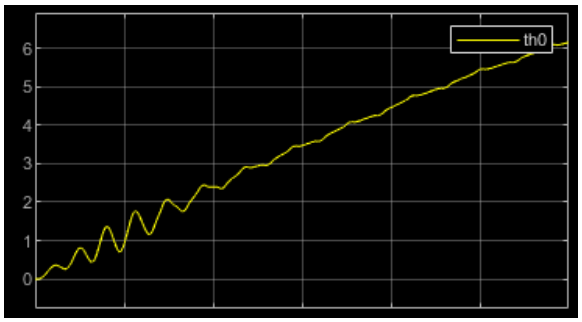


i) Tensión de control Vs

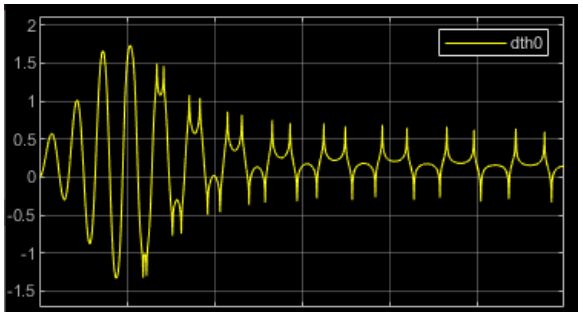


j) Par de control τ_{m0}

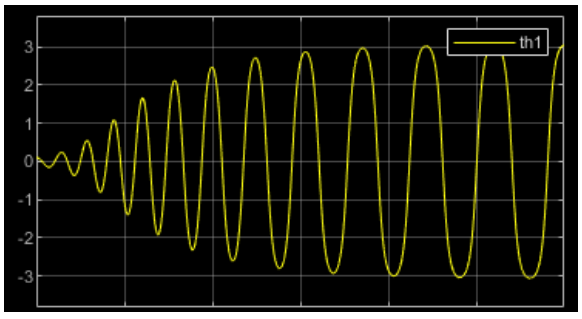
Figura 3.1.2: Simulación de la ley de Åström y Furuta con compensación de pares de reacción. Péndulo rotatorio simple



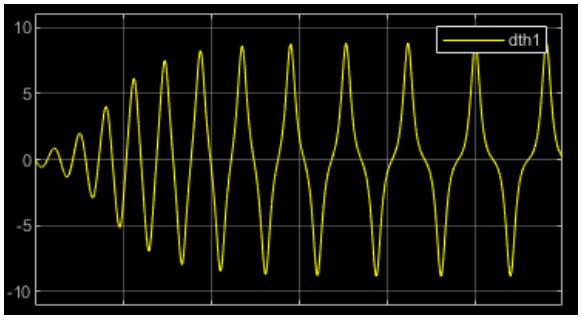
a) Ángulo θ_0



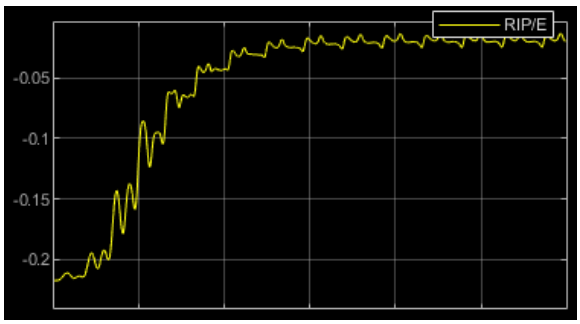
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



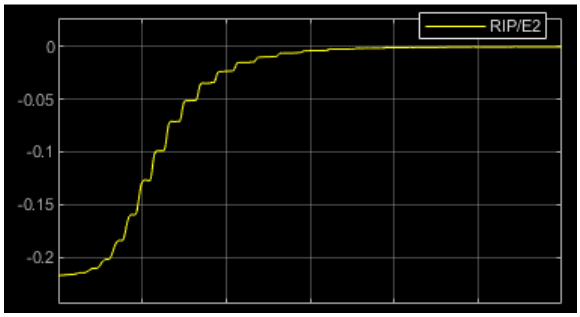
c) Ángulo θ_1



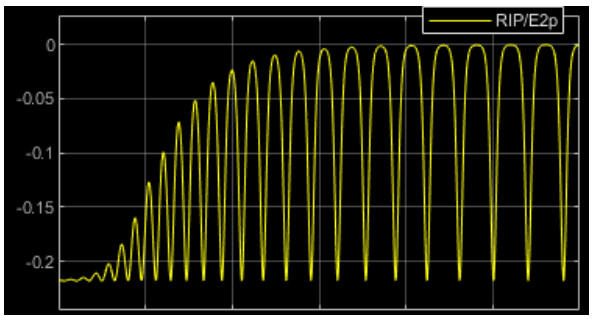
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



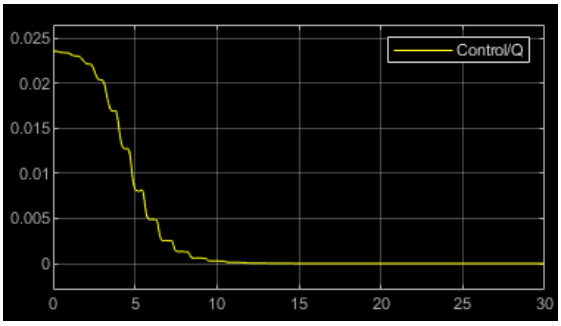
e) Energía total del sistema



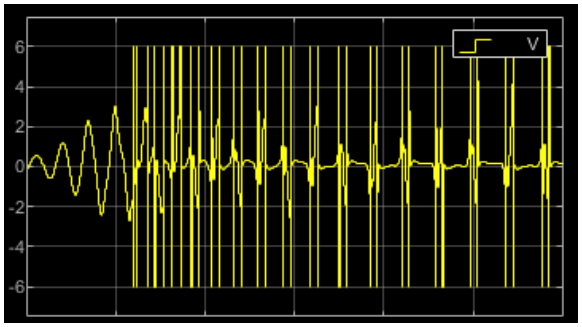
f) Energía total del péndulo



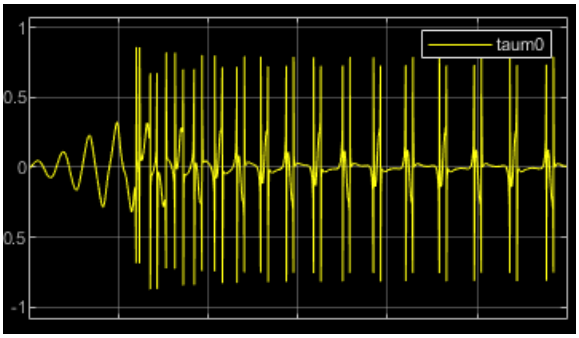
g) Energía potencial del péndulo



h) Función de Lyapunov V

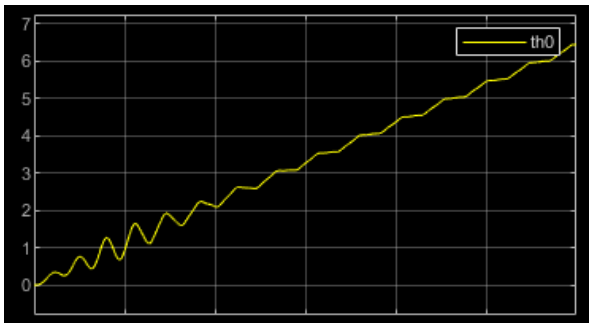


i) Tensión de control Vs

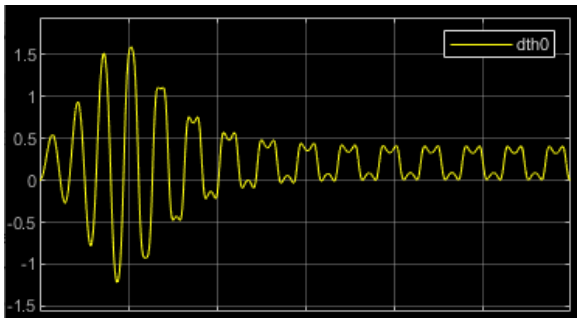


j) Par de control τ_{m0}

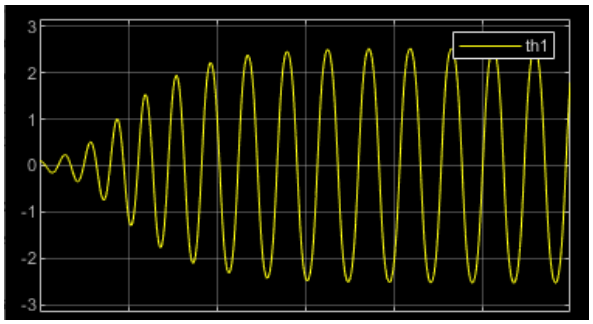
Figura 3.1.3: Simulación de la ley de Åström y Furuta con compensación de pares de reacción y de fricción viscosa. Péndulo rotatorio simple



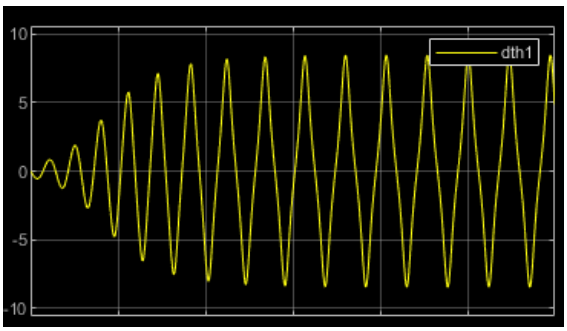
a) Ángulo θ_0



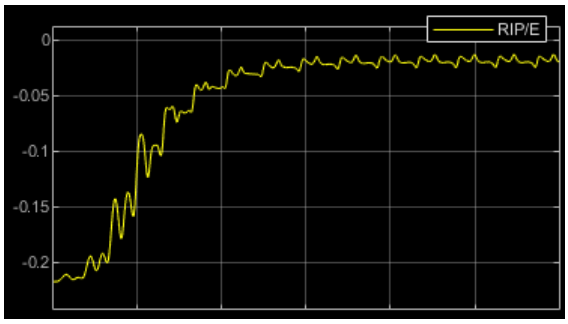
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



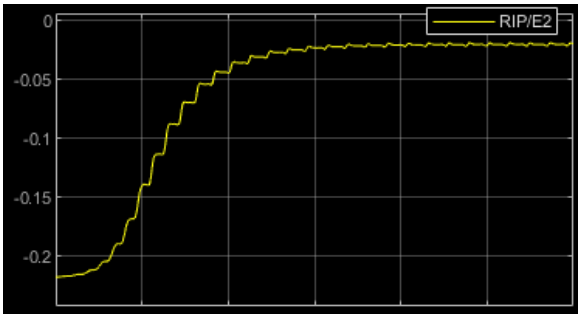
c) Ángulo θ_1



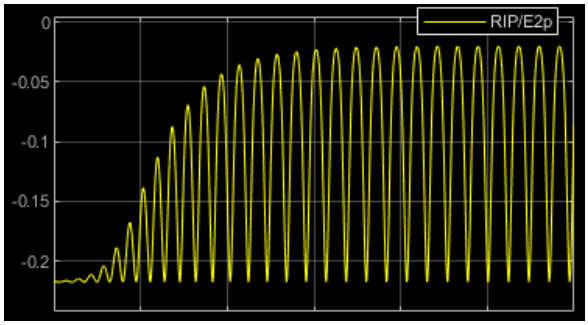
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



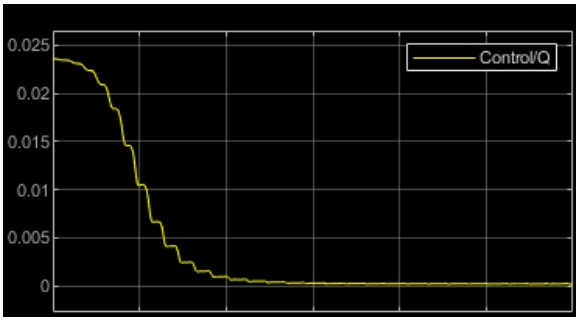
e) Energía total del sistema



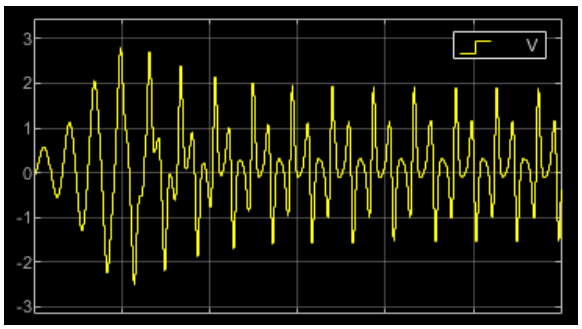
f) Energía total del péndulo



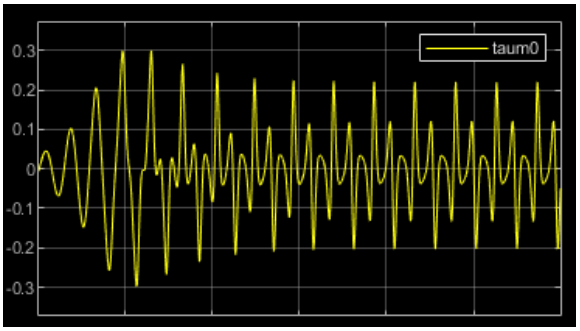
g) Energía potencial del péndulo



h) Función de Lyapunov V

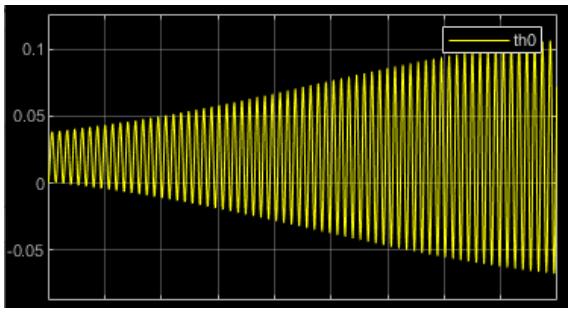


i) Tensión de control Vs

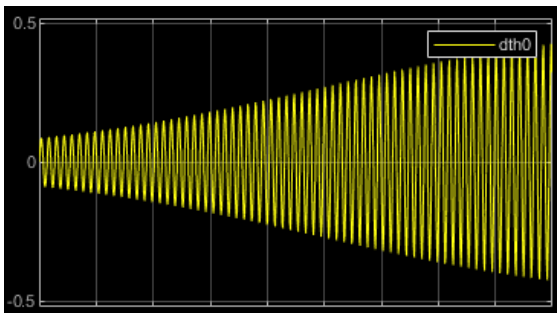


j) Par de control τ_{m0}

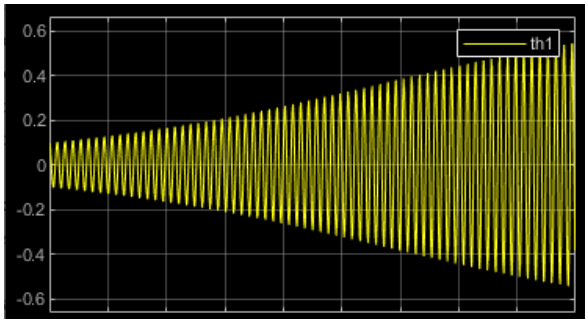
Figura 3.1.4: Simulación de la ley de Åström y Furuta con compensación de pares de reacción y potencial efectivo. Péndulo rotatorio simple



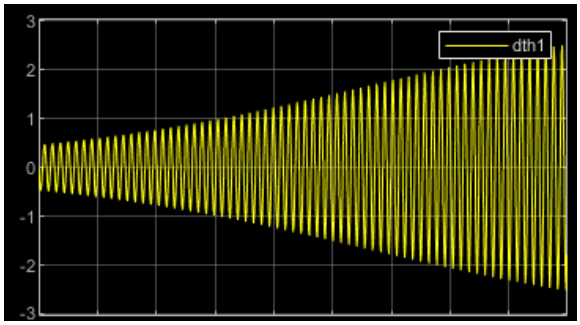
a) Ángulo θ_0



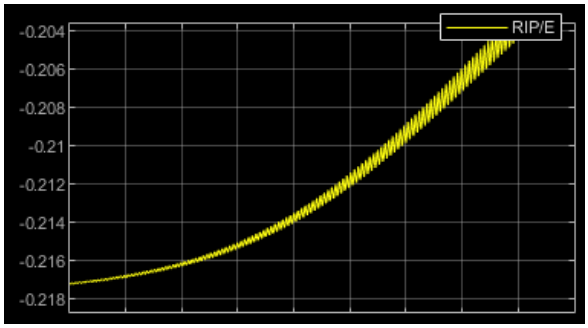
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



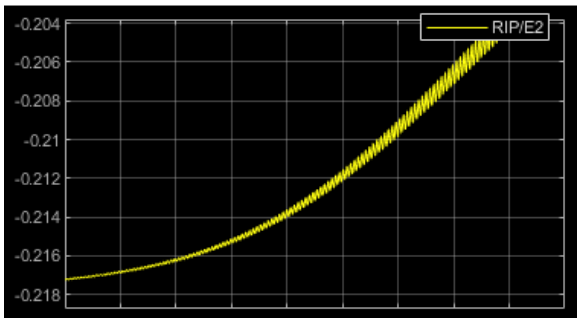
c) Ángulo θ_1



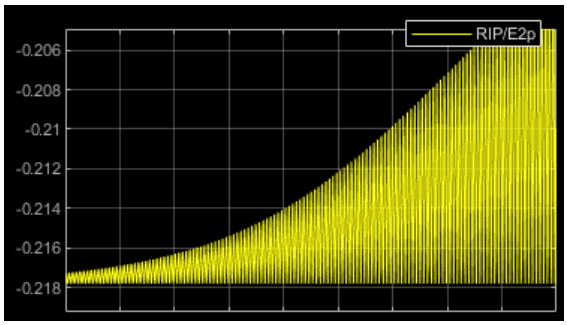
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



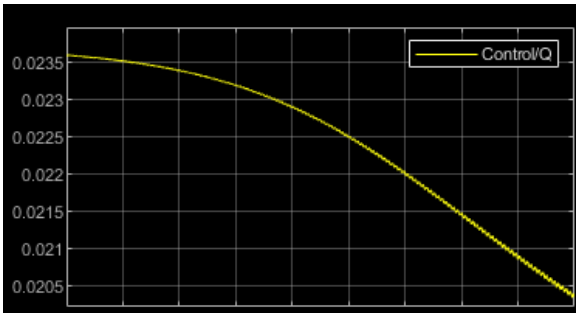
e) Energía total del sistema



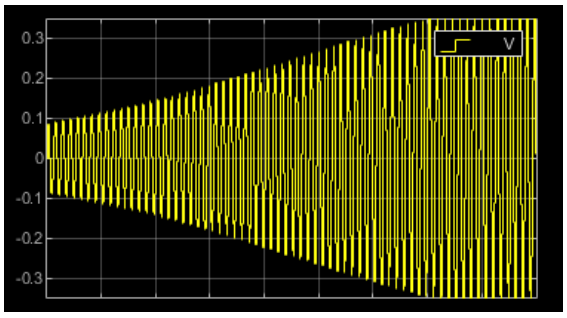
f) Energía total del péndulo



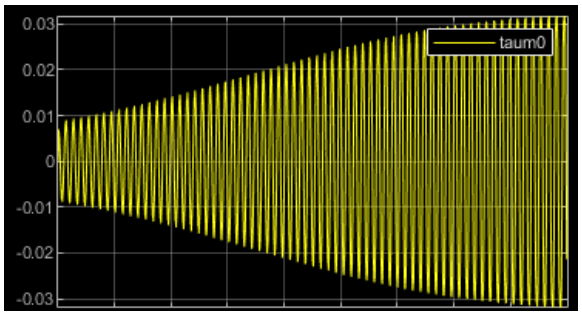
g) Energía potencial del péndulo



h) Función de Lyapunov V



i) Tensión de control Vs



j) Par de control τ_{m0}

Figura 3.1.5: Simulación de la ley del pseudogradiente de velocidad de Fradkov. Péndulo rotatorio simple

3.2 Estabilización del péndulo. Control LQR

Una vez el péndulo se encuentra cerca del estado objetivo, para su estabilización se utilizará un control LQR (Linear Quadratic Regulator). Esta estrategia de control se basa en determinar el vector de ganancias **K** que hace que la señal de control dada por

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{3.2.1}$$

sea óptima, en el sentido de que minimice la función de desempeño

$$J = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + uRu \right) dt$$

siendo **Q** una matriz simétrica definida positiva y R>0. **Q** y R representan las contribuciones a la integral del término de error y del esfuerzo de la señal de control, respectivamente.

Si el modelo matemático del sistema dinámico es $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$, el vector de ganancias viene dado por la siguiente expresión

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

donde **P** es la solución de la ecuación reducida de Riccati [17]:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \tag{3.2.2}$$

Aunque en general los valores de **Q** y R deben sintonizarse mediante prueba y error, la utilización de la regla de Bryson para asignar estos valores suele dar buenos resultados. De acuerdo con esta regla, se toma **Q** diagonal y se eligen los valores de la siguiente forma:

$$Q_{ii} = \frac{1}{x_{i,\max}^2},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad R = \frac{1}{u_{\max}^2}$$

donde $x_{i,max}$ es el valor máximo admisible para la variable x_i y u_{max} es el valor máximo admisible para la señal de control.

En general, cuanto mayor sea el valor del término Q_{ii} asociado a la variable x_i, mayor será la capacidad de control que se tendrá sobre esa variable. Por lo tanto, si una variable presenta poco interés se asignará un valor pequeño al término Q_{ii} asociado a esa variable y, por el contrario, si el comportamiento de la variable es importante deberá asignarse un valor mayor a Q_{ii}.

Por otra parte, valores grandes de R darán lugar a que prime la minimización del esfuerzo de la señal de control sobre el comportamiento de las variables, mientras que con valores pequeños primará el comportamiento de las variables de estado sobre el esfuerzo de la señal de control, lo que da lugar a un control más flexible.

Para el diseño del control de estabilización se considera muy importante el ángulo del péndulo, así como la velocidad angular del péndulo y del brazo. La posición del brazo no es importante para la estabilización, por lo que se asigna un valor pequeño al término correspondiente de **Q**, aunque no nulo, de manera que el brazo se desplace lentamente hasta el ángulo de referencia. Se tiene en cuenta el esfuerzo de control, si bien no se asigna un valor elevado a R para otorgar mayor relevancia al comportamiento de las variables que al

esfuerzo de control. Teniendo en cuenta estos criterios se proponen las siguientes expresiones para **Q** y R:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \; R{=}1 \tag{3.2.3}$$

3.2.1 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio inestable

Sustituyendo los valores de los parámetros del modelo en las ecuaciones 2.5.3 obtenemos las matrices $\mathbf{A}_u$ y $\mathbf{B}_u$ del sistema linealizado en torno a su punto de equilibrio inestable (péndulo levantado):

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 1,7126 & -0,0028 & -0,0044 \\ 0 & 20,7487 & -0,0016 & -0,0534 \end{bmatrix}, \; \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 28,0470 \\ 15,7279 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación de Riccati (3.2.2) para **P**, se obtiene el siguiente vector de ganancias:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1,0000 & 73,4500 & -3,7535 & 18,5588 \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

Para que el sistema sea de estado completamente controlable, esto es, para que sea posible transferir el sistema desde un estado inicial arbitrario hasta un estado objetivo en un tiempo finito, ha de cumplirse que el rango de la matriz de controlabilidad sea igual al orden del sistema [17], esto es:

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{A}_u\mathbf{B}_u & \mathbf{A}_u^2\mathbf{B}_u & \mathbf{A}_u^3\mathbf{B}_u \end{bmatrix}\right) = 4$$

Al calcular el rango de la matriz de controlabilidad para las matrices $\mathbf{A}_u$ y $\mathbf{B}_u$ del sistema linealizado en torno a su punto de equilibrio inestable se comprueba que se cumple esta condición:

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 28,0470 & -0,1479 & 26,9402 \\ 0 & 15,7279 & -0,8832 & 326,3799 \\ 28,0470 & -0,1479 & 26,9402 & -3,255 \\ 15,2779 & -0,8832 & 326,3799 & -35,7816 \end{bmatrix}\right) = 4$$

3.2.2 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio estable

Resulta de interés el diseño de un control LQR para el péndulo en su posición de equilibrio estable, de manera que en el proceso de bajada, una vez cerca del punto de equilibrio, el péndulo se estabilice rápidamente y el brazo se sitúe en una posición de referencia. Las

matrices $\mathbf{A}_d$ y $\mathbf{B}_d$ del sistema linealizado en torno a su punto de equilibrio estable (péndulo abajo) son:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 1,7126 & -0,0028 & 0,0044 \\ 0 & -20,7487 & 0,0016 & -0,0534 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 28,0470 \\ -15,7279 \end{bmatrix}$$

Ahora el vector de ganancias es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,0000 & -43,1954 & 3,5387 & -5,4147 \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

Comprobamos que el rango de la matriz de controlabilidad es igual al orden del sistema para asegurarnos de que es controlable:

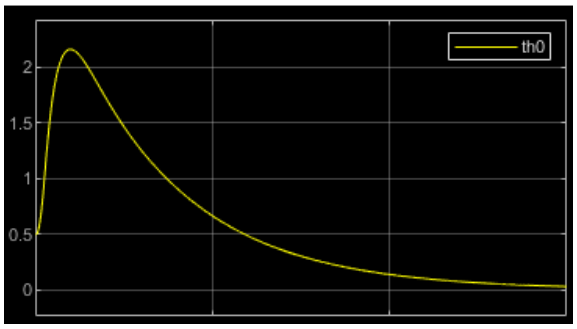
$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 28,0470 & -0,1479 & -26,9402 \\ 0 & -15,7279 & 0,8832 & 326,3799 \\ 28,0470 & -0,1479 & -26,9402 & 3,255 \\ -15,2779 & 0,8832 & 326,3799 & -35,7816 \end{bmatrix} \right) = 4$$

3.2.3 Simulaciones. Análisis de resultados

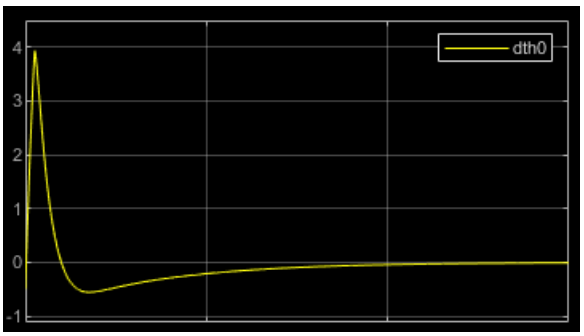
Se simulará en este apartado la estabilización del péndulo en sus posiciones de equilibrio inestable y estable utilizando los controles LQR diseñados.

En la Figura 3.2.1 se muestran los resultados de la simulación del control LQR para la estabilización del péndulo en torno a su punto de equilibrio inestable. Se han considerado las condiciones iniciales θ_{0i}=0,5, $\dot{\theta}_{0i}$=-0,5 s^{-1}, θ_{1i}=2,9, $\dot{\theta}_{1i}$=-0,1 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 15 s, el vector de ganancias es $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1,0000 & 73,4500 & -3,7535 & 18,5588 \end{bmatrix}$ y el estado objetivo $\mathbf{x}_o$ = [0 π 0 0]^T. El ángulo del péndulo se estabiliza rápidamente en θ_1=π (c), la señal de control y las velocidades angulares $\dot{\theta}_0$ y $\dot{\theta}_1$ alcanzan rápidamente valores pequeños (b, d) y el ángulo del brazo converge lentamente a su valor objetivo θ_0=0 (a). De acuerdo con los resultados de las simulaciones realizadas, para que el control LQR diseñado sea capaz de estabilizar el péndulo el valor del ángulo θ_1 deberá estar en el intervalo [2,9, 3.4].

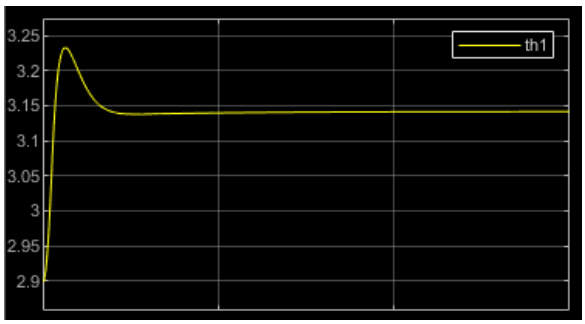
En la Figura 3.2.2 se representan los resultados de la simulación del control LQR para la estabilización del péndulo en torno a su punto de equilibrio estable. Se han considerado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0,2, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 15 s, el vector de ganancias es $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,0000 & -43,1954 & 3,5387 & -5,4147 \end{bmatrix}$ y el estado objetivo $\mathbf{x}_o$ = [0 0 0 0]^T. Nótese que el ángulo del péndulo se estabiliza rápidamente en θ_1=0 (c), la señal de control y las velocidades angulares $\dot{\theta}_0$ y $\dot{\theta}_1$ alcanzan rápidamente valores pequeños (b, d) y el ángulo del brazo converge lentamente a su valor objetivo θ_0=0 (a).



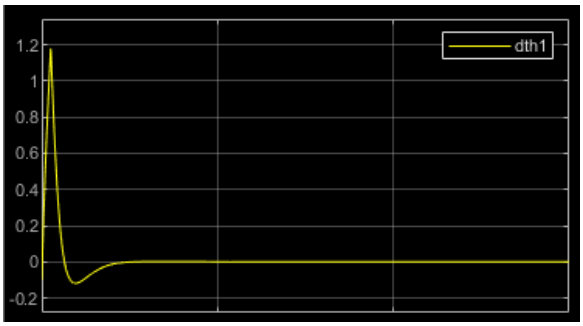
a) Ángulo θ_0



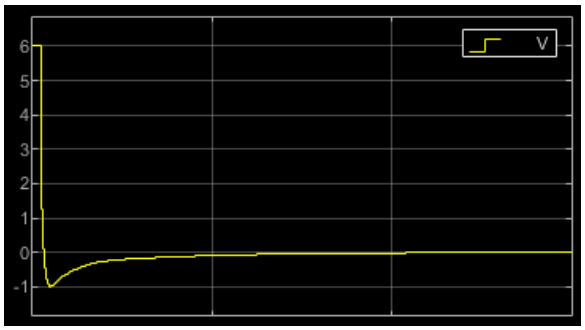
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



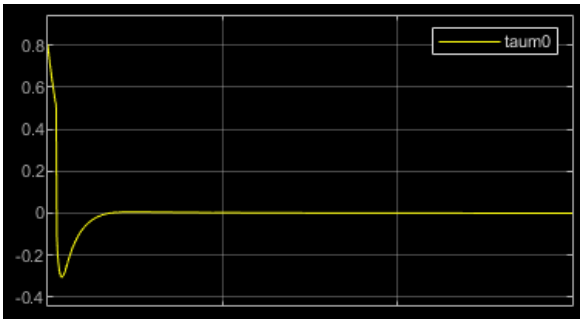
c) Ángulo θ_1



d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$

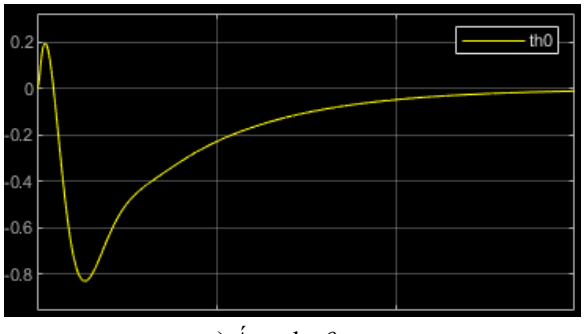


e) Voltaje de control V

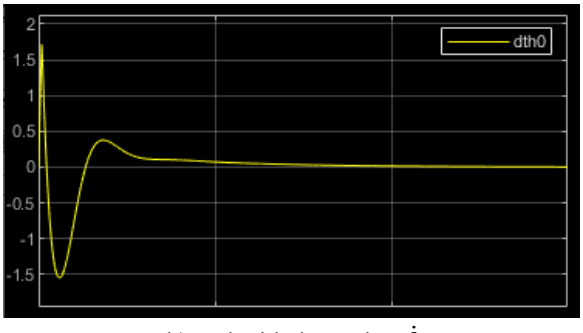


f) Par de control τ_{m0}

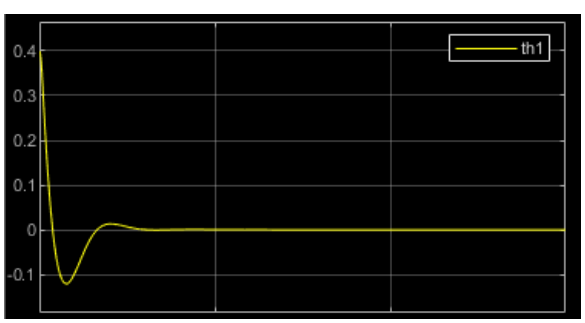
Figura 3.2.1: Control LQR para la estabilización del péndulo en su posición de equilibrio inestable



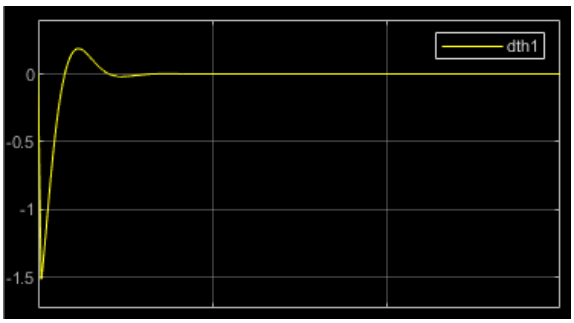
a) Ángulo θ_0



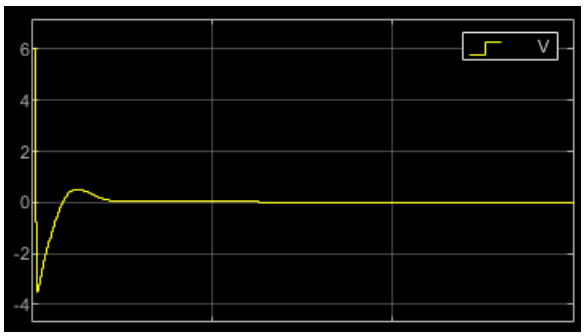
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



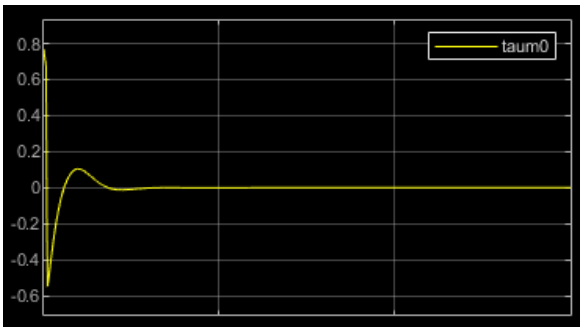
c) Ángulo θ_1



d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



e) Voltaje de control V



f) Par de control τ_{m0}

Figura 3.2.2: Control LQR para la estabilización del péndulo en su posición de equilibrio estable

3.3 Conmutación entre los modos de control levantamiento-estabilización

Se estudia en este apartado la utilización de la función sigmoide como función de conmutación entre los modos de control de levantamiento o bajada y estabilización, analizándose de forma individual cada uno de los casos, y se proponen expresiones para la conmutación por energía y por ángulo. Posteriormente se establecen relaciones entre estos dos métodos.

3.3.1 Función sigmoide como función de conmutación

Se estudiará en este apartado la utilización de la función sigmoide para la conmutación entre los modos de control de levantamiento (o bajada) y estabilización. La función sigmoide viene dada por la siguiente expresión:

$$\sigma\left(x-x_0\right)=\frac{1}{1+e^{-k_S\left(x-x_0\right)}} \tag{3.3.1}$$

Esta función tiene dos asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty}\sigma\left(x-x_0\right)=0,\ \lim_{x\to+\infty}\sigma\left(x-x_0\right)=1$$

En x=x_0 toma el valor 0,5:

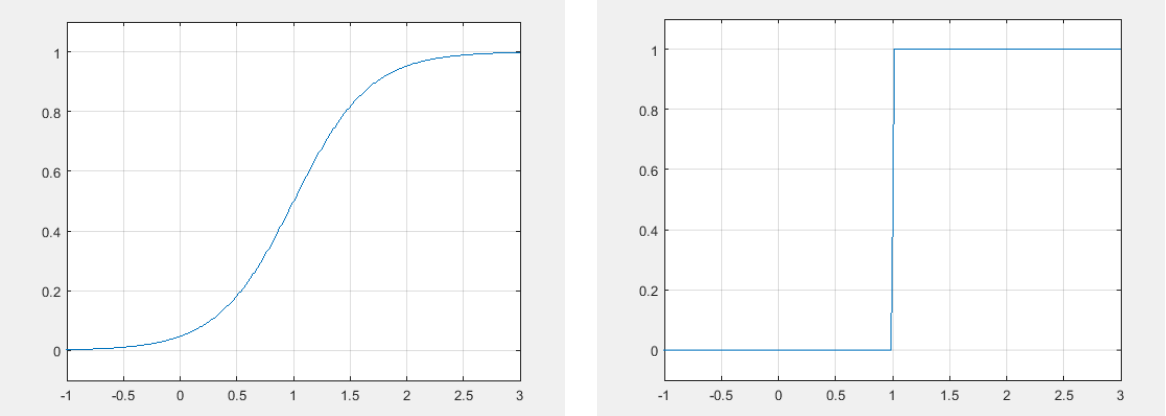
$$\sigma\left(x_0\right)=\frac{1}{2}$$

Su derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{k_s e^{-k_s(x-x_0)}}{\left(1+e^{-k_s(x-x_0)}\right)^2}$$

y por lo tanto, la pendiente de la función sigmoide en $x=x_0$ viene dada por k_s. Nótese también que $x=x_0$ es un punto de inflexión de la función y que $\sigma(x)$ - 0,5 es una función impar.

Se representa en la Figura 3.3.1 la función sigmoide para dos valores distintos de k_s. En a) podemos ver que con valores pequeños de k_s se tiene una transición gradual entre los valores extremos de la función. En b) comprobamos que con valores grandes de k_s la transición entre los valores extremos de la función es abrupta, asemejándose a la función escalón de Heaviside, si bien la función sigmoide es continua y diferenciable.



a) $k_s=3$, $x_0=1$ b) $k_s=10^3$, $x_0=1$

Figura 3.3.1: Representación gráfica de la función sigmoide para varios parámetros

En el límite se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(x-x_0) = H(x-x_0)$$

Siendo H la función escalón unitario o de Heaviside.

A la vista de estas propiedades, la función sigmoide con valores elevados de k es adecuada para implementar de una manera sencilla la conmutación entre los modos de control levantamiento o bajada y estabilización.

3.3.2 Conmutación entre los controles levantamiento-estabilización por energía y por ángulo

Tomaremos como criterio para la transición entre los dos modos de control la energía potencial del péndulo. La diferencia de energía potencial entre la condición correspondiente a péndulo abajo ($\theta_1=0$) y la condición de péndulo levantado ($\theta_1=\pi$) es:

$$\Delta U = U(0) - U(\pi) = -2m_1 l_1 g \qquad (3.3.2)$$

La transición tendrá lugar para un valor de energía potencial dado por $U_t = r_t \Delta U$, con $0 < r_t < 1$. El factor r_t representa la fracción de la energía potencial que le falta al péndulo para alcanzar la configuración correspondiente a la posición totalmente levantado.

Nótese que, cuando la ley de control le suministra al péndulo la energía precisa para levantarlo, la energía cinética rotacional del péndulo será pequeña cuando se acerque a la configuración de péndulo levantado, y por lo tanto también será pequeña su velocidad angular, por lo que no es necesario considerar esta última en el criterio de conmutación.

La expresión para la función sigmoide queda así:

$$\sigma(U) = \frac{1}{1 + e^{-k_s(U - U_t)}} = \frac{1}{1 + e^{-k_s(U - r_t \Delta U)}} \tag{3.3.3}$$

Con estas consideraciones, si la ley de control de levantamiento es u_{su} y la ley del control estabilizador es u_s, la siguiente ley tendrá en cuenta la conmutación entre los dos modos de control:

$$u = (1\text{-}\sigma)\, u_{su} + \sigma\, u_s \tag{3.3.4}$$

Es inmediato obtener una formulación alternativa considerando para el criterio de transición el ángulo θ_1 del péndulo en lugar de su energía potencial:

$$\sigma(\theta_1) = \frac{1}{1 + e^{-k_s(|\theta_1| - \theta_{1t})}} \tag{3.3.5}$$

Para evitar el fenómeno del chattering puede resultar conveniente establecer una histéresis, de manera que la conmutación en la bajada tenga lugar a una energía algo inferior que la correspondiente a la subida. La histéresis puede implementarse utilizando la siguiente expresión:

$$\sigma(U) = \frac{1}{1 + e^{-k_s\left(U - U_t\left(1 - \left(1 - \text{sign}\left(\theta_1 \dot{\theta}_1\right)\right)\frac{r_\Delta}{2}\right)\right)}} = \frac{1}{1 + e^{-k_s\left(U - r_t \Delta U\left(1 - \left(1 - \text{sign}\left(\theta_1 \dot{\theta}_1\right)\right)\frac{r_\Delta}{2}\right)\right)}} \tag{3.3.6}$$

donde r_Δ representa el factor en el que se reduce U_t para la bajada.

Los ángulos que intervienen en estas expresiones han de estar reducidos al intervalo [-π, π).

3.3.3 Conmutación entre los controles bajada-estabilización por energía y por ángulo

Ahora consideraremos que la transición tendrá lugar para un valor de energía potencial dado por $U_t = (1 - r_t)\Delta U$, con $0 < r_t < 1$. Donde el factor 1- r_t representa la fracción de la energía potencial que le sobra al péndulo para alcanzar la configuración correspondiente a la posición totalmente abajo.

La expresión para la función sigmoide será ahora:

$$\sigma(U) = \frac{1}{1 + e^{-k_S\left(U - (r_t - 1)\Delta U\right)}} \tag{3.3.7}$$

Si la ley de control de bajada es u_{sd} y la ley del control estabilizador es u_s, la ley que ahora tendrá en cuenta la conmutación entre los dos modos de control será:

$$u = (1\text{-}\sigma)\, u_s + \sigma\, u_{sd} \tag{3.3.8}$$

Considerando para el criterio de transición el ángulo θ_1 del péndulo en lugar de su energía potencial, se tendrá:

$$\sigma(\theta_1) = \frac{1}{1 + e^{k_S\left(|\theta_1| - \theta_{1t}\right)}} \tag{3.3.9}$$

3.3.4 Relación entre los modos de conmutación por energía y por ángulo

En el caso del péndulo rotatorio simple, la energía potencial depende únicamente del ángulo q1 que forma el péndulo con la vertical, por lo que es inmediato obtener expresiones para relacionar el modo de conmutación por energía con el modo de conmutación por ángulo.

La ecuación 2.2 permite obtener la energía potencial de transición que corresponde a un ángulo de transición θ_{1t} determinado:

$$U_t = -m_1 l_1 g\left(\cos(\theta_{1t}) + 1\right) \tag{3.3.10}$$

Resolviendo para θ_{1t} obtenemos la expresión que permite obtener el ángulo de transición que corresponde a una energía de transición U_t determinada:

$$\theta_{1t} = \pi - \arccos\left(\frac{U_t}{m_1 l_1 g} + 1\right) \tag{3.3.11}$$

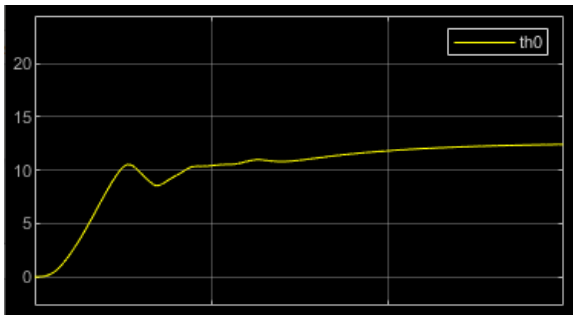
3.3.5 Simulaciones. Análisis de resultados

Se comparan aquí los resultados del levantamiento, conmutación y estabilización en torno al punto de equilibrio inestable del péndulo para dos estrategias de control para el levantamiento distintas. En los dos casos las condiciones iniciales son θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0,1, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1} y el tiempo de simulación 30 s. Se utiliza una estrategia de control lineal LQR para la estabilización del péndulo en torno a su posición de equilibrio inestable (epígrafe 3.2.1), con estado objetivo $\mathbf{x}_o = [0 \quad \pi \quad 0 \quad 0]^T$ y vector de ganancias $\mathbf{K} = \left[-1,0000 \quad 73,4500 \quad -3,7535 \quad 18,5588\right]$, y la función sigmoide para la conmutación entre levantamiento y estabilización, con k_s=10^4 y r_t=0,10.

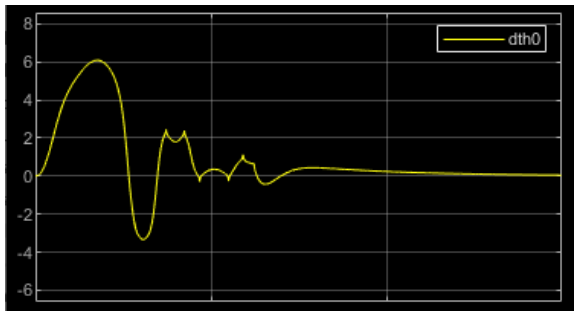
En la Figura 3.3.2 se muestran los resultados de la simulación utilizando para el levantamiento del péndulo una estrategia de control no lineal basado en la energía con compensación de pares de reacción y términos de fricción viscosa (ecuación 3.1.12), con k=10 y E_r=0 J. En h) vemos que la conmutación tiene lugar en aproximadamente 6,3 s,

estabilizándose rápidamente el péndulo en el ángulo $\theta_1=\pi$, sin que exista sobreimpulso (c). La velocidad del brazo y la del péndulo convergen rápidamente a cero (b, d), así como las energías (e, f, g). En cuanto se completa la estabilización el voltaje de control y el par actuador toman valores muy pequeños (i, j). El brazo del péndulo se posiciona lentamente en el ángulo de referencia (a).

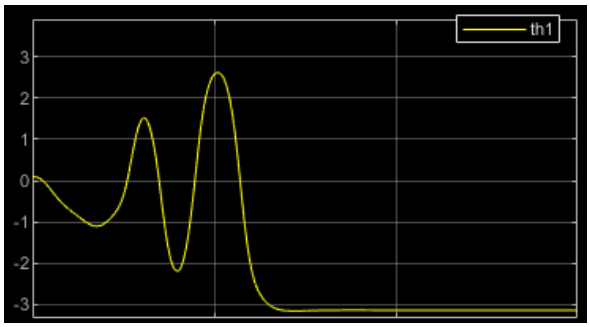
En la Figura 3.3.3 se utiliza para el levantamiento del péndulo la segunda variante con signo de la estrategia de control basado en la energía de Åström y Furuta (ecuación 3.1.7), con k=10 y E_r=0 J. En h) vemos que ahora la conmutación tiene lugar en aproximadamente 2,5 s, estabilizándose rápidamente el péndulo en el ángulo $\theta_1=\pi$ (c), sin que exista sobreimpulso. La velocidad del brazo y la del péndulo convergen rápidamente a cero (b, d), así como las energías (e, f, g). En cuanto se completa la estabilización el voltaje de control y el par actuador toman valores muy pequeños (i, j). El brazo del péndulo se posiciona lentamente en el ángulo de referencia (a).



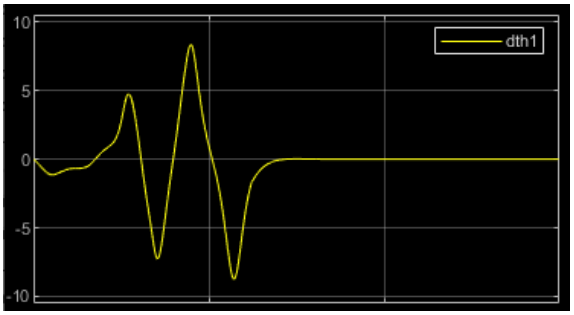
a) Ángulo θ_0



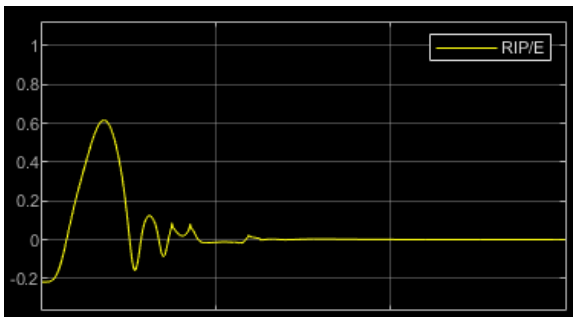
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



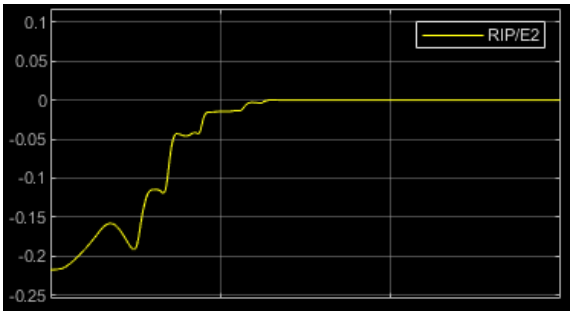
c) Ángulo θ_1



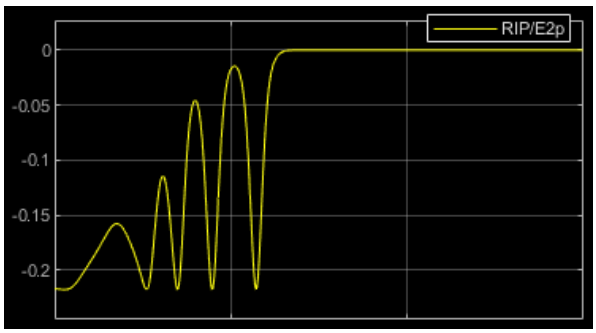
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



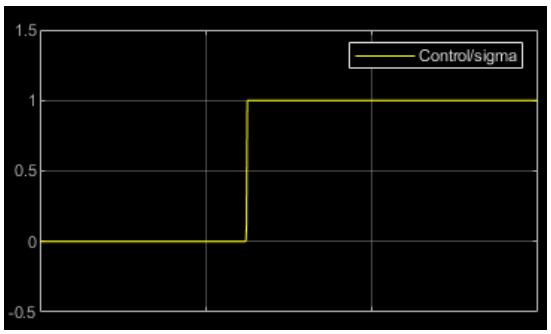
e) Energía total del sistema



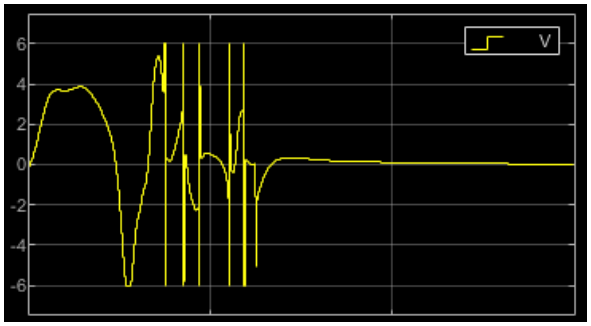
f) Energía total del péndulo



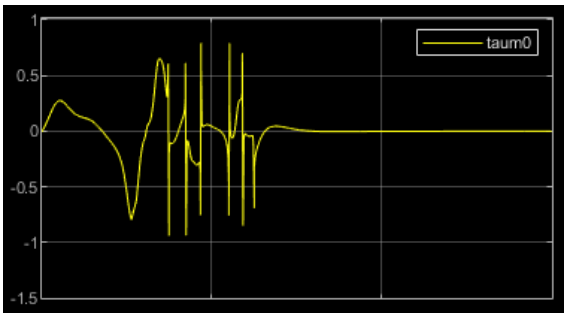
g) Energía potencial del péndulo



h) Función de conmutación σ

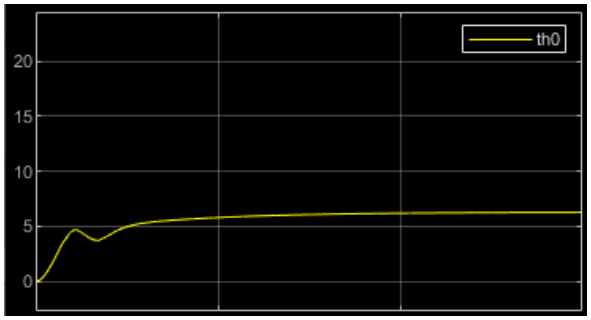


i) Voltaje de control V

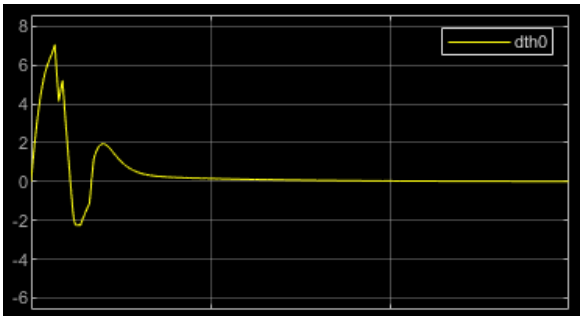


j) Par de control τ_{m0}

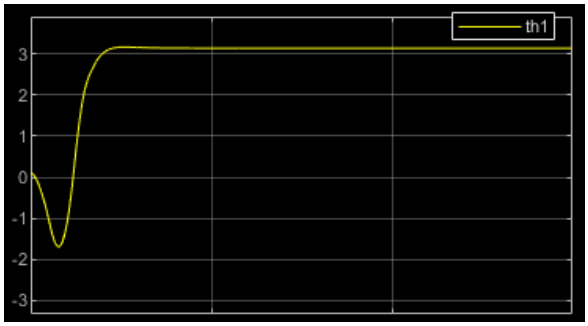
Figura 3.3.2: Levantamiento del péndulo y conmutación a control estabilizador LQR. Ley de control de la energía con compensación de pares de reacción y de términos de fricción viscosa



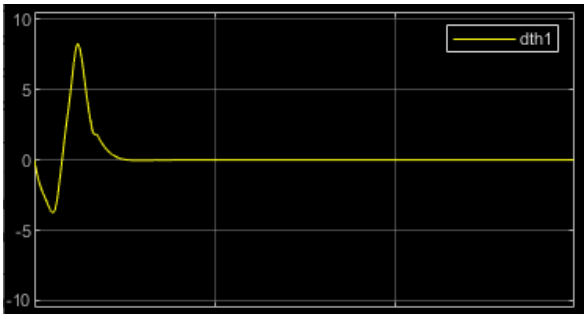
a) Ángulo θ_0



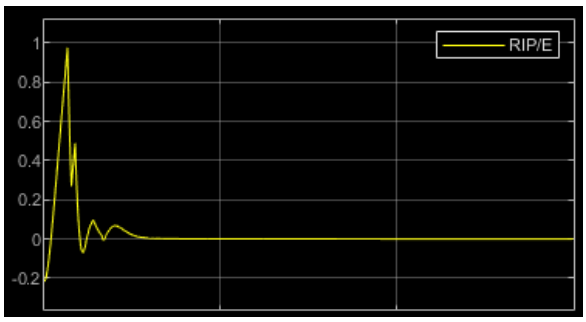
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



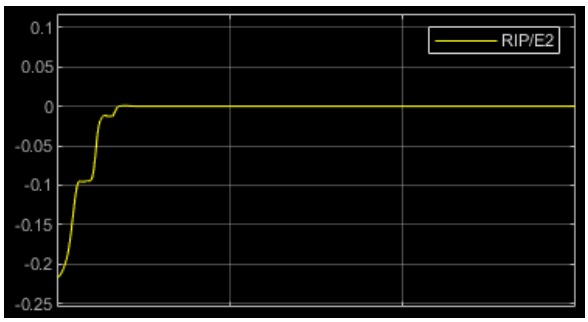
c) Ángulo θ_1



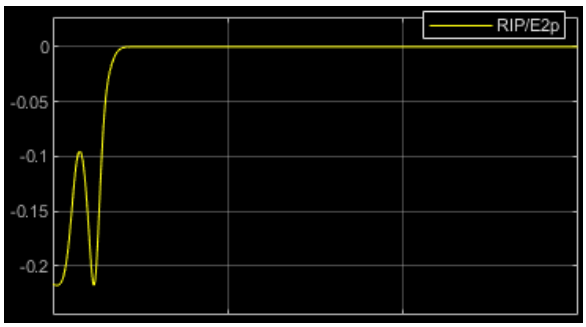
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



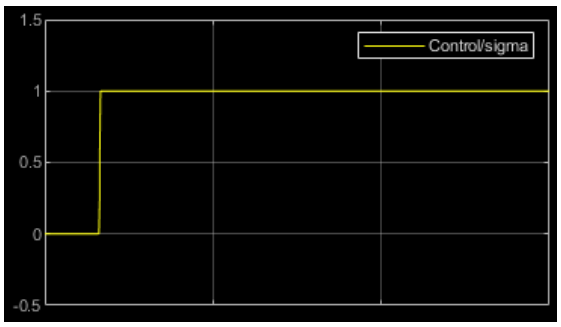
e) Energía total del sistema



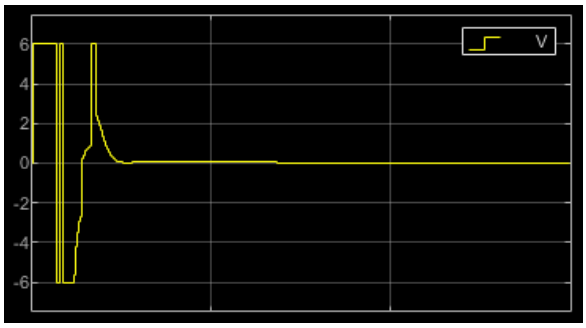
f) Energía total del péndulo



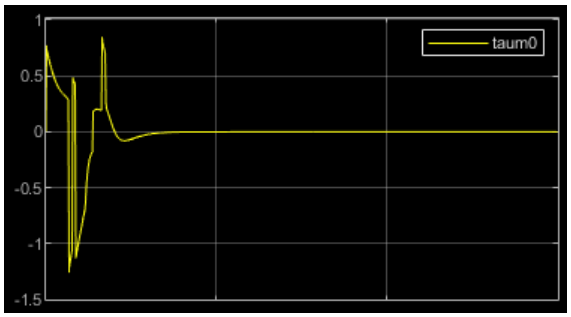
g) Energía potencial del péndulo



h) Función de conmutación σ



i) Voltaje de control V



j) Par de control τ_{m0}

Figura 3.3.3: Levantamiento del péndulo y conmutación a control estabilizador LQR. Ley de control de la energía, variante 2

3.4 Bajada del péndulo (swing-down)

Resulta de interés que en la bajada del péndulo al estado objetivo $\mathbf{x}_o = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ las oscilaciones decaigan rápidamente y lograr así una caída controlada, para lo que son de aplicación inmediata las leyes de control estudiadas en el epígrafe 3.1 para el levantamiento del péndulo, sin más que considerar como energía de referencia la correspondiente a la configuración péndulo abajo:

$$E_r = -2m_1 l_1 g \tag{3.4.1}$$

Se consideran en este epígrafe la bajada del péndulo sin acción de control, manteniendo el brazo inmóvil y aplicando la ley de control de la energía con compensación de pares de reacción, con y sin conmutación a control LQR de estabilización.

3.4.1 Sin acción de control

Para la bajada del péndulo sin acción de control se consideran dos casos: V_s=0 y τ_{m0}=0.

En el primero de ellos la tensión que alimenta el motor es nula, y por lo tanto el motor actuará como generador, disipando la energía mecánica del péndulo en forma de energía térmica en la resistencia del bobinado, y por lo tanto contribuyendo a que el sistema pierda energía y se reduzca la amplitud de las oscilaciones.

En el segundo caso, que en la práctica se realizaría abriendo el circuito eléctrico del motor, la fuerza contraelectromotriz generada en el bobinado debido a la inducción producida por su movimiento en el campo magnético, se podrá medir como una tensión V en las bornas del motor. Al estar abierto el circuito la intensidad eléctrica es i=0, y por lo tanto $\tau_m = \tau_{m0}$=0. Ahora el motor no disipa energía, por lo que cabe esperar que la energía se disipe con más lentitud y por lo tanto las oscilaciones se mantengan durante más tiempo que en caso anterior.

3.4.2 Brazo inmóvil

Si el brazo se encuentra inmóvil en una posición determinada, es posible mantenerlo fijo en esa posición durante la bajada del péndulo aplicando la ley dada por la ecuación 2.6.12:

Al mantenerse el brazo inmóvil no disipará energía por fricción viscosa, y por lo tanto cabe esperar que la energía del sistema decaiga con mayor lentitud que cuando no hay acción de control y el brazo se mueve libremente, ya que ahora la disipación de energía se debe únicamente a la fricción viscosa del péndulo.

3.4.3 Ley de control de la energía con compensación de pares de reacción

Se aplicará en este caso la ley de control de la energía con compensación de pares de reacción dada por la ecuación 3.1.9, considerando la energía de referencia dada por 3.4.1. Cabe esperar que ahora el sistema pierda energía con mayor rapidez que en los casos anteriores, al contribuir la ley de control a que la energía del sistema converja a la de referencia, correspondiente en este caso a la configuración péndulo abajo.

3.4.4 Ley de control de la energía con compensación de pares de reacción y conmutación a control LQR de estabilización

Se aplica ahora la ley de control de la energía con compensación de pares de reacción dada por la ecuación 3.1.9, conmutando a un control LQR de estabilización cuando la energía potencial del péndulo es cercana a la correspondiente a la posición de equilibrio estable. El control estabilizador viene dado por la ecuación 3.2.1:

$$u_s = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Si la ley de control de bajada es u_{sd} y la ley del control estabilizador es u_s, se utilizará la ecuación 3.3.8 para tener en cuenta la conmutación entre los dos modos de control:

$$u = (1-\sigma)\, u_s + \sigma\, u_{sd}$$

donde la función de conmutación por energía viene dada por la ecuación 3.3.7, pudiéndose añadir un término adicional para considerar la velocidad angular del péndulo, ya que ahora no está garantizado que éste tenga un valor pequeño cuando se cumple el criterio de la energía:

$$\sigma(U) = \frac{1}{\left(1+e^{-k_S\left(U-(r_t-1)\Delta U\right)}\right)\left(1+e^{k_S\left(\left|\dot{\theta}_1\right|-\dot{\theta}_{1t}\right)}\right)}$$

3.4.5 Simulaciones. Análisis de resultados

Se muestran en este apartado los resultados de las simulaciones de las estrategias de control descritas en el punto 3.4.4 para la bajada del péndulo. En todos los casos las condiciones iniciales son θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=3, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1} y el tiempo de simulación 30 s.

En la Figura 3.4.1 se simula la bajada del péndulo haciendo V_s=0 V. En a) y b) vemos que la velocidad angular del brazo oscila en torno a cero, y por lo tanto el brazo lo hace en torno a su posición inicial. En l) se observa la existencia de un pequeño par motor con signo opuesto al de la velocidad angular del brazo, lo que indica que el sistema está cediendo energía al motor, y por lo tanto éste contribuye a la disipación de la energía junto con la fricción viscosa debida al movimiento de rotación del brazo y del péndulo. En g), i) y j) vemos que, si bien la energía total del péndulo no es siempre decreciente, debido a los pares que sobre él ejerce el brazo, sí lo es la energía total del sistema péndulo + brazo. Al cabo de 30 s la energía total tiene un valor aproximado E=-0,20 J. En h) se muestra la evolución de la energía potencial del péndulo, que converge al valor correspondiente a la configuración péndulo abajo U=-0,22 J (ecuación 2.3), valor al que también convergen la energía total del péndulo g) y del sistema i).

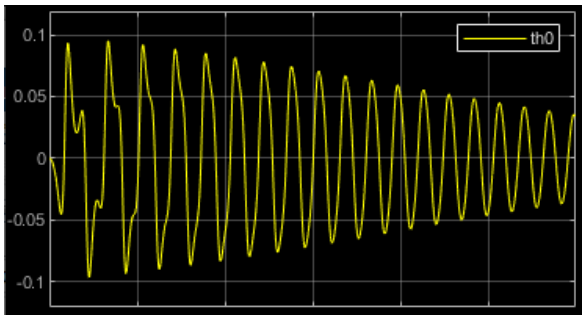
En la Figura 3.4.2 se simula la bajada del péndulo haciendo τ_{m0}=0 Nm. De nuevo vemos en a) y b) que la velocidad angular del brazo oscila en torno a cero, y por lo tanto el brazo lo hace en torno a su posición inicial. En este caso es necesario que sea así, ya que no actúan pares externos sobre el sistema. Comprobamos en k) que se tiene un pequeño voltaje en las bornas del motor, debido a la inducción magnética en el bobinado del motor. Puesto que el circuito eléctrico está abierto no disipa energía, por lo que ahora el sistema pierde energía de forma más lenta, como puede apreciarse en g), h), i) y j). Vemos también de nuevo que, si bien la energía total del péndulo no es siempre decreciente, debido a los pares que sobre él ejerce el brazo, sí lo es la energía total del sistema. Al cabo de 30 s la energía total tiene un valor aproximado E=-0,16 J, lo que demuestra que tasa de disipación de energía es menor que en el caso considerado en la figura 3.4.1, en concordancia con las consideraciones anteriores.

En la Figura 3.4.3 se simula la bajada del péndulo aplicando la ley 2.6.12 para que el brazo permanezca inmóvil, esto es, $\dot{\theta}_0 = 0\,\text{s}^{-1}$. Vemos en a) y b) que efectivamente la posición y la velocidad angular del brazo son próximas a cero, manteniéndose así el brazo en su posición inicial. Vemos en k), i) que el voltaje y el par de control no toman valores elevados, limitándose a compensar los pares de reacción debidos al movimiento del péndulo. Nótese en g), h), i) y j) que la tasa de disipación de energía se mantiene prácticamente igual a la del

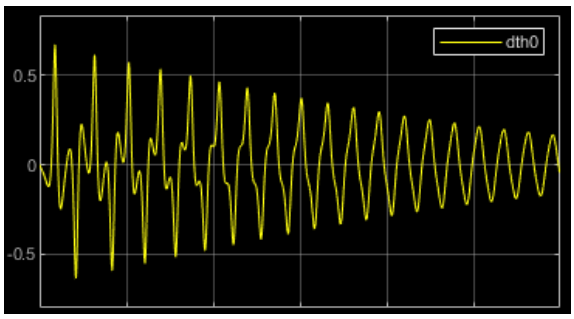
caso correspondiente a la Figura 3.4.2, debido a que las oscilaciones del brazo eran allí pequeñas y por lo tanto el brazo no contribuía mucho a la disipación. Vemos también que la energía total del péndulo es siempre decreciente ya que ahora el brazo, al permanecer inmóvil, no le aporta energía en ningún momento. Al no contribuir en este caso el brazo a la energía del sistema, la energía del péndulo y la del sistema son iguales.

En la Figura 3.4.4 se simula la bajada del péndulo aplicando la ley de control de la energía con compensación de los pares de reacción dada por 3.1.9, con k=10. Vemos en a) y b) que la velocidad angular del brazo oscila en torno a un valor distinto de cero, por lo que el brazo mantiene un movimiento de rotación. Vemos en k), i) que el voltaje y el par de control no toman valores elevados, reduciéndose rápidamente una vez la energía del péndulo se acerca al valor de referencia. Nótese en g), h), i) y j) que ahora la energía total del péndulo no es siempre decreciente, ya que el brazo en ocasiones le aporta energía. Tampoco lo es la energía total del sistema por los aportes ocasionales de energía por el motor, debido a que en el desarrollo de esta ley de control se consideró el modelo de dimensión 2 del péndulo rotacional y no se tuvieron en cuenta los términos disipativos. No obstante, el péndulo pierde energía rápidamente y al cabo de 30 s ésta ya prácticamente a alcanzado el valor de referencia, si bien todavía retiene la suficiente para mantener pequeñas oscilaciones. Nótese que la energía del sistema es ahora ligeramente superior a la del péndulo debido a la rotación del brazo, ya que el modelo de dimensión 2 no lo toma en consideración.

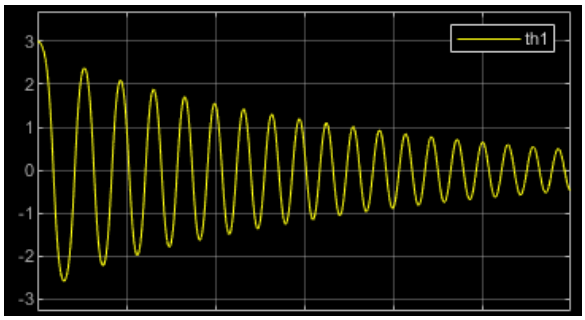
En la Figura 3.4.5 se simula la bajada del péndulo aplicando la ley de control de la energía con compensación de los pares de reacción, con k=10, y conmutación a un control estabilizador LQR con vector de ganancias $\mathbf{K} = [1,0000 \quad -43,1954 \quad 3,5387 \quad -5,4147]$. Se toma para la conmutación k_s=10^4, 1-r_t=0,10. Vemos en a) y b) que la velocidad angular del brazo decrece a valores muy pequeños en aproximadamente 4 s, posicionándose éste lentamente en el ángulo de referencia. Vemos en k) que el voltaje alcanza al principio valores elevados, si bien decae rápidamente a valores cercanos a cero. La saturación en el voltaje de control se debe a que la conmutación se activa en dos ocasiones antes de que el control LQR sea capaz de estabilizar el péndulo, como puede verse en m), ya que no se consideró en la simulación la condición sobre la velocidad angular del péndulo en la función de conmutación. En g), h), i) y j) comprobamos que en aproximadamente 4 s todas las energías han alcanzado sus valores de referencia.



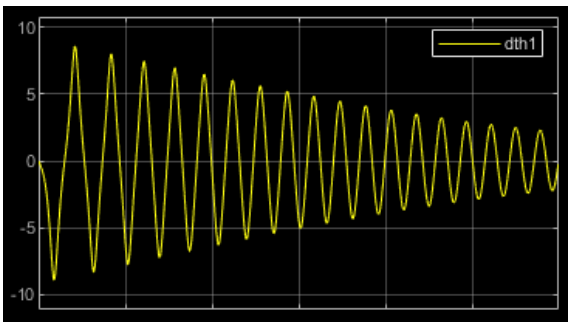
a) Ángulo θ_0



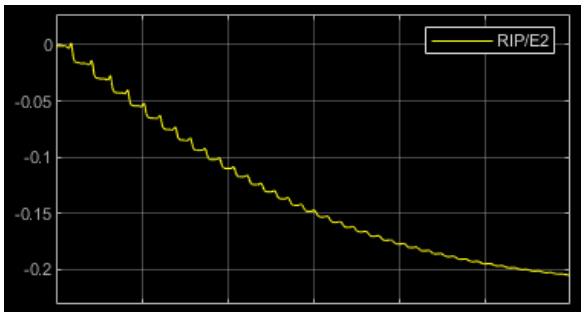
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



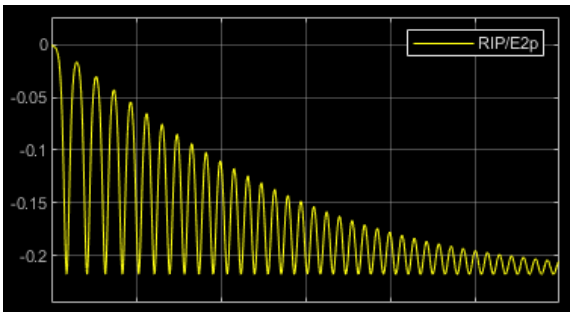
c) Ángulo θ_1



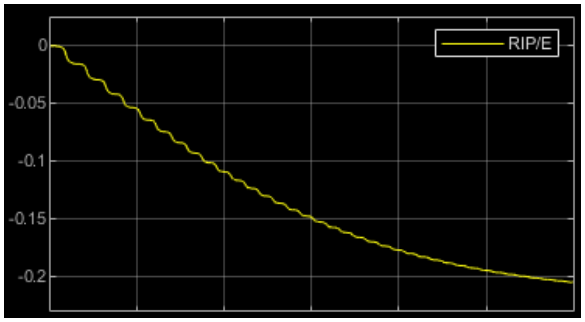
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



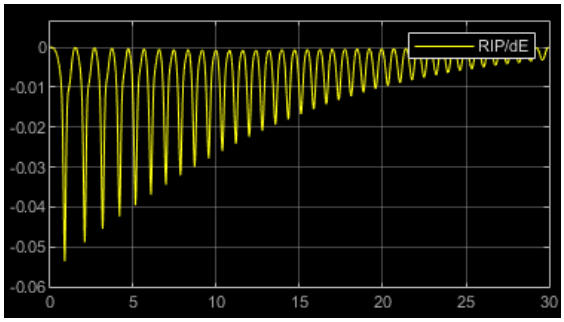
g) Energía total del péndulo



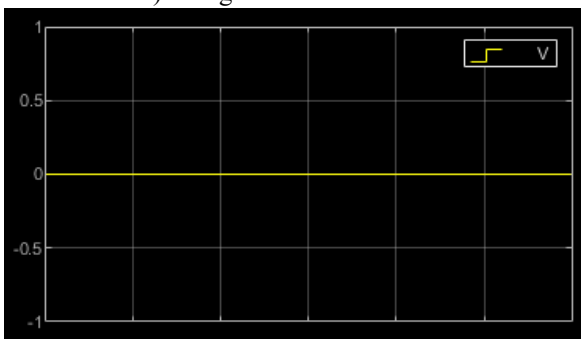
h) Energía potencial del péndulo



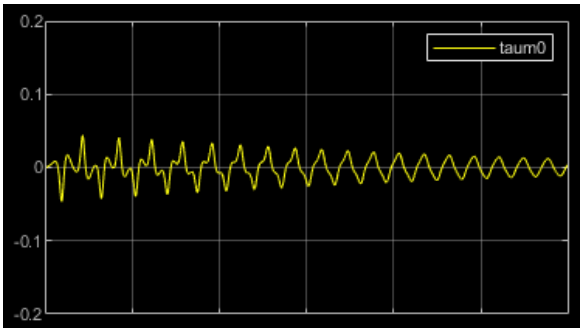
i) Energía total del sistema



j) Derivada de la energía total del sistema

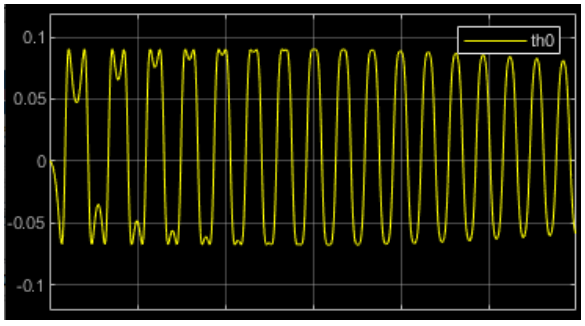


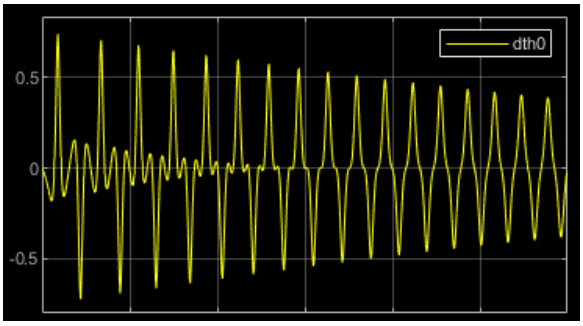
k) Voltaje de control V_s



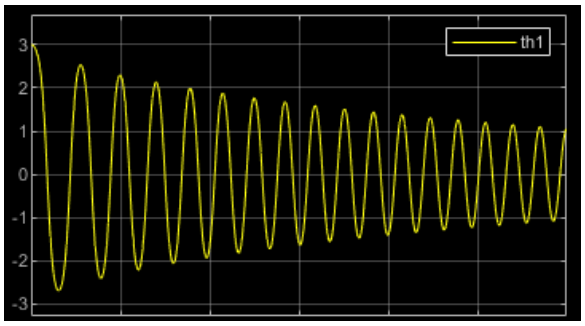
l) Par τ_{m0}

Figura 3.4.1: Bajada del péndulo sin acción de control (V=0).

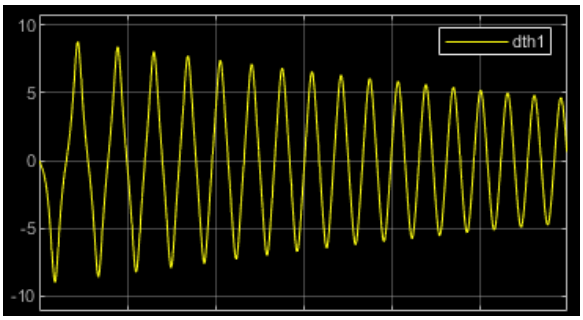




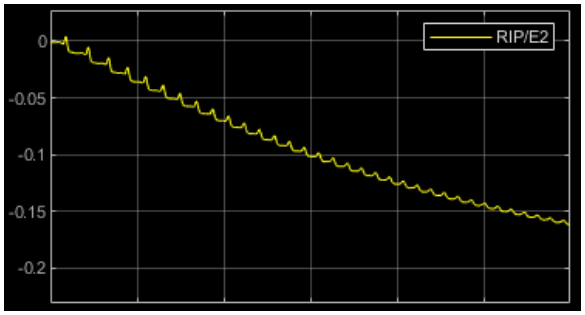
a) Ángulo θ_0



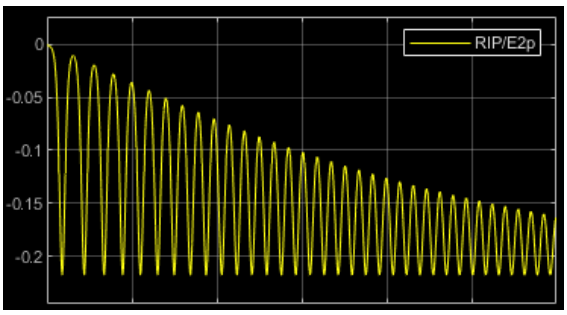
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



c) Ángulo θ_1

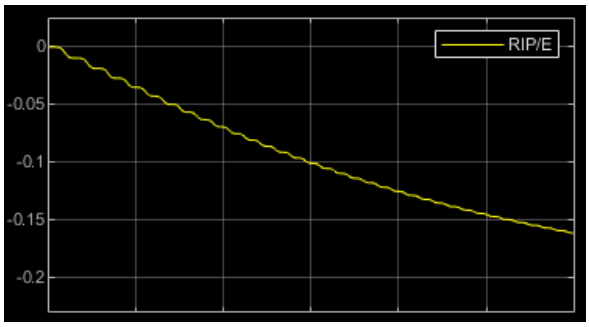


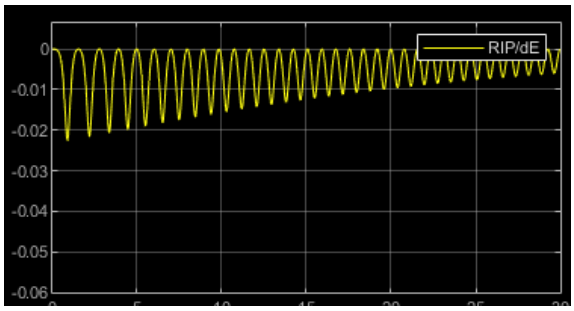
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



g) Energía total del péndulo

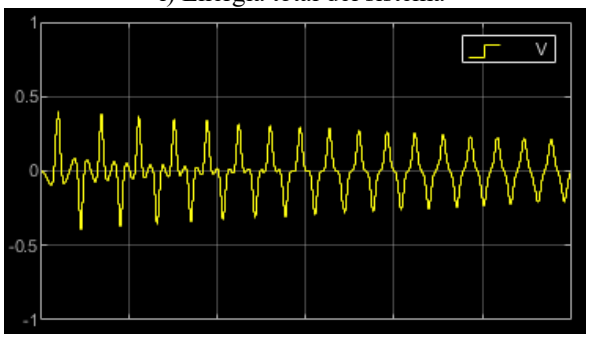
h) Energía potencial del péndulo

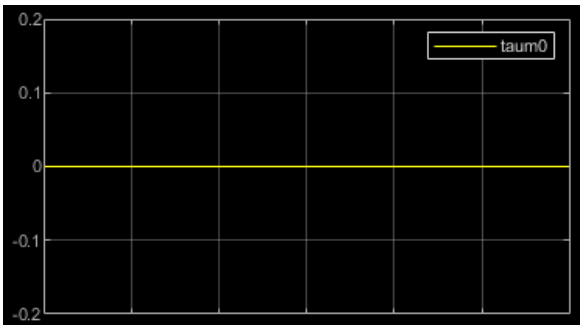




i) Energía total del sistema

j) Derivada de la energía total del sistema

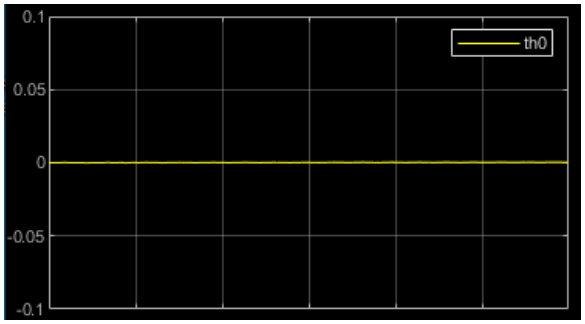




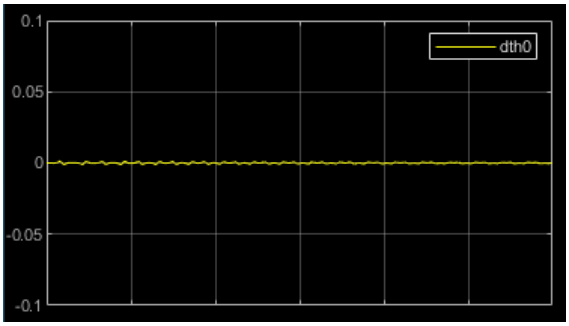
k) Voltaje V_s

l) Par de control τ_{m0}

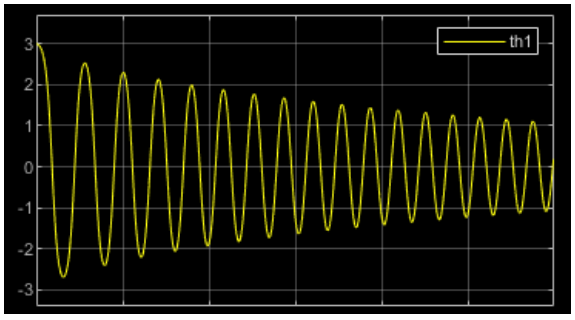
Figura 3.4.2: Bajada del péndulo sin acción de control (τ_{m0}=0)



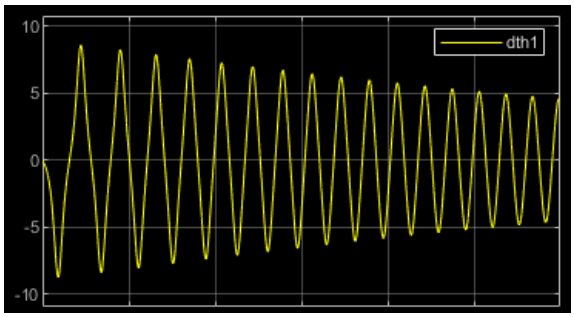
a) Ángulo θ_0



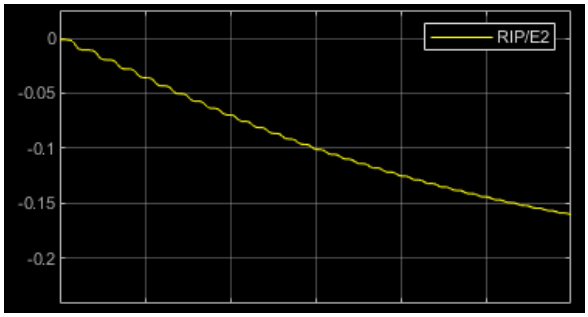
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



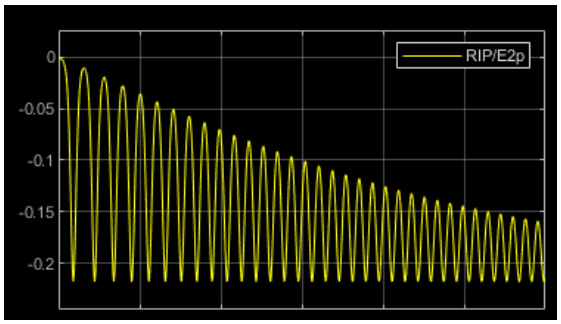
c) Ángulo θ_1



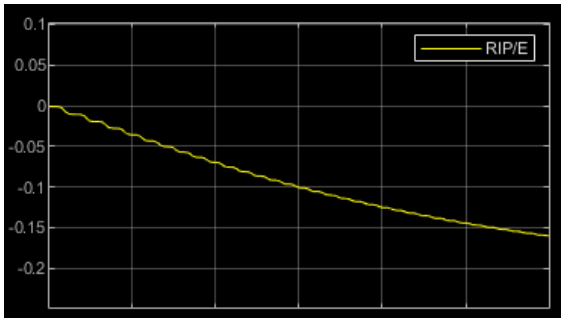
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



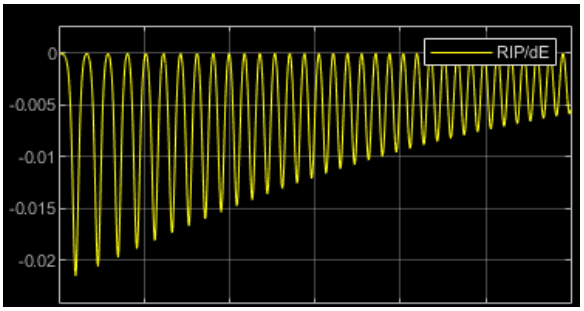
g) Energía total del péndulo



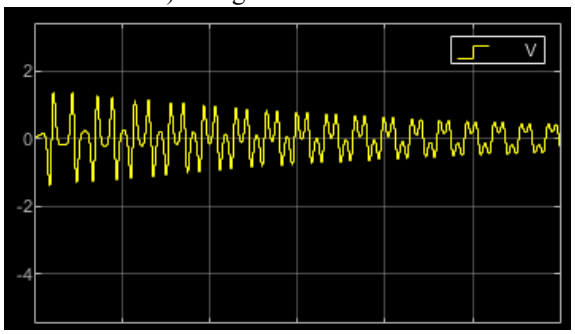
h) Energía potencial del péndulo



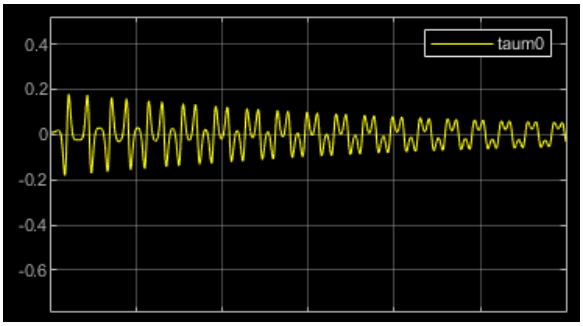
i) Energía total del sistema



j) Derivada de la energía total del sistema

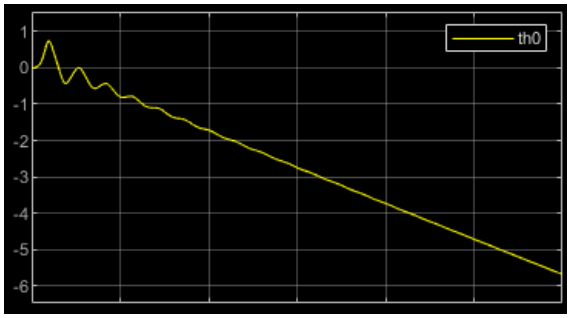


k) Voltaje de control V

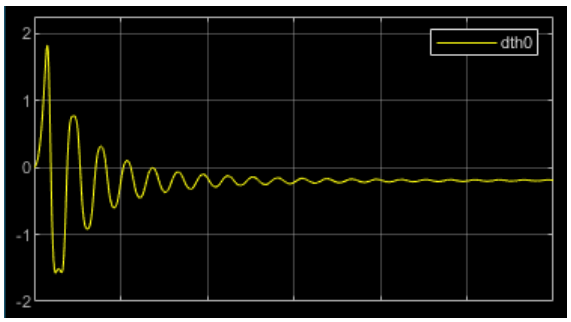


l) Par de control τ_{m0}

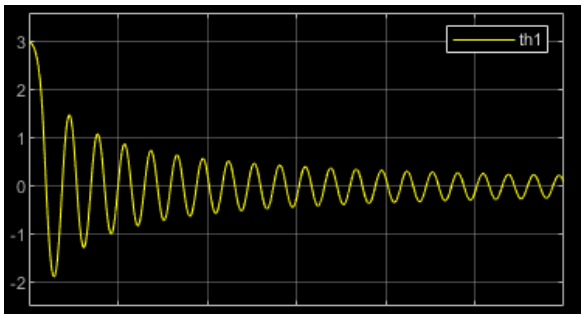
Figura 3.4.3: Bajada del péndulo con brazo inmóvil



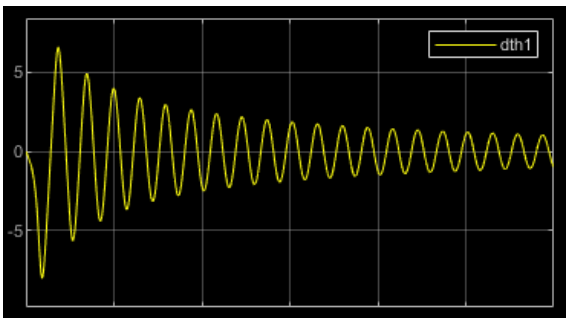
a) Ángulo θ_0



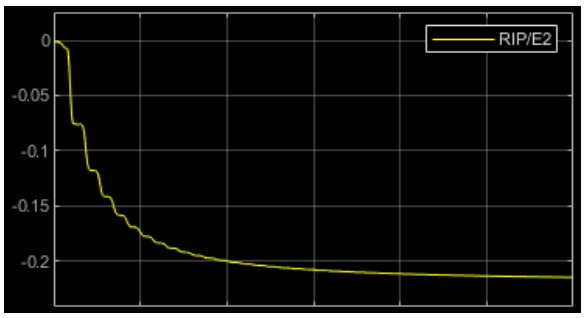
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



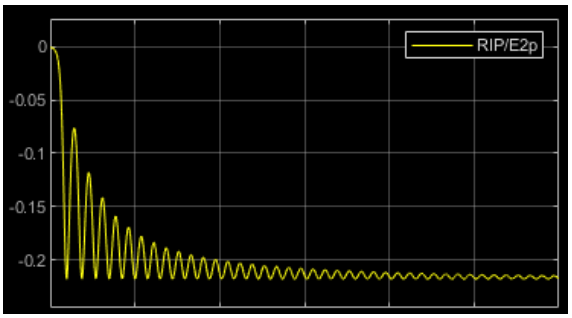
c) Ángulo θ_1



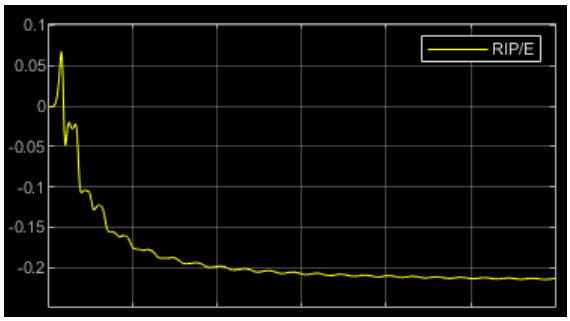
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



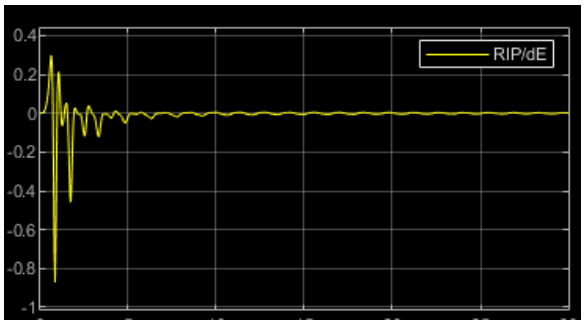
g) Energía total del péndulo



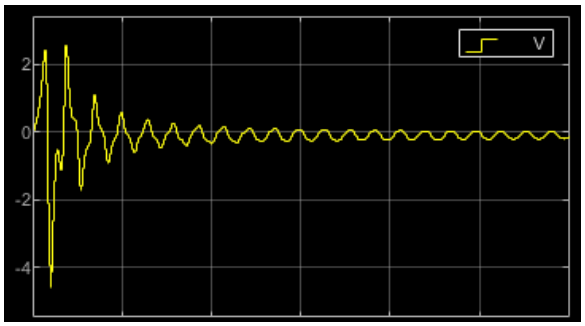
h) Energía potencial del péndulo



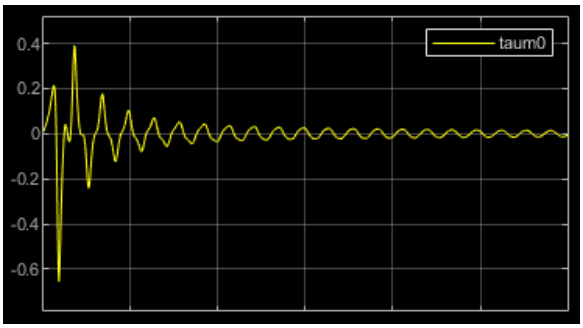
i) Energía total del sistema



j) Derivada de la energía total del sistema

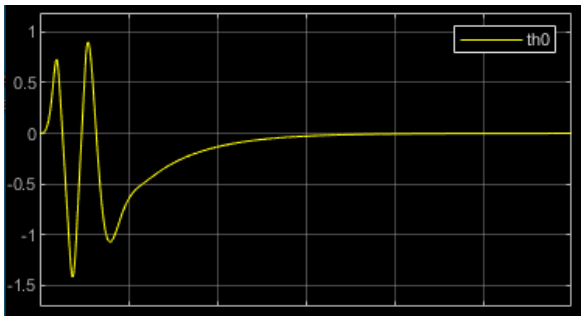


k) Voltaje de control V

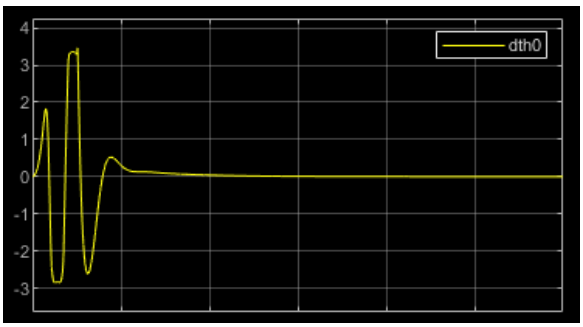


l) Par de control τ_{m0}

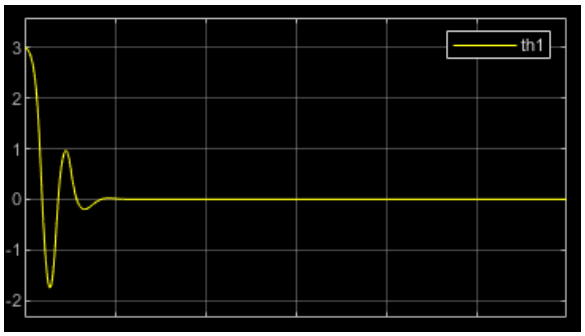
Figura 3.4.4: Bajada del péndulo con ley de control de la energía con compensación de pares de reacción



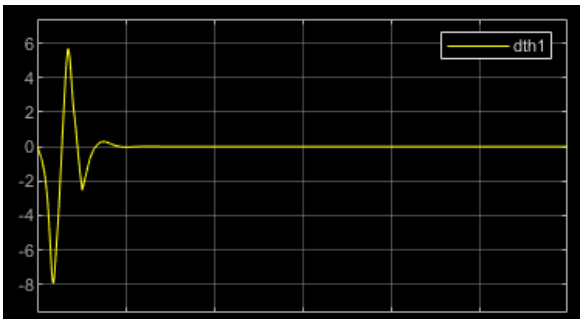
a) Ángulo θ_0



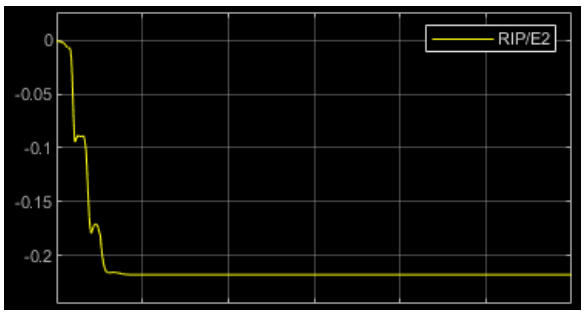
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



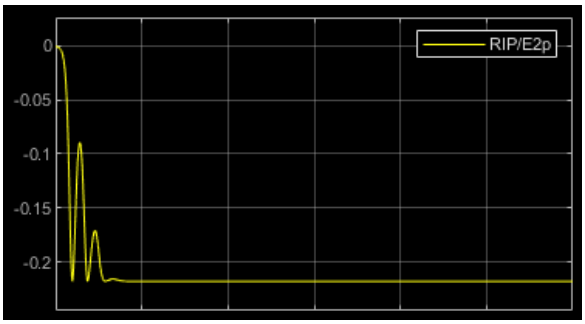
c) Ángulo θ_1



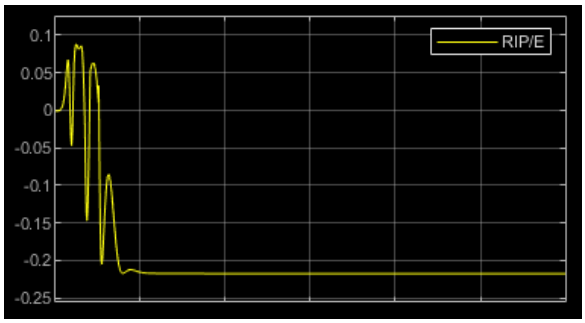
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



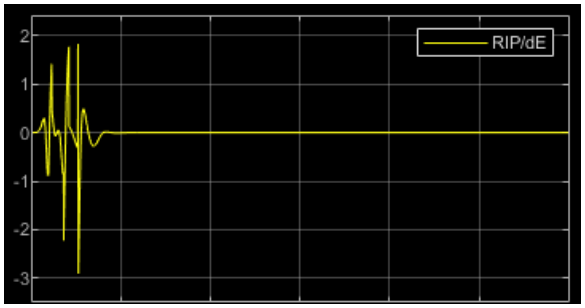
g) Energía total del péndulo



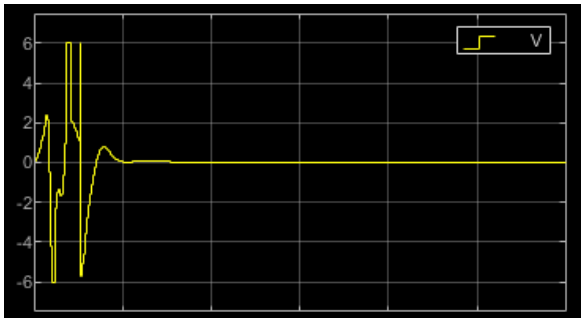
h) Energía potencial del péndulo



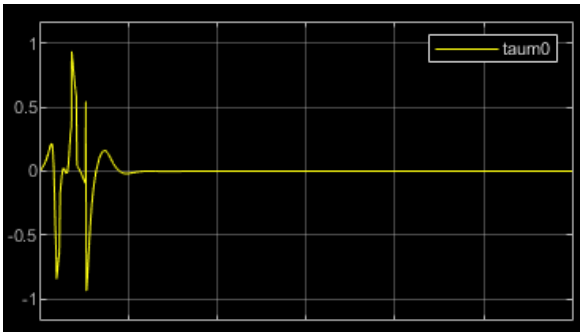
i) Energía total del sistema



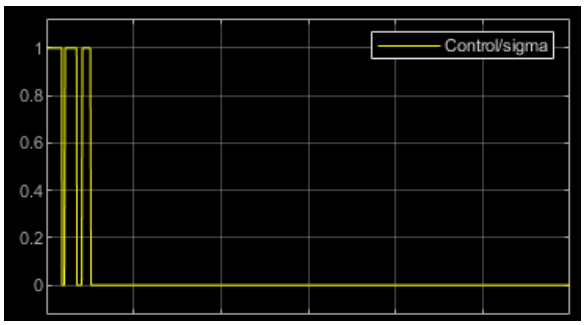
j) Derivada de la energía total del sistema



k) Voltaje de control V_s



l) Par de control τ_{m0}



m) Función de conmutación σ

Figura 3.4.5: Bajada del péndulo con ley de control de la energía con compensación de pares de reacción y conmutación a control LQR de estabilización

Se concluye así que, de las estrategias utilizadas en las simulaciones, la ley de control de la energía con compensación de los pares de reacción y conmutación a un control estabilizador LQR es la más efectiva para disipar rápidamente la energía del sistema y minimizar así las oscilaciones en la bajada del péndulo.

Por otra parte, la ley dada por la ecuación 2.6.12 es, sin embargo, la más efectiva cuando se desea que el brazo del péndulo permanezca inmóvil.

4. MODELO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO DOBLE INVERTIDO ROTACIONAL

El péndulo doble invertido rotacional (DRIP, Double Rotary Inverted Pendulum) consta de un péndulo invertido rotacional al que se agrega un segundo péndulo, que se encuentra acoplado al extremo libre del primer péndulo. El enlace entre el primer y el segundo péndulo no está actuado, por lo que éste puede girar libremente en torno a su eje de rotación.

El DRIP tiene así tres grados de libertad (el ángulo de brazo, el ángulo del primer péndulo y el ángulo del segundo péndulo), pero únicamente un actuador (el par que actúa sobre el brazo), por lo que se trata de un sistema subactuado de grado 2.

A la nomenclatura desarrollada en el capítulo 2 añadimos ahora el subíndice 2 para referirnos al tercer eslabón (segundo péndulo). L_2 representa la longitud del péndulo, y m_2 su masa. El centro de masa está localizado a una distancia l_2 de su eje de rotación, y su tensor de inercia, referido a su centro de masa, es $\mathbf{J}_2$. Se considera la existencia de fricción viscosa, con coeficiente de amortiguamiento δ_2. Un par perturbador τ_{p2} puede actuar sobre el segundo péndulo. El ángulo de rotación del segundo péndulo con respecto a la vertical se representa por θ_2. Se define un sistema de coordenadas (x_2, y_2, z_2), vinculado al segundo péndulo. En la siguiente figura se representan las convenciones adoptadas.

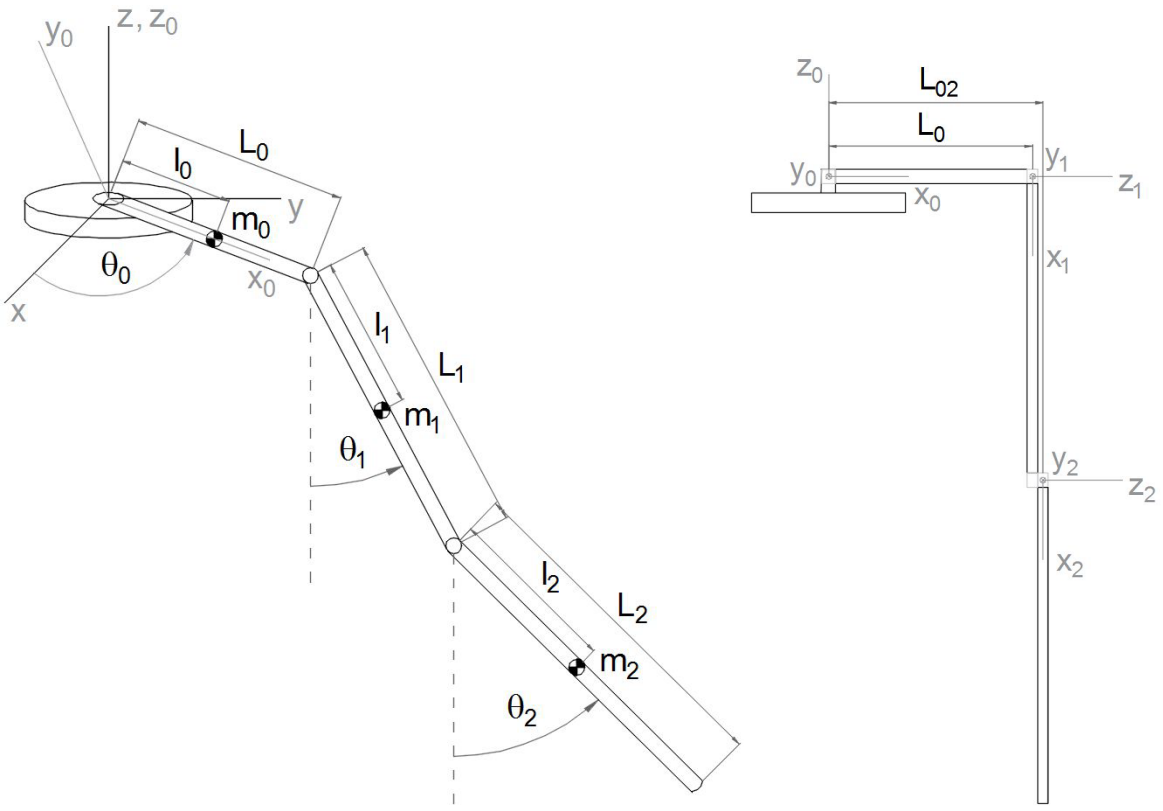


Figura 4.1.0: Péndulo doble invertido rotacional: geometría y convenciones adoptadas Fuente: elaboración propia.

Se asumirá que los ejes del sistema de coordenadas vinculado al segundo péndulo son ejes principales de inercia, por lo que el tensor de inercia adopta una forma diagonal:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix}$$

El vector de posición del centro de masa del péndulo viene dado en el sistema de coordenadas base por:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} L_{02}\cos(\theta_0) - L_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_0) - l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\mathrm{sen}(\theta_0) \\ L_{02}\,\mathrm{sen}(\theta_0) + L_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_0) + l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\cos(\theta_0) \\ -L_1\cos(\theta_1) - l_2\cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

La velocidad de su centro de masa es:

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$$
$$= \begin{bmatrix} \left(-L_{02}\,\mathrm{sen}(\theta_0) - L_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_0) - l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\cos(\theta_0)\right)\dot{\theta}_0 - L_1\cos(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_0)\dot{\theta}_1 - l_2\cos(\theta_2)\mathrm{sen}(\theta_0)\dot{\theta}_2 \\ \left(L_{02}\cos(\theta_0) - L_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_0) - l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\mathrm{sen}(\theta_0)\right)\dot{\theta}_0 + L_1\cos(\theta_1)\cos(\theta_0)\dot{\theta}_1 + l_2\cos(\theta_2)\cos(\theta_0)\dot{\theta}_2 \\ L_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 + l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

La velocidad angular de rotación del segundo péndulo en torno a su centro de masa viene dada por la suma vectorial de la velocidad angular de rotación $\boldsymbol{\omega}_{20}$ en torno al eje del brazo y la velocidad angular de rotación $\boldsymbol{\omega}_{22}$ en torno a su eje. Expresando las componentes de estas velocidades angulares en el sistema de referencia vinculado al péndulo se tendrá:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_{20} + \boldsymbol{\omega}_{22} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2)\dot{\theta}_0 \\ \mathrm{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2)\dot{\theta}_0 \\ \mathrm{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

La energía cinética de traslación del centro de masa del segundo péndulo es:

$$T_{2t} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2^T m_2 \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\left(m_2 L_{02}^2 + m_2 L_1^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_1) + 2m_2 L_1 l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_2) + m_2 l_2^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_2)\right)\dot{\theta}_0^2$$
$$+\frac{1}{2}m_2 L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 L_{02} L_1\cos(\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

Y la energía cinética de rotación en torno a su centro de masa:

$$T_{2r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^T \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{2}\left(J_{2xx}\cos^2(\theta_2) + J_{2yy}\,\mathrm{sen}^2(\theta_2)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}J_{2zz}\dot{\theta}_2^2$$

La energía cinética es la suma de los dos términos:

$$T_2 = T_{2t} + T_{2r}$$
$$= \frac{1}{2}\left(m_2 L_{02}^2 + m_2 L_1^2 \operatorname{sen}^2(\theta_1) + 2m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) + m_2 l_2^2 \operatorname{sen}^2(\theta_2) + J_{2xx}\cos^2(\theta_2) + J_{2yy}\operatorname{sen}^2(\theta_2)\right)\dot{\theta}_0^2$$
$$+ \frac{1}{2}m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2^2 + m_2 L_{02} L_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

La energía potencial del segundo péndulo, tomando el origen de potenciales en la posición correspondiente al péndulo completamente levantado ($\theta_1=\pi$, $\theta_2=\pi$), viene dada por la siguiente expresión:

$$U_2 = -m_2 g\left(L_1\left(\cos(\theta_1)+1\right) + l_2\left(\cos(\theta_2)+1\right)\right)$$

La energía cinética del sistema completo es:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_1)\right.$$
$$\left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_2) + 2m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 \qquad (4.1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2^2 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

Y la energía potencial:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 = 0 - m_1 g l_1\left(\cos(\theta_1)+1\right) - m_2 g\left(L_1\left(\cos(\theta_1)+1\right) + l_2\left(\cos(\theta_2)+1\right)\right)$$
$$= -\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos(\theta_1)+1\right) - m_2 l_2 g\left(\cos(\theta_2)+1\right) \qquad (4.2)$$

Cuando $\theta_1=0$ y $\theta_1=0$ (configuración abajo-abajo) la energía potencial es:

$$U = -2\left(m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_2 l_2\right) g \qquad (4.3)$$

La energía mecánica del sistema es la suma de la energía cinética y potencial:

$$E = T + U = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_1)\right.$$
$$\left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_2) + 2m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 \qquad (4.4)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2^2 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$- \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos(\theta_1)+1\right) - m_2 l_2 g\left(\cos(\theta_2)+1\right)$$

4.1 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Lagrange. Energía del sistema

Utilizaremos ahora el formalismo lagrangiano para obtener las ecuaciones del movimiento del péndulo doble invertido rotacional, para lo que se seguirá un desarrollo semejante al del epígrafe 2.1.

El lagrangiano del sistema es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right.$$
$$\left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2^2 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2\cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$+ \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) + m_2 l_2 g\left(\cos\left(\theta_2\right) + 1\right)$$

Los términos disipativos viscosos los consideramos mediante la función de disipación de Rayleigh, que ahora es:

$$F = \frac{1}{2}\left(\delta_0\dot{\theta}_0^2 + \delta_1\dot{\theta}_1^2 + \delta_2\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)^2\right)$$

Tomamos como tercera coordenada generalizada el ángulo del segundo péndulo, y como tercera fuerza generalizada el par perturbador correspondiente. A las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas en el capítulo 2 se agregará la correspondiente a la tercera coordenada:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} + \frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}_2} = \tau_{p2}$$

Al evaluar los términos resulta ahora un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de segundo orden. Expresamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right) & m_2 L_{02} l_2\cos\left(\theta_2\right) \\ \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_{02} l_2\cos\left(\theta_2\right) & m_2 L_1 l_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} C_{11} & -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 & -m_2 L_{02} l_2\,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ C_{21} & 0 & m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ C_{31} & -m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} \qquad (4.1.1)$$
$$+ \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\,\text{sen}\left(\theta_1\right) \\ m_2 l_2 g\,\text{sen}\left(\theta_2\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2}\end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{M}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \boldsymbol{\tau} \qquad (4.1.2)$$

donde, al igual que en el epígrafe 2.1, $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de coordenadas generalizadas, $\boldsymbol{\tau}$ el vector de fuerzas generalizadas, **M** la matriz de masas, **C** la matriz de términos centrífugos y de Coriolis, **D** la matriz de términos disipativos y **G** el vector de términos gravitatorios, términos que ahora vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix} M_{11} & (m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\cos(\theta_1) & m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2) \\ (m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\cos(\theta_1) & J_{1zz}+m_1l_1^2+m_2L_1^2 & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2) & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & J_{2zz}+m_2l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})=\begin{bmatrix} C_{11} & -(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_2L_{02}l_2\operatorname{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ C_{21} & 0 & m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ C_{31} & -m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1+\delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix} 0 \\ (m_1l_1+m_2L_1)g\operatorname{sen}(\theta_1) \\ m_2l_2g\operatorname{sen}(\theta_2) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix} \tau_{0m}+\tau_{0p} \\ \tau_{1p} \\ \tau_{2p} \end{bmatrix}$$

Los elementos que, por motivos de espacio, no se han desarrollado explícitamente en las matrices **M** y **C** están dados por:

$$M_{11}=m_0l_0^2+m_1L_0^2+m_2L_{02}^2+J_{0zz}+J_{1xx}+J_{2xx}+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_1)$$
$$+\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\operatorname{sen}^2(\theta_2)+2m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$C_{11}=\left(\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_1)+2m_2L_1l_2\cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\dot{\theta}_1$$
$$+\left(\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\operatorname{sen}(2\theta_2)+2m_2L_1l_2\cos(\theta_2)sen(\theta_1)\right)\dot{\theta}_2$$

$$C_{21}=-\left(\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_1)+m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_0$$

$$C_{31}=-\left(m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1)+\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_2)\dot{\theta}_0$$

La matriz de masas es definida positiva [15], ya que es simétrica y se cumple que $M_{11}>0$, $M_{11}M_{22}-M_{12}^2>0$ y $|\mathbf{M}|>0$ (criterio de Sylvester) [17], por lo que es invertible y es posible resolver para las aceleraciones angulares:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}=-\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})-\boldsymbol{\tau}\right) \tag{4.1.4}$$

Recordemos que la expresión que permite calcular la energía mecánica del sistema en el formalismo matricial es (epígrafe 2.1):

$$E=T+U=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}+U(\boldsymbol{\theta}) \tag{4.1.5}$$

Y la derivada de la energía con respecto al tiempo viene dada por:

$$\dot{E}=\dot{\boldsymbol{\theta}}^T\left(\boldsymbol{\tau}-\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{4.1.6}$$

4.2 Ecuaciones del movimiento. Formalismo de Hamilton

Habiendo tomando como coordenadas generalizadas los ángulos del brazo y de los péndulos, los correspondientes momentos conjugados vienen dados por:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} = \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) sen^2\left(\theta_1\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right) sen^2\left(\theta_2\right) + 2 m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right) \dot{\theta}_0 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) \cos\left(\theta_1\right) \dot{\theta}_1 \\
&\quad + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \dot{\theta}_2
\end{aligned}
\tag{4.2.1}
$$

$$
p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) \cos\left(\theta_1\right) \dot{\theta}_0 + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right) \dot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \dot{\theta}_2
$$

$$
p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \dot{\theta}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \dot{\theta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right) \dot{\theta}_2
$$

Expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial resulta:

$$
\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) \cos\left(\theta_1\right) & m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \\ \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) \cos\left(\theta_1\right) & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & m_2 l_2^2 + J_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) sen^2\left(\theta_1\right) \\
&\quad + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right) sen^2\left(\theta_2\right) + 2 m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)
\end{aligned}
$$

Las velocidades angulares expresadas en función de los momentos conjugados vendrán dadas por:

$$
\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) \cos\left(\theta_1\right) & m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \\ \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) \cos\left(\theta_1\right) & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & m_2 l_2^2 + J_{2zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{4.2.2}
$$

El hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \frac{1}{2}\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) \operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right) \operatorname{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2 m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right) \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right) \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right) \dot{\theta}_2^2 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) \cos\left(\theta_1\right) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
&\quad - \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) - m_2 l_2 g \left(\cos\left(\theta_2\right) + 1\right)
\end{aligned}
$$

Para obtener la expresión general del hamiltoniano en función de las coordenadas generalizadas y momentos conjugados, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, es necesario invertir explícitamente la matriz de transformación para obtener $\dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y calcular $H\left(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\right)$.

Las ecuaciones del movimiento vendrán dadas por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \theta_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

Nótese que la coordenada generalizada $q_0=\theta_0$ es cíclica, por lo que el momento conjugado p_0 se conservará en ausencia de pares externos y de fricción. La derivada temporal de p_0 viene dada por la siguiente expresión:

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_0} - \delta_0 \dot{\theta}_0(\mathbf{q},\mathbf{p}) + \tau_{m0} + \tau_{p0} = -\delta_0 \dot{\theta}_0(\mathbf{q},\mathbf{p}) + \tau_{m0} + \tau_{p0} \tag{4.2.4}$$

4.3 Puntos de equilibrio

Siguiendo un desarrollo análogo al del epígrafe 2.3, los puntos de equilibrio deberán cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \operatorname{sen}(\theta_1) \\ m_2 l_2 g \operatorname{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

Resolviendo se obtienen los siguientes puntos de equilibrio, donde se ha tomado $\theta_{0eq} = 0$ (θ_0 puede tomar cualquier valor en el equilibrio, ya que esta variable no interviene de forma directa en las ecuaciones del movimiento) y se han restringido los ángulos θ_{1eq} y θ_{2eq} al intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\mathbf{x}_{eq} \in \{ [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ \pi\ 0\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ \pi\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ \pi\ \pi\ 0\ 0\ 0]^T \}$$

La energía potencial del péndulo presenta un mínimo en $[\theta_1, \theta_2]=[0, 0]$, un máximo en $[\theta_1, \theta_2]=[\pi, \pi]$ y puntos de ensilladura en $[\theta_1, \theta_2] \in \{[0, \pi], [\pi, 0]\}$, concluyéndose así que el primero es un punto de equilibrio estable y los otros tres de equilibrio inestable.

4.4 Modelo en el espacio de estados

Siguiendo un procedimiento similar al del epígrafe 2.4 se obtendrán en este apartado dos modelos del sistema en el espacio de estados: el primero considerando las ecuaciones del movimiento obtenidas con el formalismo de Lagrange, y el segundo teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas con el formalismo de Hamilton.

4.4.1 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo lagrangiano

Tomando en consideración el modelo matemático obtenido a partir del formalismo lagrangiano, se define el siguiente vector de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \text{ con } \omega_0 = \dot{\theta}_0,\ \omega_1 = \dot{\theta}_1,\ \omega_2 = \dot{\theta}_2$$

y la ecuación que describe la evolución del sistema dinámico en el modelo de espacio de estados será:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_0 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \ddot{\theta}_0\left(\theta_1,\theta_2,\omega_0,\omega_1,\omega_2,u,\tau_{p0},\tau_{p1},\tau_{p2}\right) \\ \ddot{\theta}_1\left(\theta_1,\theta_2,\omega_0,\omega_1,\omega_2,u,\tau_{p0},\tau_{p1},\tau_{p2}\right) \\ \ddot{\theta}_2\left(\theta_1,\theta_2,\omega_0,\omega_1,\omega_2,u,\tau_{p0},\tau_{p1},\tau_{p2}\right) \end{bmatrix} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x},u,t\right) \tag{4.4.1}$$

En general, teniendo en cuenta la ecuación 2.1.5 para las aceleraciones angulares la expresión 2.4.1. queda así:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_0 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}\right)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\omega}\right)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}\left(\boldsymbol{\theta}\right) + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} u \tag{4.4.2}$$

Si los pares perturbadores son despreciables ($\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}$=0) y la ley de control es de la forma u=u(**x**), el sistema será autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$$

4.4.2 Modelo en el espacio de estados a partir del formalismo hamiltoniano

Para obtener el modelo en espacio de estados considerando el formalismo hamiltoniano definimos el siguiente vector de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de Hamilton definen el siguiente modelo en espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_0} - \delta_0 \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} - \delta_1 \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_2} - \delta_2 \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, u, t\right) \tag{4.4.3}$$

4.5 Linealización del modelo

Vimos en el epígrafe 2.5 que para implementar estrategias de control lineal es necesario disponer de un modelo lineal del sistema. Se obtendrán en este apartado los modelos linealizados del sistema en torno a su punto de equilibrio estable abajo-abajo, y a sus tres puntos de equilibrio inestable arriba-arriba, abajo-arriba y arriba-abajo, para lo que se desarrollará en serie de Taylor cada uno de los términos del modelo matemático no lineal en torno al punto en consideración, reteniendo los términos hasta el primer orden.

4.5.1 Reducción de ángulos al intervalo $[\theta_{i0} - \pi, \theta_{i0} + \pi)$

Para trabajar con los modelos linealizados los ángulos se reducirán al intervalo $[\theta_{i0} - \pi, \theta_{i0} + \pi)$, donde θ_{i0} representa el punto en torno al que se linealiza el correspondiente ángulo θ_i. Para esto se tendrá en cuenta la ecuación 2.5.1.

Si se desea estabilizar el brazo en $\theta_{00}=0$ mediante un control lineal, el ángulo θ_0 se reducirá al intervalo $[-\pi, \pi)$ y las expresiones quedarán de la siguiente forma:

$$\theta_{0r} = \begin{cases} \theta_0 \bmod 2\pi & \text{si } -\pi \le \theta_0 \bmod 2\pi < \pi \\ \theta_0 \bmod 2\pi - 2\pi & \text{si } \theta_0 \bmod 2\pi \ge \pi \\ \theta_0 \bmod 2\pi + 2\pi & \text{si } \theta_0 \bmod 2\pi < -\pi \end{cases} \tag{4.5.1}$$

Estas mismas ecuaciones se utilizarían para reducir los ángulos θ_1 y θ_2 al intervalo [-π, π) cuando se linealizan las ecuaciones del péndulo en torno a su punto de equilibrio estable abajo-abajo, al ser entonces θ_{10}=0 y θ_{20}=0.

Si se linealizan las ecuaciones del péndulo en torno a su punto de equilibrio inestable arriba-arriba se tendrá θ_{10}=π, θ_{20}=π, y por lo tanto los ángulos θ_1 y θ_2 se reducirán al intervalo [0, 2π), resultando las siguientes expresiones:

$$\theta_{1,2r} = \begin{cases} \theta_{1,2} \bmod 2\pi & \text{si } 0 \le \theta_{1,2} \bmod 2\pi < 2\pi \\ \theta_{1,2} \bmod 2\pi - 2\pi & \text{si } \theta_{1,2} \bmod 2\pi \ge 2\pi \\ \theta_{1,2} \bmod 2\pi + 2\pi & \text{si } \theta_{1,2} \bmod 2\pi < 0 \end{cases} \tag{4.5.2}$$

Cuando la linealización es en torno al punto de equilibrio inestable abajo-arriba se tendrá θ_{10}=0, θ_{20}=π, y por lo tanto el ángulo θ_1 se reducirá al intervalo [-π, π) y θ_2 se reducirá al intervalo [0, 2π).

Si la linealización es en torno al punto de equilibrio inestable arriba-abajo se tendrá θ_{10}=π, θ_{20}=0, y por lo tanto ahora el ángulo θ_1 se reducirá al intervalo [0, 2π) y θ_2 se reducirá al intervalo [-π, π).

4.5.2 Linealización en torno al punto de equilibrio estable abajo-abajo

Desarrollando en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio estable $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y reteniendo los términos hasta el primer orden se obtiene la ecuación:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{dd}}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}_{\mathrm{dd}}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}$$

con

$$\mathbf{M}_{\mathrm{dd}} = \begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} & m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1 & m_2 L_{02} l_2 \\ m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \\ m_2 L_{02} l_2 & m_2 L_1 l_2 & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{\mathrm{dd}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) g & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 g \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

El modelo linealizado de espacio de estados será (donde se ha definido **u**=**τ**, de acuerdo con la nomenclatura estándar):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\text{dd}}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{\text{dd}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{\text{dd}}^{-1}\mathbf{G}_{\text{dd}} & -\mathbf{M}_{\text{dd}}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{\text{dd}}^{-1} \end{bmatrix}\mathbf{u},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

Y suponiendo despreciables los pares perturbadores:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\text{dd}}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{\text{dd}}u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{\text{dd}}^{-1}\mathbf{G}_{\text{dd}} & -\mathbf{M}_{\text{dd}}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{\text{dd}}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u,\ u = \tau_{m0} \tag{4.5.4}$$

4.5.3 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable arriba-arriba

Desarrollando ahora en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio inestable $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \pi & \pi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y reteniendo los términos hasta el primer orden se obtiene:

$$\mathbf{M}_{\text{uu}}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{G}_{\text{uu}}\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\tau}$$

Donde:

$$\mathbf{M}_{\text{uu}} = \begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} & -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) & -m_2 L_{02} l_2 \\ -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \\ -m_2 L_{02} l_2 & m_2 L_1 l_2 & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{G}_{\text{uu}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 l_2 g \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} \tag{4.5.5}$$

siendo $\theta_1^* = \theta_1 - \pi$, $\dot{\theta}_1^* = \dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1^* = \ddot{\theta}_1$, $\theta_2^* = \theta_2 - \pi$, $\dot{\theta}_2^* = \dot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_2^* = \ddot{\theta}_2$.

El modelo linealizado de espacio de estados será:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_{\text{uu}}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}_{\text{uu}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{\text{uu}}^{-1}\mathbf{G}_{\text{uu}} & -\mathbf{M}_{\text{uu}}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}\mathbf{x}^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{\text{uu}}^{-1} \end{bmatrix}\mathbf{u},\ \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \omega_0 \\ \omega_1^* \\ \omega_2^* \end{bmatrix}$$

Si los pares perturbadores son despreciables la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{uu}^{-1}\mathbf{G}_{uu} & -\mathbf{M}_{uu}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{x}^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{uu}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \,,\; u = \tau_{m0} \tag{4.5.6}$$

4.5.4 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable abajo-arriba

Desarrollando en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio inestable $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y reteniendo los términos hasta el primer orden se obtiene:

$$\mathbf{M}_{du}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{G}_{du}\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\tau}$$

Donde:

$$\mathbf{M}_{du} = \begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} & \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) & -m_2 L_{02} l_2 \\ \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & -m_2 L_1 l_2 \\ -m_2 L_{02} l_2 & -m_2 L_1 l_2 & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix},\; \mathbf{G}_{du} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 l_2 g \end{bmatrix},\; \boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2^* \end{bmatrix} \tag{4.5.7}$$

siendo $\theta_2^* = \theta_2 - \pi$, $\dot{\theta}_2^* = \dot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_2^* = \ddot{\theta}_2$.

El modelo linealizado de espacio de estados será:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_{du}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}_{du}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{du}^{-1}\mathbf{G}_{du} & -\mathbf{M}_{du}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{x}^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{du}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \,,\; \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2^* \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2^* \end{bmatrix}$$

Si los pares perturbadores son despreciables la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_{du}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}_{du}u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{du}^{-1}\mathbf{G}_{du} & -\mathbf{M}_{du}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{x}^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{du}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \,,\; u = \tau_{m0} \tag{4.5.8}$$

4.5.5 Linealización en torno al punto de equilibrio inestable arriba-abajo

Desarrollando en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio inestable $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y reteniendo los términos hasta el primer orden se obtiene:

$$\mathbf{M}_{ud}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{G}_{ud}\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\tau}$$

Donde:

$$\mathbf{M}_{\text{ud}} = \begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} & -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) & m_2 L_{02} l_2 \\ -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & -m_2 L_1 l_2 \\ m_2 L_{02} l_2 & -m_2 L_1 l_2 & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.5.9}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{G}_{\text{ud}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 g \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1^* \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

siendo $\theta_1^* = \theta_1 - \pi$, $\dot{\theta}_1^* = \dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1^* = \ddot{\theta}_1$.

El modelo linealizado de espacio de estados será:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_{\text{ud}} \mathbf{x}^* + \mathbf{B}_{\text{ud}} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{\text{ud}}^{-1} \mathbf{G}_{\text{ud}} & -\mathbf{M}_{\text{ud}}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{x}^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{\text{ud}}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u},\ \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1^* \\ \theta_2 \\ \omega_0 \\ \omega_1^* \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

Si los pares perturbadores son despreciables la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_{\text{du}} \mathbf{x}^* + \mathbf{B}_{\text{du}} u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}_{\text{ud}}^{-1} \mathbf{G}_{\text{ud}} & -\mathbf{M}_{\text{ud}}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{x}^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{M}_{\text{ud}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,\ u = \tau_{m0} \tag{4.5.10}$$

4.6 Estudio del modelo no lineal y análisis de casos particulares

De manera semejante a como se hizo con el péndulo invertido rotacional simple en el epígrafe 2.6, se estudiarán en este apartado las configuraciones en las que puede permanecer el péndulo doble de forma estacionaria cuando la velocidad angular del brazo es constante, y se obtendrán aproximaciones del modelo general que pueden ser útiles a la hora de plantear estrategias de control. Se estudiará la aproximación de momento de inercia del brazo grande, con la que se obtendrá el modelo de dimensión 4 del péndulo, la aproximación de longitud del brazo grande, a partir de la cual se obtendrá el modelo de péndulo doble invertido sobre carro, la aproximación de aceleración del brazo pequeña, obteniéndose el par que se necesario aplicar sobre el eje del brazo para que su velocidad angular no varíe y definiéndose un potencial efectivo que tiene en cuenta los términos gravitatorio y centrífugo, y la aproximación de aceleración y velocidad angular del brazo pequeñas, a partir de la cual se obtiene el modelo de péndulo doble simple y se determinan los pares de reacción que actúan sobre el eje del brazo cuando se fija su posición.

4.6.1 Soluciones estacionarias Velocidad angular crítica. Bifurcación supercrítica del punto de equilibrio estable

Estudiaremos en este apartado las soluciones estacionarias del sistema, entendidas aquí en el sentido de que $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2 = 0$, con $\dot{\theta}_0$ una constante dada. Con esta condición, las ecuaciones del movimiento tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_1) + m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0 & 0 \\ -\left(m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1) + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_2)\dot{\theta}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \operatorname{sen}(\theta_1) \\ m_2 l_2 g \operatorname{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Considerando que no actúan pares perturbadores y que no existe fricción, la segunda y tercera ecuación quedan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} -\left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_1) + m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_0^2 + \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \operatorname{sen}(\theta_1) \\ -\left(m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1) + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_2)\dot{\theta}_0^2 + m_2 l_2 g \operatorname{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A diferencia del caso del péndulo rotatorio simple, ahora no es posible obtener una expresión explícita para θ_1 y θ_2 en función de $\dot{\theta}_0$, siendo necesario resolver numéricamente el sistema de ecuaciones.

De la primera ecuación resulta la siguiente expresión para θ_2 conocidos θ_1 y $\dot{\theta}_0$, válida siempre que $\theta_1 \neq \pm\pi/2$, valores estos últimos que no se alcanzan para ningún $\dot{\theta}_0$ finito.

$$\theta_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \tan(\theta_1) - \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_0^2}{m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_0^2}\right)$$

Eliminando $\dot{\theta}_0$ entre las dos ecuaciones se obtiene la siguiente relación entre θ_1 y θ_2, válida siempre que $\theta_2 \neq \pm\pi/2$ y que sólo admite solución numérica:

$$\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right)\operatorname{sen}(\theta_1) - \frac{\left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_1) + m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_1) m_2 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2)}{\left(m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1) + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}(\theta_2)\right)\cos(\theta_2)} = 0 \tag{4.6.1}$$

Vemos que en la relación entre los ángulos no interviene la aceleración de la gravedad g.

De las ecuaciones del movimiento, cuatro soluciones vienen dadas por las raíces de los términos en seno. Si nos restringimos al intervalo $(-\pi, \pi]$ éstas son:

$$\theta_{1eq} \in \{0, \pi\}\ ,\ \theta_{2eq} \in \{0, \pi\}$$

Lo que da lugar a las siguientes posibles combinaciones:

$$\begin{bmatrix}\theta_{1eq} & \theta_{2eq}\end{bmatrix} \in \{[0 \quad 0],[0 \quad \pi],[\pi \quad 0],[\pi \quad \pi]\}$$

Por lo tanto, si no existen perturbaciones, el primer y segundo péndulo mantendrán la posición vertical independientemente del valor que tenga la velocidad angular del brazo, siempre que ésta sea constante.

No es posible resolver de forma explícita para θ_1 y θ_2 el sistema de ecuaciones no lineales, por lo que para estudiar las soluciones no triviales linealizamos las ecuaciones del movimiento en torno a $[\theta_1 \ \theta_2] = [0\ 0]$:

$$\begin{bmatrix} -\left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\theta_1 + m_2 L_1 l_2 \theta_2\right)\dot{\theta}_0^2 + \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\theta_1 \\ -\left(m_2 L_1 l_2 \theta_1 + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\theta_2\right)\dot{\theta}_0^2 + m_2 l_2 g\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

De la segunda ecuación se obtiene la siguiente expresión para θ_2 conocidos θ_1 y $\dot{\theta}_0$, cuando θ_1 y θ_2 son pequeños:

$$\theta_2 = \frac{m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_0^2}{\left(m_2 l_2 g - \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\dot{\theta}_0^2\right)}\theta_1$$

Eliminando $\dot{\theta}_0$ entre las dos ecuaciones se obtiene la siguiente relación entre θ_1 y θ_2:

$$\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\theta_1 - \frac{\left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\theta_1 + m_2 L_1 l_2 \theta_2\right) m_2 l_2 g\theta_2}{m_2 L_1 l_2 \theta_1 + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\theta_2} = 0$$

La reescribimos de la siguiente forma:

$$\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) m_2 L_1 l_2 \theta_1^2 + \left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) - \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) m_2 l_2\right)\theta_1\theta_2$$
$$- m_2^2 L_1 l_2^2 \theta_2^2 = 0$$

En este caso se tiene una ecuación de segundo grado, siendo posible obtener una relación explícita entre los ángulos:

$$\theta_2 = \left(\frac{\left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) - \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) m_2 l_2\right)}{2 m_2^2 L_1 l_2^2} \right. \tag{4.6.2}$$
$$\left. \pm \frac{\sqrt{\left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) - \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right) m_2 l_2\right)^2 + 4 m_2^4 L_1^2 l_2^3 \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right)}}{2 m_2^2 L_1 l_2^2} \right) \theta_1$$

Reescribimos ahora las ecuaciones linealizadas del movimiento de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g - \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\dot{\theta}_0^2 & -m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_0^2 \\ -m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_0^2 & m_2 l_2 g - \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\dot{\theta}_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Se trata de un sistema homogéneo, por lo que, de acuerdo con el teorema de Rouché-Frobenius, para que admita soluciones distintas de la trivial el rango de la matriz de coeficientes debe ser inferior al número de incógnitas, y por lo tanto debe anularse el determinante de la matriz de coeficientes. El desarrollo del determinante conduce a una ecuación bicuadrada en $\dot{\theta}_0$:

$$\begin{aligned}&\left(-\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)+m_2^2L_1^2l_2^2\right)\dot{\theta}_0^4\\&+\left(\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)m_2l_2+\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\right)g\dot{\theta}_0^2\\&-\left(m_1l_1+m_2L_1\right)m_2l_2g^2=0\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación y considerando únicamente las dos raíces reales, iguales en magnitud y de signo opuesto, resulta que la velocidad angular del brazo deberá cumplir la siguiente condición para que existan soluciones distintas de la trivial:

$$\begin{aligned}\left|\dot{\theta}_0\right|=\dot{\theta}_{0c}=&\sqrt{\frac{-\left(\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)m_2l_2g+\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)g\right)}{2\left(m_2^2L_1^2l_2^2-\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\right)}}\\&\cdots\sqrt{\frac{+\sqrt{\left(\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)m_2l_2g+\left(m_1l_1+m_2L_1\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)g\right)^2}}{2\left(m_2^2L_1^2l_2^2-\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\right)}}\\&\cdots\sqrt{\frac{\cdots\sqrt{+4\left(m_2^2L_1^2l_2^2-\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\right)\left(\left(m_1l_1+m_2L_1\right)m_2l_2g^2\right)}}{2\left(m_2^2L_1^2l_2^2-\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\right)}}\end{aligned}\qquad(4.6.3)$$

Si $\left|\dot{\theta}_0\right|>\dot{\theta}_{0c}$, la existencia de términos no lineales hace que existan soluciones distintas de la trivial sin necesidad de que se anule el determinante, y por lo tanto la condición finalmente será:

$$\left|\dot{\theta}_0\right|\geq\dot{\theta}_{0c}$$

Cuando el valor absoluto de la velocidad angular del brazo es superior a este valor, si el primer o segundo péndulo son apartados de la posición vertical, el conjunto alcanzará una nueva configuración de equilibrio, de una forma similar a como sucede con el péndulo rotatorio simple, pudiendo tener los ángulos de equilibrio θ_{1eq}, θ_{2eq} signo positivo o negativo en función del signo de la perturbación, independientemente del signo de la velocidad angular del brazo. Nótese que si se hace $m_2, J_{2xx}, J_{2yy}\to 0$ se recupera la expresión para la velocidad angular crítica del péndulo rotatorio simple (epígrafe 2.5.2).

Al igual que para el péndulo rotatorio simple se tiene una bifurcación local supercrítica de tipo tridente del punto de equilibrio estable, por la que el punto de equilibrio estable pasa a ser inestable, apareciendo dos nuevos puntos de equilibrio estable distribuidos simétricamente (la evolución de θ_{1eq}, θ_{2eq} viene dada por curvas semejantes a la de la figura

2.2). Como ya se vio, este tipo de bifurcación es común en sistemas que presentan alguna simetría, siendo en este caso la coordenada θ_0 cíclica.

Si la velocidad angular del brazo es muy grande, de las ecuaciones no lineales del movimiento resulta:

$$\theta_{1eq}, \theta_{2eq} \approx \pm \arccos(0) = \pm \frac{\pi}{2} \tag{4.6.4}$$

y por lo tanto el primer y el segundo péndulo permanecerán en posición horizontal, con las siguientes combinaciones posibles para los ángulos de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \theta_{1eq} & \theta_{2eq} \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

4.6.2 Masa, momento de inercia y coeficiente de fricción del segundo péndulo pequeños. Péndulo invertido rotatorio simple

Cuando la masa, el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del segundo péndulo son despreciables en comparación con los del primer péndulo $\left(m_2 \ll m_1, J_{2zz} \ll J_{1zz}, \delta_2 \ll \delta_1\right)$, las dos primeras ecuaciones se desacoplan de la tercera y conforman las ecuaciones del modelo matemático del péndulo rotatorio simple:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + \left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2(\theta_1) & m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 & 0 \\ m_2 L_{02} l_2 \cos(\theta_2) & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \left(m_1 l_1^2 + J_{1yy} - J_{1xx}\right)\text{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_1 L_0 l_1 \,\text{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}(2\theta_1)\dot{\theta}_0 & 0 & 0 \\ C_{31} & -m_2 L_1 l_2 \,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{4.6.5}$$
$$+ \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 g \,\text{sen}(\theta_1) \\ m_2 l_2 g \,\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

De esta manera, la evolución del segundo péndulo no influirá en la evolución del brazo ni del primer péndulo, si bien la evolución de estos dos sí influirá en la del segundo péndulo.

4.6.3 Momento de inercia del brazo grande. Modelo de dimensión 4. Formalismo hamiltoniano del modelo de dimensión 4

Supondremos que el momento de inercia del brazo es grande comparado con los otros términos $\left(m_0 l_0^2 + J_{0zz} \gg m_1 l_1^2, m_2 l_2^2, J_{1xx}, J_{1yy}, J_{2xx}, J_{2yy}, m_1 L_0 l_1, m_2 L_1 l_2\right)$. Con esta aproximación, el modelo matemático queda así:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 & 0 \\ (m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1)\cos(\theta_1) & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 L_{02} l_2 \cos(\theta_2) & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ C_{31} & -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1)\operatorname{sen}(\theta_1) g \\ m_2 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2) g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Vemos de nuevo que, con esta aproximación, la evolución de θ_0 no depende del movimiento del péndulo, sino únicamente del par de control aplicado.

Reescribimos las ecuaciones del modelo de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ C_{31} & -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1)\operatorname{sen}(\theta_1) g \\ m_2 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2) g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ -(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1)\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p1} \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Evaluamos $\ddot{\theta}_0$ con la primera ecuación y sustituimos la expresión resultante en la segunda y tercera ecuación:

$$\begin{bmatrix} m_0 l_0^2 + J_{0zz} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ C_{31} & -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{4.6.6}$$
$$+ \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1)\operatorname{sen}(\theta_1) g \\ m_2 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2) g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ -(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1)\cos(\theta_1)\dfrac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - \delta_0 \dot{\theta}_0}{m_0 l_0^2 + J_{0zz}} + \tau_{p1} \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos(\theta_2)\dfrac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - \delta_0 \dot{\theta}_0}{m_0 l_0^2 + J_{0zz}} + \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Si además la velocidad angular del brazo es pequeña:

$$\dot{\theta}_0 \ll \frac{1}{\sqrt{\left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_1\right)}}$$

$$\dot{\theta}_0 \ll \frac{1}{\sqrt{\left(m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_2\right)}}$$

será despreciable el término centrífugo en $\dot{\theta}_0^2$ y el sistema formado por la segunda y tercera ecuación corresponderán al modelo matemático de un péndulo doble actuado por los pares efectivos dados por los términos del segundo miembro (modelo de dimensión 4):

$$\begin{bmatrix} J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right) g \\ m_2 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right) g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dfrac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - \delta_0\dot{\theta}_0}{m_0 l_0^2 + J_{0zz}} + \tau_{p1} \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dfrac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - \delta_0\dot{\theta}_0}{m_0 l_0^2 + J_{0zz}} + \tau_{p2} \end{bmatrix} \tag{4.6.7}$$

Se desarrolla a continuación una formulación equivalente del modelo resultante de esta aproximación utilizando el formalismo hamiltoniano. El lagrangiano del péndulo doble viene dado por:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$+\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) + m_2 l_2 g\left(\cos\left(\theta_2\right) + 1\right)$$

Los momentos conjugados asociados a las coordenadas generalizadas θ_1, θ_2 son:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & m_2 l_2^2 + J_{2zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz de transformación es mayor que 0, y por lo tanto la matriz es siempre invertible. Resolviendo para las velocidades angulares resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} m_2 l_2^2 + J_{2zz} & -m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ -m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta = \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

El hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$-\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) - m_2 l_2 g\left(\cos\left(\theta_2\right) + 1\right)$$

Expresándolo en función de las coordenadas generalizadas y momentos conjugados se tiene:

$$H\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)p_1^2 + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)p_2^2 - 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)p_1 p_2}{\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)} \tag{4.6.8}$$
$$-\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) - m_2 l_2 g\left(\cos\left(\theta_2\right) + 1\right)$$

Escribimos las ecuaciones de Hamilton modificadas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p1} \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix}$$

Reescribimos la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p1} \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Evaluando los términos resulta:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{p}_1\\ \dot{p}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(m_2l_2^2+J_{2zz}\right)p_1-m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)p_2}{\Delta}\\ \dfrac{-m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)p_1+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_{1zz}\right)p_2}{\Delta}\\ \dfrac{m_2^2L_1^2l_2^2\,\mathrm{sen}\left(2\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)\left(\left(m_2l_2^2+J_{2zz}\right)p_1^2+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_{1zz}\right)p_2^2-2m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)p_1p_2\right)}{2\Delta^2}\\ -\dfrac{m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}\left(\theta_1-\theta_2\right)p_1p_2}{\Delta}-\left(m_1l_1+m_2L_1\right)g\,\mathrm{sen}\left(\theta_1\right)\\ -\dfrac{m_2^2L_1^2l_2^2\,\mathrm{sen}\left(2\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)\left(\left(m_2l_2^2+J_{2zz}\right)p_1^2+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_{1zz}\right)p_2^2-2m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)p_1p_2\right)}{2\Delta^2}\\ +\dfrac{m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}\left(\theta_1-\theta_2\right)p_1p_2}{\Delta}-m_2l_2g\,\mathrm{sen}\left(\theta_2\right)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_0-\delta_1\dfrac{\left(m_2l_2^2+J_{2zz}\right)p_1-m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)p_2}{\Delta}+\tau_{p1}\\ -m_2L_{02}l_2\cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_0-\delta_2\dfrac{-m_2L_1l_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)p_1+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_{1zz}\right)p_2}{\Delta}+\tau_{p2}\end{bmatrix} \tag{4.6.9}$$

4.6.4 Longitud del brazo grande. Péndulo doble invertido sobre carro

Se realizará un desarrollo análogo al del epígrafe 2.6.3. Cuando la longitud del brazo es grande $\left(L_0 \gg L_1, L_2, L_0\Delta\theta_0\right)$ vimos que la trayectoria que describe el extremo del brazo se confunde con la tangente, simplificándose así la matriz de términos centrífugos y de Coriolis.

Reescribimos las ecuaciones de movimiento de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{M_{11}}{L_0^2} & \left(m_1 l_1 + m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} L_1\right)\cos(\theta_1) & m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} l_2 \cos(\theta_2) \\ \left(m_1 l_1 + m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} L_1\right)\cos(\theta_1) & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} l_2 \cos(\theta_2) & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + J_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0\ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{C_{11}}{L_0^2} & -\left(m_1 l_1 + m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} L_1\right)\operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} l_2 \operatorname{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dfrac{C_{21}}{L_0} & 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dfrac{C_{31}}{L_0} & -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0\dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{\delta_0}{L_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0\dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \operatorname{sen}(\theta_1) \\ m_2 l_2 g \operatorname{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\tau_{m0} + \tau_{p0}}{L_0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

El término $\dot{x}_0 = L_0\dot{\theta}_0$ representa la velocidad lineal del extremo del brazo, $\ddot{x}_0 = L_0\ddot{\theta}_0$ su aceleración lineal, y consideramos que un par τ que actúa sobre el brazo dividido entre su longitud es equivalente a una fuerza tangencial *f* aplicada en su extremo con una magnitud dada por ese cociente. Con estas definiciones, y teniendo en cuenta que L_0 es grande, las ecuaciones anteriores se escribirán así:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz}}{L_0^2} & \left(m_1 l_1 + m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} L_1\right)\cos(\theta_1) & m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} l_2 \cos(\theta_2) \\ \left(m_1 l_1 + m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} L_1\right)\cos(\theta_1) & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} l_2 \cos(\theta_2) & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + J_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\left(m_1 l_1 + m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} L_1\right)\operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_2 \dfrac{L_{02}}{L_0} l_2 \operatorname{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \operatorname{sen}(\theta_1) \\ m_2 l_2 g \operatorname{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{m0} + f_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Si realizamos la aproximación $L_0=L_{02}$, suponemos que la masa del brazo está concentrada en su extremo, y por lo tanto $l_0=L_0$ y $J_{0zz}=0$, y que se dispone un carril para guiar la masa, con coeficiente de fricción viscosa b_0, las ecuaciones del movimiento tomarán la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_0+m_1+m_2 & (m_1l_1+m_2L_1)\cos(\theta_1) & m_2l_2\cos(\theta_2) \\ (m_1l_1+m_2L_1)\cos(\theta_1) & m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_{1zz} & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2l_2\cos(\theta_2) & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & m_2l_2^2+J_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(m_1l_1+m_2L_1)\operatorname{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_2l_2\operatorname{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{4.6.10}$$
$$+ \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1+\delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1l_1+m_2L_1)\operatorname{sen}(\theta_1)g \\ m_2l_2\operatorname{sen}(\theta_2)g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{m0}+f_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Se obtiene así el modelo matemático del péndulo doble sobre un carro como caso particular del modelo del péndulo doble rotatorio.

De una forma semejante a lo visto en el epígrafe 4.5.4, si m_0 es grande comparado con m_1 y m_2, el movimiento del carro no se verá afectado por el péndulo y éste se podrá controlar directamente con la fuerza aplicada sobre el carro:

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_{1zz} & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ 0 & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & m_2l_2^2+J_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2L_1l_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1+\delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1l_1+m_2L_1)\operatorname{sen}(\theta_1)g \\ m_2l_2\operatorname{sen}(\theta_2)g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{m0}+f_{p0} \\ -(m_1l_1+m_2L_1)\cos(\theta_1)\dfrac{f_{m0}+f_{p0}-b_0\dot{x}_0}{m_0}+\tau_{p1} \\ -m_2l_2\cos(\theta_2)\dfrac{f_{m0}+f_{p0}-b_0\dot{x}_0}{m_0}+\tau_{p2} \end{bmatrix} \tag{4.6.11}$$

Podemos comprobar que, si el coeficiente de fricción viscosa b_0 es despreciable o se cancela el término con la acción de control, la primera ecuación estará completamente desacoplada de las otras dos.

4.6.5 Aceleración angular del brazo pequeña. Potencial efectivo

Consideraremos ahora que la aceleración angular del brazo es pequeña $\left(\ddot{\theta}_0 \approx 0\right)$, y que por lo tanto la velocidad angular $\dot{\theta}_0$ es sensiblemente constante. Reescribimos las ecuaciones del modelo de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right) & m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \\ 0 & J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ 0 & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} C_{11} & -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 & -m_2 L_{02} l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) - \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0^2 \\ m_2 l_2 g \operatorname{sen}\left(\theta_2\right) - \left(m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_0^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_{m0} + \tau_{p0} \\ -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p1} \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_0 + \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Definimos la forma diferencial

$$\begin{aligned} & M\left(\theta_1, \theta_2\right) d\theta_1 + N\left(\theta_1, \theta_2\right) d\theta_2 \\ & = \left(\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) - \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0^2\right) d\theta_1 \\ & \quad + \left(m_2 l_2 g \operatorname{sen}\left(\theta_2\right) - \left(m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_0^2\right) d\theta_2 \end{aligned}$$

La forma así definida cumple con la condición necesaria y suficiente para que la diferencial sea exacta, y por lo tanto su integración no dependerá de la trayectoria seguida [20]:

$$\frac{\partial M\left(\theta_1, \theta_2\right)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial N\left(\theta_1, \theta_2\right)}{\partial \theta_1} = 0$$

Podemos definir así una energía potencial efectiva U_e:

$$\begin{aligned} U_e &= \int \left(\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) - \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_0^2\right) d\theta_1 \\ &\quad + \int \left(m_2 l_2 g \operatorname{sen}\left(\theta_2\right) - \left(m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_0^2\right) d\theta_2 + C \\ &= -\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos\left(\theta_1\right) + 1\right) + \frac{1}{4}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\left(\cos\left(2\theta_1\right) - 1\right)\dot{\theta}_0^2 \\ &\quad - m_2 l_2 g\left(\cos\left(\theta_2\right) + 1\right) - m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{4}\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\left(\cos\left(2\theta_2\right) - 1\right)\dot{\theta}_0^2 \end{aligned} \tag{4.6.12}$$

donde hemos escogido la constante de integración C de manera que U_e se anule cuando $[\theta_1, \theta_2] = [\pi, \pi]$, esto es, cuando el péndulo se encuentre en la configuración arriba-arriba. Nótese que si se hace $m_2, J_{2xx}, J_{2yy} \to 0$ se recupera la expresión para el potencial efectivo del péndulo rotatorio simple (epígrafe 2.5.4).

Por lo tanto, el sistema formado por la segunda y tercera ecuación corresponde a un péndulo doble actuado por el par efectivo dado por el segundo término, con una energía potencial efectiva dada por U_e en lugar del término de energía potencial gravitatoria.

$$\begin{bmatrix} J_{1zz}+m_1l_1^2+m_2L_1^2 & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & J_{2zz}+m_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ -m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \delta_1+\delta_2 & -\delta_2 \\ -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial U_e}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial U_e}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_0+\tau_{p1} \\ -m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_0+\tau_{p2} \end{bmatrix} \qquad (4.6.13)$$

4.6.6 Aceleración y velocidad angular del brazo pequeñas. Brazo inmóvil. Péndulo doble

Cuando la velocidad y aceleración angular del brazo son nulas o muy pequeñas $(\ddot{\theta}_0, \dot{\theta}_0 \approx 0)$, el modelo del sistema toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & (m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\cos(\theta_1) & m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2) \\ (m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\cos(\theta_1) & J_{1zz}+m_1l_1^2+m_2L_1^2 & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2) & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & J_{2zz}+m_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} C_{11} & -(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\,\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_2L_{02}l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ C_{21} & 0 & m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ C_{31} & -m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1+\delta_2 & -\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ (m_1l_1+m_2L_1)g\,\mathrm{sen}(\theta_1) \\ m_2l_2g\,\mathrm{sen}(\theta_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_{m0}+\tau_{p0} \\ \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix}$$

Cuando el brazo permanece inmóvil las ecuaciones segunda y tercera del modelo están desacopladas de la primera, y se simplifican a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} J_{1zz}+m_1l_1^2+m_2L_1^2 & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & J_{2zz}+m_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ -m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \delta_1+\delta_2 & -\delta_2 \\ -\delta_2 & \delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (m_1l_1+m_2L_1)g\,\mathrm{sen}(\theta_1) \\ m_2l_2g\,\mathrm{sen}(\theta_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{bmatrix} \qquad (4.6.14)$$

que son las ecuaciones del movimiento de un péndulo doble.

Puesto que en esta última expresión la matriz de masas que multiplica al vector de aceleraciones angulares del péndulo es definida positiva, y por lo tanto su determinante no se anula, es posible resolver para $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ en función de $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \tau_{p1}, \tau_{p2}$:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 = & \frac{-\left(\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)\left(\delta_1+\delta_2\right)+m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\delta_2\right)\dot{\theta}_1+\left(\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)+m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)\delta_2\dot{\theta}_2}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
& -\frac{\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \operatorname{sen}\left(2\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_1^2-m_2 L_1 l_2\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
& -\frac{\left(m_1 l_1+m_2 L_1\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right) g \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)+m_2^2 L_1 l_2^2 g \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
& +\frac{\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)\tau_{p1}-m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\tau_{p2}}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
\ddot{\theta}_2 = & \frac{\left(m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\left(\delta_1+\delta_2\right)-\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\delta_2\right)\dot{\theta}_1}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
& +\frac{\left(-m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\right)\delta_2\dot{\theta}_2}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
& +\frac{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right) m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \operatorname{sen}\left(2\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_2^2}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
& +\frac{\left(m_1 l_1+m_2 L_1\right) m_2 L_1 l_2 g \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right)-\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right) m_2 l_2 g \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)} \\
& -\frac{m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\tau_{p1}+\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\tau_{p2}}{\left(J_{1zz}+m_1 l_1^2+m_2 L_1^2\right)\left(J_{2zz}+m_2 l_2^2\right)-m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2\left(\theta_1-\theta_2\right)}
\end{aligned}
\tag{4.6.15}
$$

Resolviendo para τ_{m0} en la primera ecuación del modelo obtenemos el par de reacción que actúa sobre el eje del brazo cuando lo fijamos para que permanezca inmóvil:

$$
\begin{aligned}
\tau_{m0} = & \left(m_1 L_0 l_1+m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1+m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 \\
& -\left(m_1 L_0 l_1+m_2 L_{02} L_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2-m_2 L_{02} l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2-\tau_{p0}
\end{aligned}
\tag{4.6.16}
$$

4.6.7 Aceleración angular del brazo pequeña

Siguiendo un desarrollo análogo al del epígrafe 2.5.7, teniendo en cuenta que M_{11} es siempre mayor que 0 podemos reescribir la primera ecuación del modelo general del péndulo doble rotacional de la siguiente forma:

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{\tau_{m0} + \tau_{p0} - \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 - m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2}{M_{11}}$$
$$- \frac{\left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1}{M_{11}}$$
$$- \frac{\left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_2\right) sen\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2}{M_{11}}$$
$$+ \frac{\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 + m_2 L_{02} l_2 \,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 - \delta_0\dot{\theta}_0}{M_{11}}$$

Para que la aceleración angular del brazo se anule, el par de control deberá compensar los pares de reacción, el par de fricción y el par perturbador:

$$\begin{aligned}\tau_{m0} &= \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 \\ &+ \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \\ &+ \left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_2\right) sen\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 \\ &- \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 - m_2 L_{02} l_2 \,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 + \delta_0\dot{\theta}_0 - \tau_{p0}\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

Donde $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ vienen dadas en función de $\dot{\theta}_0, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \tau_{p1}, \tau_{p2}$ mediante la ecuación 4.1.4:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{M}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}\left(\boldsymbol{\theta}\right) - \boldsymbol{\tau}\right)$$

con

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Al aplicar este par de control la velocidad angular del brazo permanecerá constante. En el caso particular de que el brazo se encuentre inmóvil, la expresión que da el par que es necesario aplicar para que permanezca en reposo se simplifica y coincide con la obtenida en el epígrafe anterior:

$$\begin{aligned}\tau_{m0} &= \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 \\ &- \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 - m_2 L_{02} l_2 \,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 - \tau_{p0}\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

4.7 Sistema actuador. Motor DC y tren de engranajes

Al igual que el péndulo rotatorio simple, el péndulo doble invertido rotatorio está actuado usualmente por un motor de corriente continua acoplado a tren de engranajes, habiéndose descrito en el epígrafe 2.7 el modelo matemático de este sistema (ecuaciones 2.7.1–2.7.6).

4.8 Parámetros del modelo utilizado en las simulaciones

Los parámetros utilizados para el modelo del péndulo doble se han tomado iguales a los del péndulo empleado por Cazzolato y Prime en [6], a los que se ha añadido un segundo péndulo de iguales características que el primero, y los momentos de inercia J_{1xx}, y J_{2xx}, siendo éstos valores estimados. Para el actuador, de nuevo se han tomado los parámetros de la base servomotor SRV02 de Quanser [23], en la configuración de par alto (tabla 2.2).

Se muestran en la tabla 4.1 los parámetros utilizados para el modelo del péndulo. Los parámetros utilizados para el modelo del actuador ya están definidos en la tabla 2.2. La tensión de alimentación del motor se limitará al valor de su tensión nominal V_{nom}.

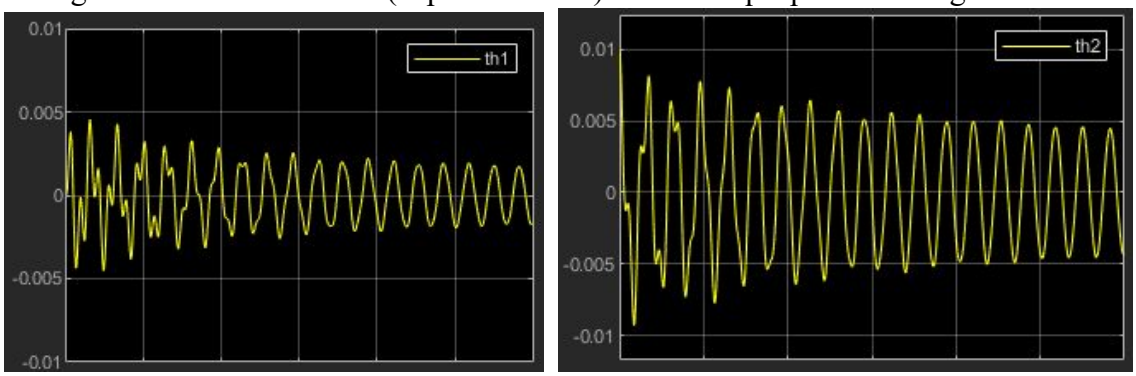
Tabla 4.1: Parámetros del modelo del péndulo doble invertido rotacional

Parámetro	Unidades	Valor
m_0	kg	0,300
m_1	kg	0,075
m_2	kg	0,075
L_0	m	0,278
L_1	m	0,300
L_2	m	0,300
l_0	m	0,150
l_1	m	0,148
l_2	m	0,148
J_{0zz}	kgm^2	$2{,}48\cdot10^{-2}$
J_{1zz}, J_{1yy}	kgm^2	$3{,}86\cdot10^{-3}$
J_{1xx}	kgm^2	$J_{1zz}\cdot10^{-2}$
J_{2zz}, J_{2yy}	kgm^2	$3{,}86\cdot10^{-3}$
J_{2xx}	kgm^2	$J_{2zz}\cdot10^{-2}$
δ_0	Nms	$1{,}0\cdot10^{-4}$
δ_1	Nms	$2{,}8\cdot10^{-4}$
δ_2	Nms	$2{,}8\cdot10^{-4}$
g	ms^{-2}	9,81

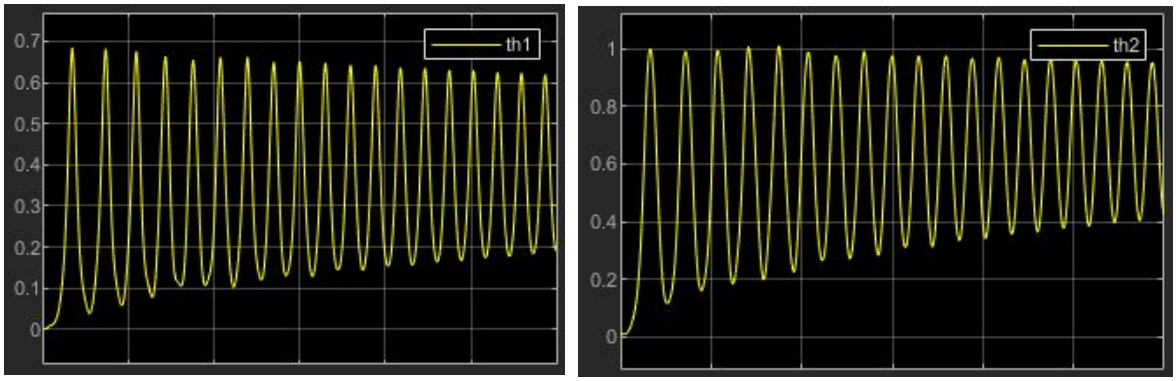
4.9 Simulaciones: bifurcación supercrítica. Análisis de resultados

En la Figura 4.9.1 se muestra el resultado de varias simulaciones manteniendo la velocidad angular del brazo constante. De la ecuación 4.6.3, sustituyendo los valores de los parámetros de modelo, resulta una velocidad angular crítica $\dot{\theta}_{0c} = 4{,}00\ s^{-1}$. El tiempo de simulación es 30 s en todos los casos. En a) la frecuencia angular del brazo no llega al valor crítico, por lo que los péndulos se acercan a la posición vertical abajo-abajo a medida que pierden energía por fricción. En b) y c) la velocidad angular del brazo supera el valor crítico, y podemos comprobar la influencia que tienen las condiciones iniciales en el signo de los ángulos de equilibrio, independientemente del signo de la velocidad angular del brazo. En d) la

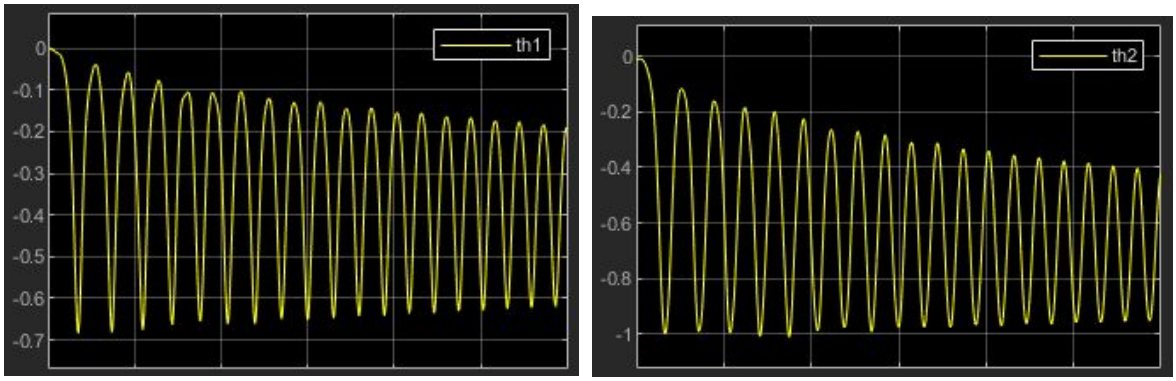
velocidad angular del brazo es elevada, por lo que los péndulos tienden a estabilizarse en configuración casi horizontal (expresión 4.6.4) a medida que pierden energía.



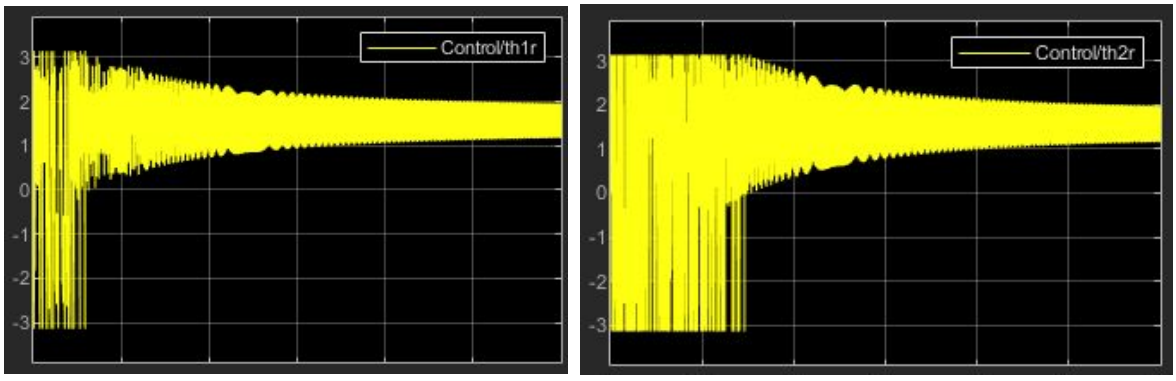
a) $\dot{\theta}_0$ =3,5 s^{-1}, θ_{1i} =0, , θ_{2i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, $\dot{\theta}_{2i}$ =0 s^{-1}, θ_{1eq}=0, θ_{2eq}=0



b) $\dot{\theta}_0$ =4,5 s^{-1}, θ_{1i} =0, , θ_{2i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, $\dot{\theta}_{2i}$ =0 s^{-1}, θ_{1eq}≈0,31, θ_{2eq}=0,40



c) $\dot{\theta}_0$ =4,5 s^{-1}, θ_{1i} =0, , θ_{2i} =-0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, $\dot{\theta}_{2i}$ =0 s^{-1}, θ_{1eq}=-0,31, θ_{2eq}=-0,40



d) $\dot{\theta}_0$ =100 s^{-1}, θ_{1i} =0, , θ_{2i} =0,01, $\dot{\theta}_{1i}$ =0 s^{-1}, $\dot{\theta}_{2i}$ =0 s^{-1}, θ_{1eq}≈π/2, θ_{2eq}≈π/2

Figura 4.9.1: Bifurcación supercrítica del punto de equilibrio estable. Péndulo doble

5. CONTROL DEL PÉNDULO DOBLE INVERTIDO ROTACIONAL

En este capítulo se desarrollarán y aplicarán varias estrategias de control para el levantamiento, estabilización y bajada del péndulo doble invertido rotacional. Se utilizarán para el modelo los valores de los parámetros dados en la tabla 4.1.

5.1 Levantamiento del péndulo (swing-up)

Se desarrollarán en este apartado leyes de control para el levantamiento del péndulo doble. Se generalizará al péndulo doble invertido rotacional la ley de control de la energía de Åström y Furuta,, y se propondrán variaciones para compensar los pares de reacción del péndulo, los términos disipativos, se utilizará la energía potencial efectiva en vez de la gravitatoria y se generalizará al péndulo doble la estrategia de control propuesta para el péndulo simple por Gordillo, Acosta y Aracil, basada en el método del pseudogradiente de velocidad de Fradkov.

5.1.1 Evolución del sistema dinámico en E=0. Secciones de Poincaré

Una vez se le ha aportado al péndulo la energía correspondiente a su configuración de equilibrio totalmente levantado, la señal de control se hace pequeña, ya que ésta es proporcional al término (E-E_r), y las trayectorias que el sistema describe en su evolución en el espacio de fases cumplirán la siguiente ecuación:

$$E = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} + U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz}\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + J_{2zz}\right)\dot{\theta}_2^2$$
$$+ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos(\theta_1) + 1\right) - m_2 l_2 g\left(\cos(\theta_2) + 1\right) = 0$$

Puesto que la configuración de equilibrio del péndulo totalmente levantado cumple la ecuación anterior cabe esperar que, en su evolución, el péndulo alcance ese estado o bien alguno cercano a él, momento en el que el control de levantamiento conmutará a un control estabilizador para estabilizar el péndulo en su posición de equilibrio inestable.

Si despreciamos los términos disipativos y consideramos que, una vez el control ha suministrado al péndulo la energía necesaria para alcanzar el estado objetivo se hace pequeño, esto es $u \approx 0$, las ecuaciones del movimiento adoptan la siguiente forma, que corresponde al péndulo doble no actuado:

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + J_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \operatorname{sen}(\theta_1) \\ m_2 l_2 g \operatorname{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El péndulo doble a bajas energías se comporta como un sistema de osciladores lineales acoplados, ya que los términos no lineales son despreciables.

Por otra parte, a altas energías la energía potencial es despreciable frente a la energía cinética, pudiendo considerarse entonces que la aceleración de la gravedad es cero y no actúan pares

externos sobre el sistema, por lo que el momento angular se conserva. Al conservarse la energía y las tres componentes del momento angular, a altas energías el péndulo doble tiene dos grados de libertad. Puesto que un sistema con dos grados de libertad no puede ser caótico, el péndulo doble a altas energías no puede mostrar tampoco este comportamiento [25].

Para investigar el comportamiento del péndulo doble a energías intermedias es necesario utilizar técnicas numéricas, ya que las ecuaciones son analíticamente intratables.

A energías intermedias las secciones de Poincaré [24] muestran que el péndulo doble es un sistema caótico (Figura 5.5.1), lo que quiere decir que, si bien las mismas condiciones iniciales siempre darán lugar a la misma evolución temporal del sistema, diferencias muy pequeñas en éstas se traducen en grandes diferencias en las trayectorias que describe el sistema en el espacio de fases.

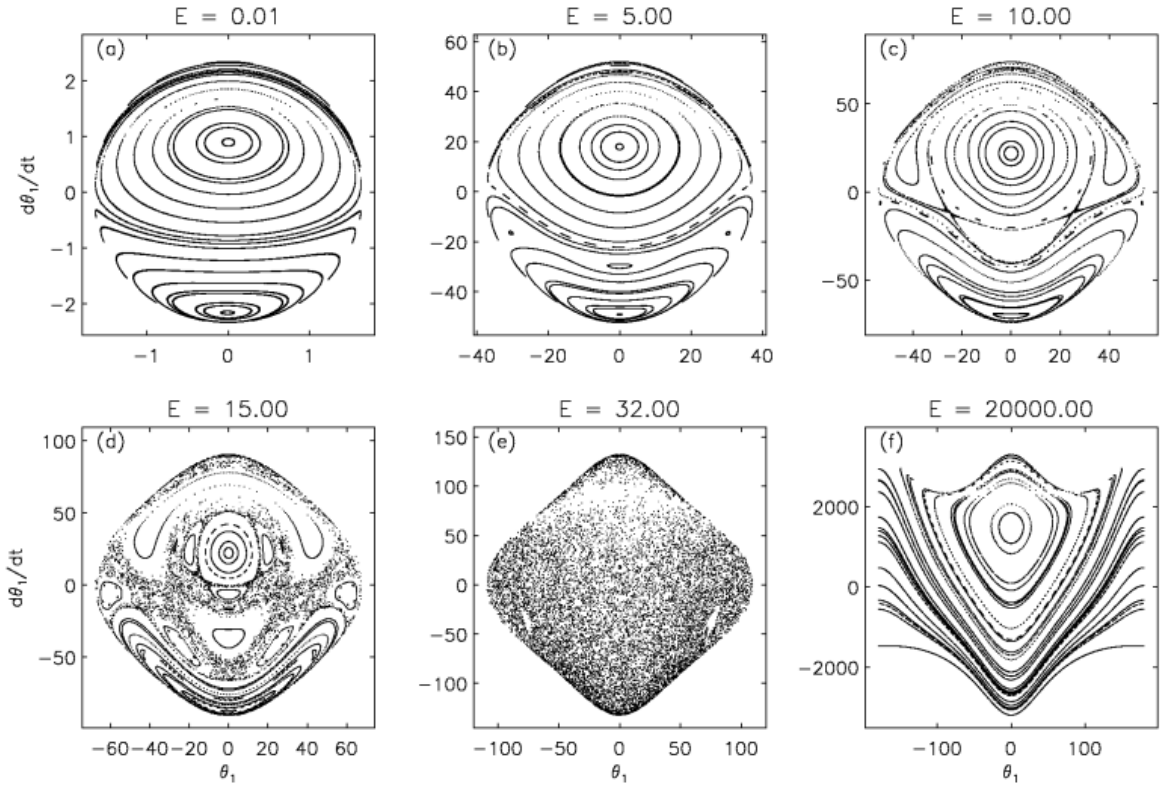


Figura 5.1.1: Secciones de Poincaré del péndulo doble en función de la energía. Crédito: Rafat, Wheatland, Bedding

Se asumirá que la evolución del péndulo doble a energías intermedias es ergódica, en el sentido de que las trayectorias en el espacio de las fases pasarán arbitrariamente cerca de cualquier punto que sea compatible con su energía total. Asimismo, se asumirá que las perturbaciones en la evolución del péndulo doble controlado, ocasionadas por el sistema control, serán pequeñas una vez ése oscila con la energía objetivo, comportándose así como un péndulo doble ideal.

Puesto que la noción de energía intermedia no está bien definida, puede darse el caso de que en algunas configuraciones la energía total de que dispone el péndulo para alcanzar la configuración arriba-arriba pueda considerarse grande o pequeña, con lo que no el péndulo entonces no mostraría un comportamiento caótico y las trayectorias de su evolución en el espacio de las fases no serían densas en él.

5.1.2 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4

Teniendo en cuenta estas consideraciones, generalizaremos al péndulo doble invertido rotacional el método de control de la energía desarrollado en el epígrafe 3.1.1 para aportar al péndulo la energía de referencia.

Considerando la aproximación de momento de inercia del brazo grande y velocidad angular del brazo pequeña se tiene que la ecuación diferencial que describe el movimiento del brazo se desacopla de las ecuaciones que rigen el movimiento del péndulo doble (modelo de dimensión 4).

Despreciando las fuerzas de fricción y los pares perturbadores, la ecuación del movimiento del brazo viene dada en este caso por (epígrafe 4.5.4):

$$\left(m_0 l_0^2 + J_{0zz}\right)\ddot{\theta}_0 = \tau_{m0}$$

y las ecuaciones del movimiento del péndulo son:

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_{1zz} & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & m_2 l_2^2 + J_{2zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) \\ m_2 l_2 g \operatorname{sen}\left(\theta_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right) \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right) \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \end{bmatrix} u\ ,\ u = \ddot{\theta}_0$$

Recordemos que la filosofía del control basado en la energía es aportar al péndulo la energía correspondiente a una configuración determinada, de forma que en su evolución eventualmente alcance esta configuración. Para esto tomamos como candidata a función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\left(E - E_r\right)^2$$

donde E_r es la energía de referencia objetivo, que para la configuración de equilibrio totalmente levantado toma el valor E_r=0.

La derivada temporal de V es:

$$\dot{V} = \left(E - E_r\right)\dot{E}$$

La derivada con respecto al tiempo de la energía la podemos calcular mediante la siguiente expresión, teniendo en cuenta que hemos despreciado los términos de disipación viscosa:

$$\dot{E} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\tau} = -\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right) u$$

Si definimos la ley de control

$$u = k\left(E - E_r\right)\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right) \qquad (5.1.1)$$

con k una constante positiva, se tendrá:

$$\dot{E} = -k\left(E - E_r\right)\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right)^2$$

y por lo tanto:

$$\dot{V} = -k\left(\left(E - E_r\right)\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right)\right)^2 \leq 0$$

Podemos ver así que V será siempre decreciente, salvo cuando se anule el término $\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2 \neq 0$. Esto sucede, por ejemplo, cuando $\cos\left(\theta_1\right) = 0$ o $\dot{\theta}_1 = 0$, y $\cos\left(\theta_2\right) = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$. No obstante, para $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ y para $\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ el péndulo no puede mantener una posición estacionaria, por lo que terminará alcanzándose el objetivo E=E_r. Cuando la derivada se anula para cualquier otra configuración de variables de estado distinta a las anteriores, necesariamente las velocidades angulares $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ habrán de ser distintas de 0, y por lo tanto el sistema evolucionará y terminará también alcanzándose el objetivo E=E_r..

Nótese que cuando $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ y $\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ simultáneamente el sistema no es controlable en la energía, ya que en este caso los dos elementos del vector de fuerzas generalizadas se anulan.

Asimismo, cuando $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$ simultáneamente, lo que sucede de forma mantenida en el tiempo cuando el péndulo se encuentra en reposo en su posición de equilibrio estable ($\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 0$), el control no actuará y V no decrecerá. Por este motivo, cuando el péndulo se encuentra inicialmente en reposo en su posición de equilibrio estable, es preciso perturbarlo ligeramente para que el control comience a actuar.

Definida así la ley de control u para la aceleración angular del brazo, el par que es necesario aplicar viene dado por la siguiente expresión:

$$\tau_{m0} = k\left(m_0 l_0^2 + J_{0zz}\right)\left(E - E_r\right)\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right) \qquad (5.1.2)$$

Con objeto de que la energía varíe lo más rápidamente posible se propone la siguiente variante, semejante a la contemplada en el epígrafe 3.1.1 (variante 1):

$$u = \text{sat}_{\ddot{\theta}_{0,\max}}\left(k\left(E - E_r\right)\text{sign}\left(\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + \eta\cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right)\right) \qquad (5.1.3)$$

Y para evitar el fenómeno de chattering se puede utilizar la siguiente expresión (variante 2):

$$u = \ddot{\theta}_{0,\max}\text{sign}\left(\left(E - E_r\right)\left(\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + \eta\cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right)\right) \qquad (5.1.3)$$

5.1.3 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4 con compensación de pares de reacción

Reescribimos la primera ecuación del modelo matemático completo del péndulo doble invertido rotacional de la siguiente forma, donde hemos despreciado pares perturbadores y de fricción:

$$\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right.$$
$$\left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\ddot{\theta}_0 = \tau_{m0} - \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1$$
$$- m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 - \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1$$
$$- \left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_2\right) sen\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2$$
$$+ m_2 L_{02} l_2\,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2$$

Si hacemos $\tau_{m0} = \tau_{mu0} + \tau_{mr0}$, con:

$$\tau_{mr0} = \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2$$
$$+ \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1$$
$$+ \left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_2\right) sen\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 - \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2$$
$$- m_2 L_{02} l_2\,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2$$

la ecuación anterior se simplifica a:

$$\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right.$$
$$\left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\ddot{\theta}_0 = \tau_{mu0}$$

Considerando para $u=\ddot{\theta}_0$ la ley de control 5.1.1 obtenida en el epígrafe anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau_{mu0} = k\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right.$$
$$\left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\left(E - E_r\right)$$
$$\cdot\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right)$$

Por lo tanto, el par de control vendrá dado ahora por:

$$\tau_{m0} = k\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right.$$
$$\left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\left(E - E_r\right) \qquad (5.1.4)$$
$$\cdot\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right) + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2$$
$$+ \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1$$
$$+ \left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_2\right) sen\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 - \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2$$
$$- m_2 L_{02} l_2\,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2$$

Se muestran en la siguiente figura los resultados de dos simulaciones del modelo considerando la compensación de los pares de reacción. En la primera simulación se limita el par de control a un valor máximo, mientras que en la segunda no existe limitación :

5.1.4 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4 con compensación de pares de reacción y de fricción viscosa

Si despreciamos los pares perturbadores, pero no los de fricción, la primera ecuación del modelo matemático completo del péndulo doble invertido rotacional toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_1\right)\right.\\&\left.+\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\ddot{\theta}_0 = \tau_{m0} - \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1\\&- m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 - \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_1\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1\right)\text{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1\\&-\left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\text{sen}\left(2\theta_2\right) + 2m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_2\right) sen\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2\\&+ m_2 L_{02} l_2\,\text{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 - \delta_0\dot{\theta}_0\end{aligned}$$

Hacemos ahora $\tau_{m0} = \tau_{mu0} + \tau_{mr0} + \tau_{mf0}$, donde τ_{mr0} viene dado por la expresión obtenida en el epígrafe anterior. El término disipativo del brazo lo compensamos haciendo:

$$\tau_{mf0} = \delta_0\dot{\theta}_0$$

Considerando las definiciones anteriores, cuando el momento de inercia del brazo es grande y su velocidad angular pequeña, las ecuaciones segunda y tercera del modelo, correspondientes al péndulo, se pueden escribir así:

$$\begin{bmatrix} J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ -m_2 L_1 l_2\,\text{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right)\text{sen}\left(\theta_1\right) g \\ m_2 l_2\,\text{sen}\left(\theta_2\right) g\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right) u \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) u\end{bmatrix}$$

La derivada temporal de la energía del péndulo viene dada por la siguiente expresión:

$$\dot{E} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T\left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right) u - \delta_1\dot{\theta}_1 \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) u - \delta_2\dot{\theta}_2\end{bmatrix} =$$
$$-\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right) u - \delta_1\dot{\theta}_1^2 - \delta_2\dot{\theta}_2^2$$

Definimos $u = u_{\text{u}} + u_{\text{f}}$, con

$$u_{\text{f}} = -\frac{\delta_1\dot{\theta}_1^2 + \delta_2\dot{\theta}_2^2}{\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2}$$

expresión válida siempre que el denominador sea distinto de cero.

Con estas definiciones, las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} J_{1zz}+m_1l_1^2+m_2L_1^2 & m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2L_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & J_{2zz}+m_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ -m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} (m_1l_1+m_2L_1)\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,g \\ m_2l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\,g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1)\cos(\theta_1)u_u \\ -m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)u_u \end{bmatrix}$$

Si obviamos las singularidades en u_f, siguiendo el mismo desarrollo que en el epígrafe 5.1.2 llegamos a la siguiente ley de control para u_u:

$$u_u = k\left(E-E_r\right)\left(\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1+m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2\right)$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} u = {} & k\left(E-E_r\right)\left(\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1+m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2\right) \\ & -\frac{\delta_1\dot{\theta}_1^2+\delta_2\dot{\theta}_2^2}{\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1+m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2} \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

De esta manera, si el denominador es distinto de cero, el par de control estará dado por:

$$\begin{aligned} \tau_{m0} = {} & k\left(m_0l_0^2+m_1L_0^2+m_2L_{02}^2+J_{0zz}+J_{1xx}+J_{2xx}+\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\mathrm{sen}^2(\theta_1)\right. \\ & \left.+\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\mathrm{sen}^2(\theta_2)+2m_2L_1l_2\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)\right)\left(\left(E-E_r\right)\right. \\ & \cdot\left(\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1+m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2\right) \\ & \left.-\frac{\delta_1\dot{\theta}_1^2+\delta_2\dot{\theta}_2^2}{\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1+m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2}\right) \\ & +\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1+m_2L_{02}l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 \\ & +\left(\left(m_1l_1^2+m_2L_1^2-J_{1xx}+J_{1yy}\right)\mathrm{sen}(2\theta_1)+2m_2L_1l_2\cos(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \\ & +\left(\left(m_2l_2^2-J_{2xx}+J_{2yy}\right)\mathrm{sen}(2\theta_2)+2m_2L_1l_2\cos(\theta_2)\,sen(\theta_1)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2-\left(m_1L_0l_1+m_2L_{02}L_1\right)\mathrm{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 \\ & -m_2L_{02}l_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2^2+\delta_0\dot{\theta}_0 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

En la práctica el par de control está limitado a un valor máximo, por lo que puede tomarse, cuando el denominador se anula:

$$\tau_{m0} = \pm\left|\tau\right|_{\max}$$

Nótese que, a diferencia del resultado obtenido para *u* en el caso del péndulo rotacional simple (ecuación 3.1.11), ahora *u* presenta discontinuidades esenciales en un número infinito de puntos, lo que da lugar a que en las simulaciones la ley no funcione bien en este caso.

5.1.5 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 4 con compensación de pares de reacción y potencial efectivo

De acuerdo con los resultados del epígrafe 4.5.5, si la aceleración angular del brazo es pequeña, el modelo matemático del péndulo doble invertido rotacional se puede simplificar sustituyendo la energía potencial gravitatoria por una energía potencial efectiva dada por:

$$U_e = -\left(m_1 l_1 + m_2 L_1\right) g\left(\cos\left(\theta_1\right)+1\right) + \frac{1}{4}\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\left(\cos\left(2\theta_1\right)-1\right)\dot{\theta}_0^2$$
$$- m_2 l_2 g\left(\cos\left(\theta_2\right)+1\right) - m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{4}\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\left(\cos\left(2\theta_2\right)-1\right)\dot{\theta}_0^2$$

Teniendo esto en cuenta, las ecuaciones segunda y tercera del modelo se escriben así:

$$\begin{bmatrix} J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) & J_{2zz} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial U_e}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial U_e}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_0 \\ -m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo un desarrollo análogo al de los epígrafes 5.1.2 y 5.1.3, tomando como término de energía $E_e = T + U_e$ y como energía de referencia E_{re} resulta la siguiente expresión para el par de control:

$$\begin{aligned} \tau_{m0} = {} & k\left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_1\right)\right. \\ & \left. + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}^2\left(\theta_2\right) + 2 m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\left(E_e - E_{re}\right) \\ & \cdot\left(\left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2\right) + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\cos\left(\theta_1\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 \\ & + \left(\left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_1\right) + 2 m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \\ & + \left(\left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy}\right)\operatorname{sen}\left(2\theta_2\right) + 2 m_2 L_1 l_2 \cos\left(\theta_2\right) sen\left(\theta_1\right)\right)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 - \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1\right)\operatorname{sen}\left(\theta_1\right)\dot{\theta}_1^2 \\ & - m_2 L_{02} l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Nótese que la energía efectiva de referencia correspondiente a la configuración de péndulo totalmente levantado arriba-arriba es $E_{re} = 0$.

5.1.6 Ley de control de la energía. Modelo de dimensión 6. Pseudogradiente de velocidad

Generalizaremos aquí al péndulo doble rotacional el método propuesto por Gordillo, Acosta y Aracil para el péndulo rotacional simple [21].

Si despreciamos los pares perturbadores y de fricción viscosa, el modelo en espacio de estados del péndulo doble rotacional es (epígrafe 4.3):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_0} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}u\,, \quad u = \tau_{m0}$$

Se propone como función objetivo:

$$V = \frac{1}{2}\left(\left(E - E_r \right)^2 + \eta \left(p_0 - p_{0r} \right)^2 \right) \tag{5.1.9}$$

En ausencia de pares perturbadores y de fricción, el momento conjugado de la coordenada angular del brazo y su derivada temporal vienen dados por (epígrafe 4.2):

$$\begin{aligned} p_0 = & \left(m_0 l_0^2 + m_1 L_0^2 + m_2 L_{02}^2 + J_{0zz} + J_{1xx} + J_{2xx} + \left(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - J_{1xx} + J_{1yy} \right) sen^2\left(\theta_1\right) \right. \\ & + \left(m_2 l_2^2 - J_{2xx} + J_{2yy} \right) sen^2\left(\theta_2\right) + 2 m_2 L_1 l_2 \operatorname{sen}\left(\theta_1\right) \operatorname{sen}\left(\theta_2\right) \Big) \dot{\theta}_0 + \left(m_1 L_0 l_1 + m_2 L_{02} L_1 \right) \cos\left(\theta_1\right) \dot{\theta}_1 \\ & + m_2 L_{02} l_2 \cos\left(\theta_2\right) \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

$$\dot{p}_0 = \tau_{m0}$$

La derivada temporal de la función objetivo V es (epígrafe 3.1.5):

$$\dot{V} = \left(E - E_r \right) \dot{\theta}_0 u + \eta \left(p_0 - p_{0r} \right) u$$

La aplicación del método de Fradkov-Pogromsky en forma finita conduce a la siguiente expresión para la ley de control:

$$u = -k \nabla_u \dot{V} = -k \frac{\partial \dot{V}}{\partial u} = -k \left(\left(E - E_r \right) \dot{\theta}_0 + \eta \left(p_0 - p_{0r} \right) \right) \tag{5.1.10}$$

El estado objetivo es x = [0 π π 0 0 0], y por lo tanto:

$$E_{\mathrm{r}} = 0, \; p_{0\mathrm{r}} = 0$$

Se muestran en la siguiente figura los resultados de la simulación del modelo considerando esta ley de control:

5.1.7 Simulaciones. Análisis de resultados

Se muestran en este apartado los resultados de las simulaciones de las estrategias de control descritas en los epígrafes anteriores.

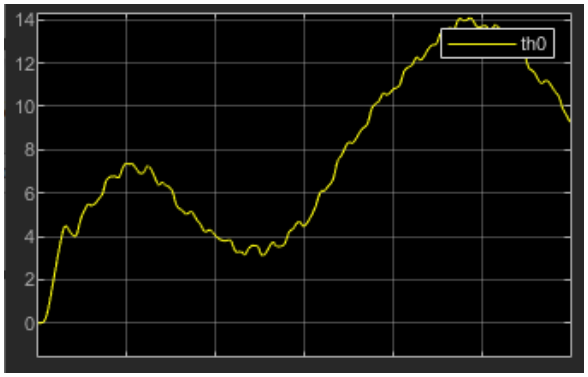
La Figura 5.1.1 corresponde a la simulación de la generalización al péndulo doble de la estrategia de control de la energía del modelo de dimensión 4, ecuaciones 5.1.1 y 5.1.2. Se han tomado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}, θ_{2i}=0,1, $\dot{\theta}_{2i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, k=10 y E_r=0 J. Podemos comprobar en f) que la energía total del péndulo no alcanza su valor objetivo cero, y por lo tanto la energía potencial i) tampoco, lo que indica que el péndulo no se levanta completamente (el origen de la energía potencial se tomó en la posición arriba-arriba, por lo que si se levanta completamente la energía potencial tomará el valor cero). La función de Lyapunov (j) crece en algún intervalo y no converge a cero (debería ser siempre decreciente y converger a cero), debido a la aproximación utilizada en el desarrollo de la ley de control entre las masas del brazo y del péndulo, que solo se cumple de forma aproximada, y a la existencia de términos disipativos. La energía del péndulo no alcanza el valor de referencia E_r=0 y sufre oscilaciones (h). El par de control se mantiene en valores bajos (l).

En la Figura 5.1.2 se muestran los resultados de la simulación de la generalización al péndulo doble de la estrategia de control de la energía, con compensación de los pares de reacción, ecuación 5.1.4. Se han tomado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}, θ_{2i}=0,1, $\dot{\theta}_{2i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, k=10 y E_r=0 J. La función de Lyapunov (h) sigue creciendo en algún intervalo y no converge a cero (debería de hacerlo), la energía total del péndulo no se mantiene constante y no alcanza el valor de referencia Er=0, debido a la existencia de fricción y a que el modelo utilizado para el desarrollo de esta ley de control es una aproximación del modelo real (f), el péndulo no se levanta completamente, pero sí un poco más que antes (puesto que el origen de la energía potencial se tomó con el péndulo totalmente levantado, cuanto más se acerque el valor de la energía potencial a cero tanto más levantado estará, y estará completamente levantado cuando la energía potencial alcance el valor de referencia cero) (g) y la velocidad angular del brazo es muy pequeña una vez se alcanza el objetivo (b). El control no se hace ahora tan pequeño como antes una vez se alcanza el objetivo, ya que debe compensar los pares de reacción asociados al movimiento del péndulo (k, l).

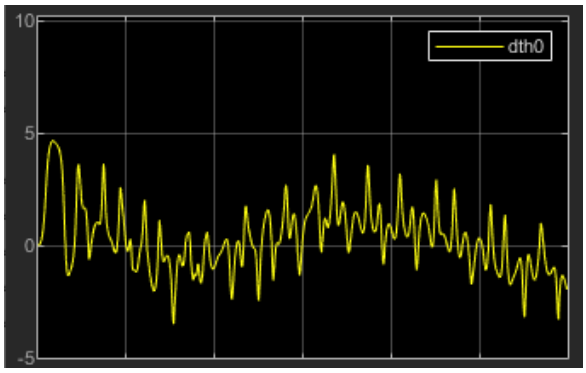
En la Figura 5.1.3 se muestran los resultados de la simulación de la generalización al péndulo doble de la estrategia de control de la energía, con la variante del signo, ecuación 5.1.3, y con compensación de los pares de reacción. Se han tomado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}, θ_{2i}=0,1, $\dot{\theta}_{2i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, k=10 y E_r=0 J. El comportamiento de la función de Lyapunov (h) es ahora peor que antes, ya que esta variante no ha sido obtenida a partir de esta función. No obstante, la energía total del péndulo se mantiene en su valor con pocas oscilaciones (h), y el péndulo llega a levantarse casi completamente en un par de ocasiones, ya que su energía potencial se acerca mucho a 0 (i). El voltaje de control entra a menudo en saturación (k) pero es una ley muy efectiva, por se utilizará más adelante para lograr la conmutación al control estabilizador LQR.

En la Figura 5.1.4 se muestra el resultado de la simulación para las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0,1, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}, considerando la estrategia del pseudogradiente de velocidad de Fradkov. El tiempo de simulación es de 90 s, k=3, η=10, E_{re}=0 J y p_{0re}=0 kg·m^2s^{-1}. Puede comprobarse que la elección de los parámetros k y η es crítica para la velocidad de convergencia al objetivo. En este caso, tras 90 s la amplitud de las oscilaciones es todavía

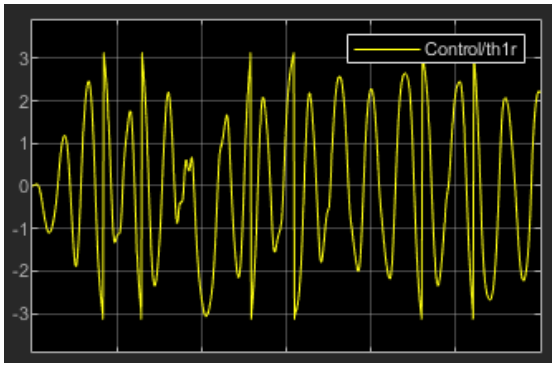
muy pequeña. Se puede comprobar que la velocidad angular del brazo se mantiene en valores cercanos a cero, que la función objetivo es monótona decreciente, que el péndulo se levanta completamente y que, una vez el péndulo alcanza el objetivo, la acción de control se hace prácticamente cero.



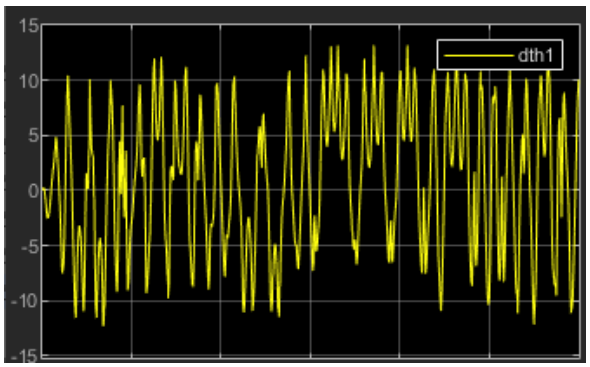
a) Ángulo θ_0



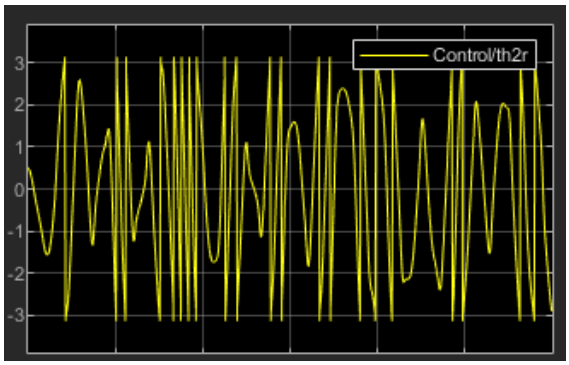
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



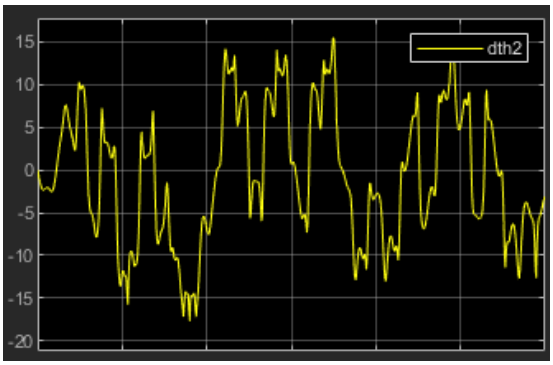
c) Ángulo θ_1



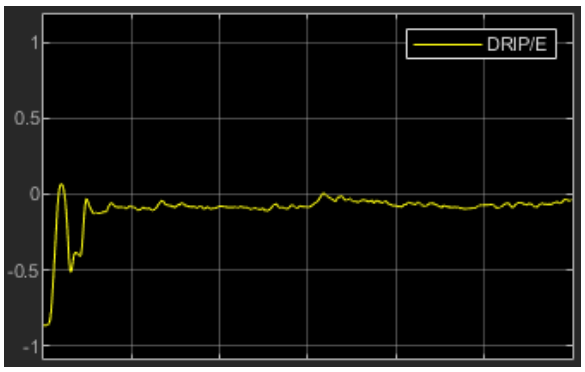
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



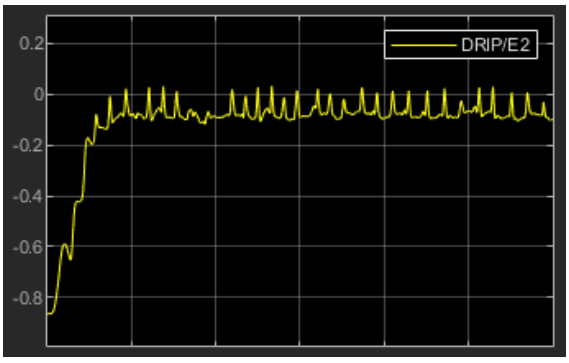
e) Ángulo θ_2



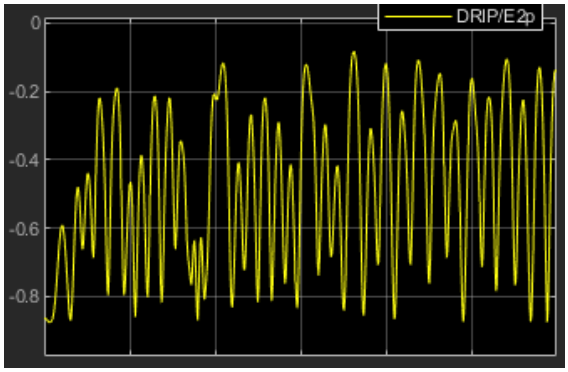
f) Velocidad angular $\dot{\theta}_2$



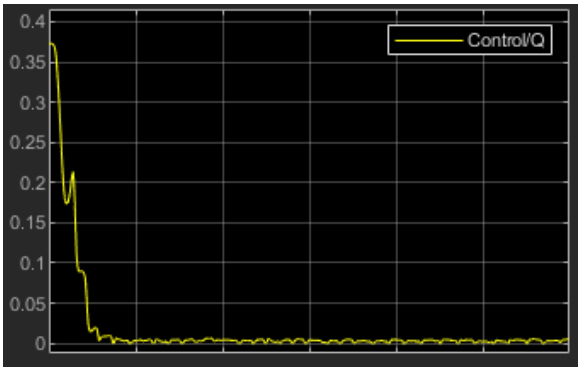
g) Energía total del sistema



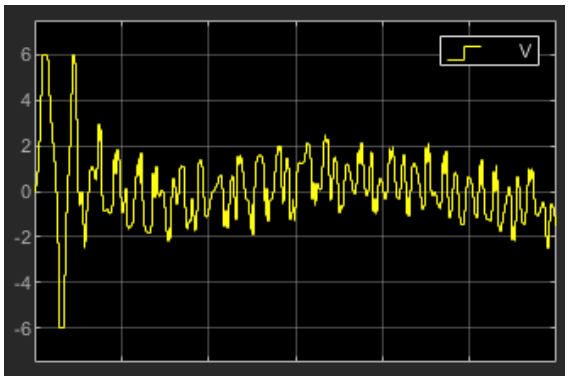
h) Energía total del péndulo



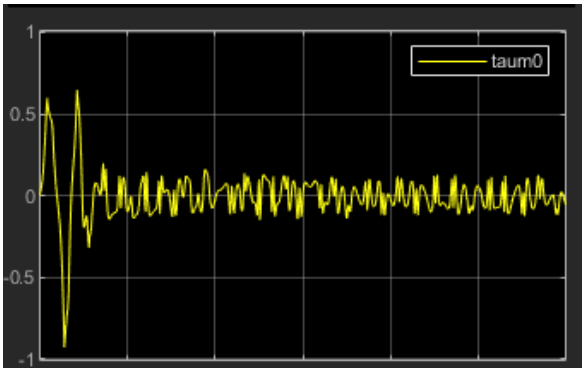
i) Energía potencial del péndulo



j) Función de Lyapunov V

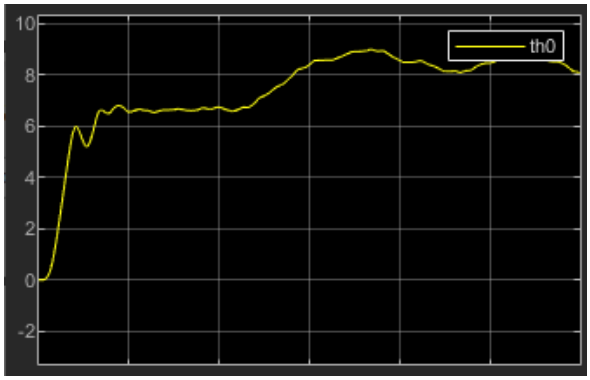


k) Función de Lyapunov V

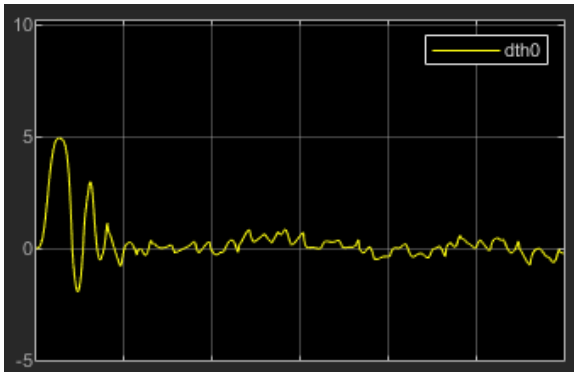


l) Par de control τ_{m0}

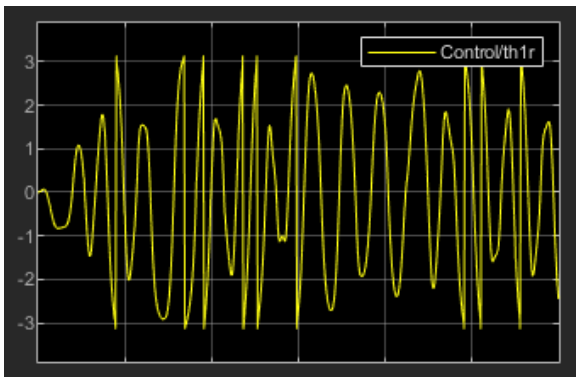
Figura 5.1.1: Simulación de la generalización al péndulo doble de la ley de control de la energía



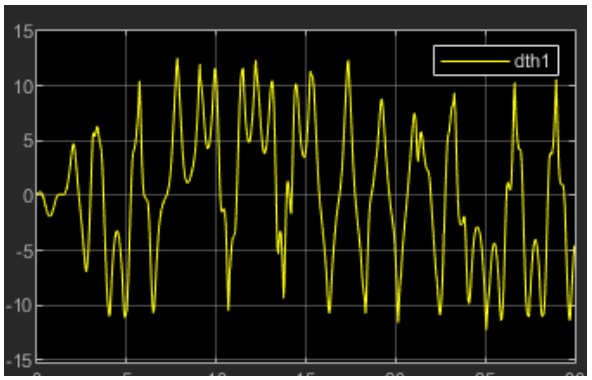
a) Ángulo θ_0



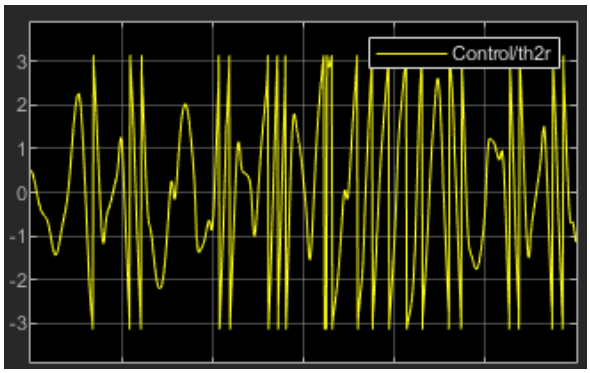
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



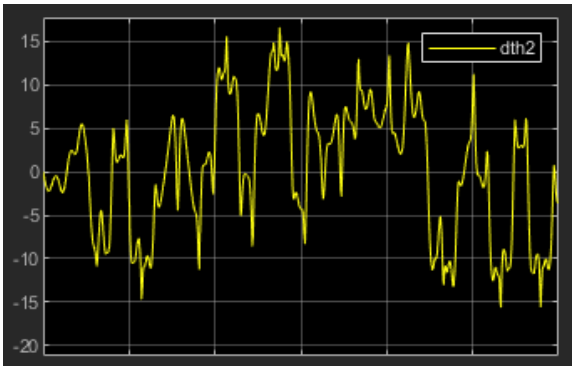
c) Ángulo θ_1



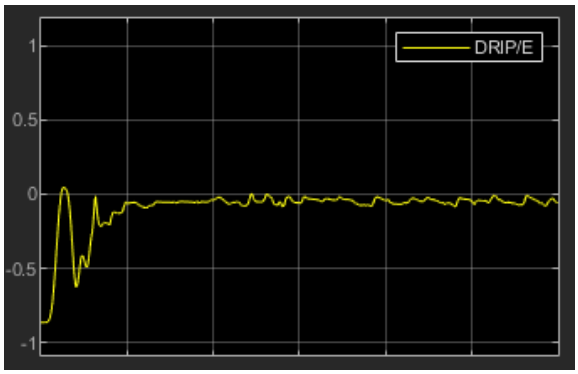
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



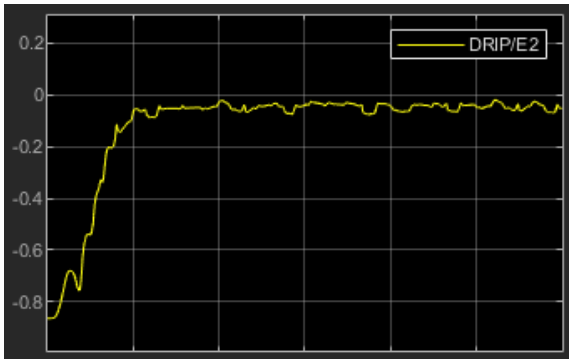
e) Ángulo θ_2



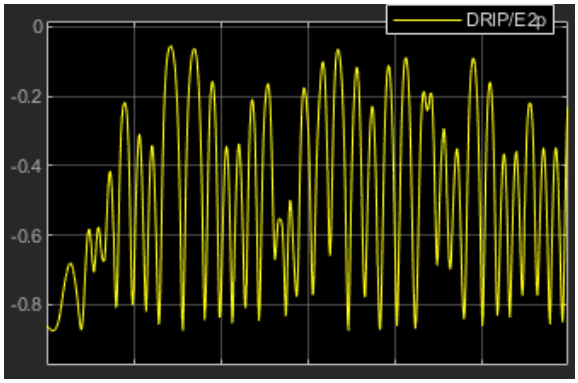
f) Velocidad angular $\dot{\theta}_2$



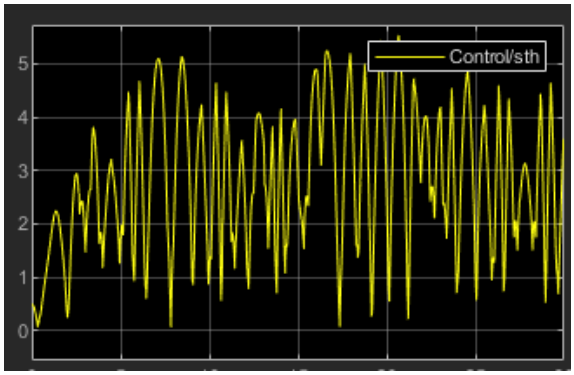
g) Energía total del sistema



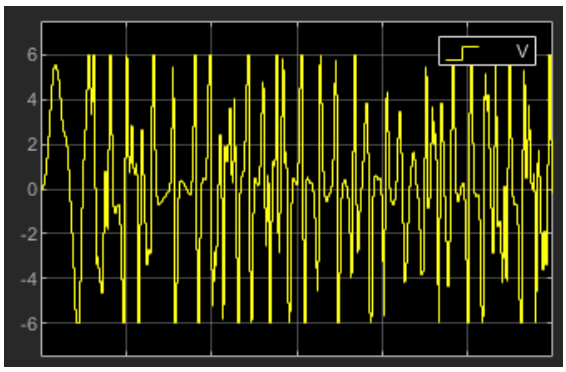
h) Energía total del péndulo



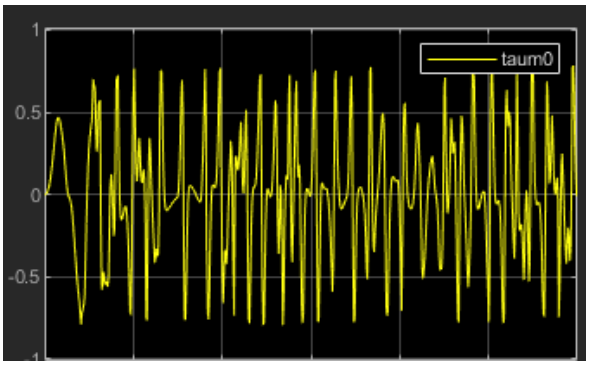
i) Energía potencial del péndulo



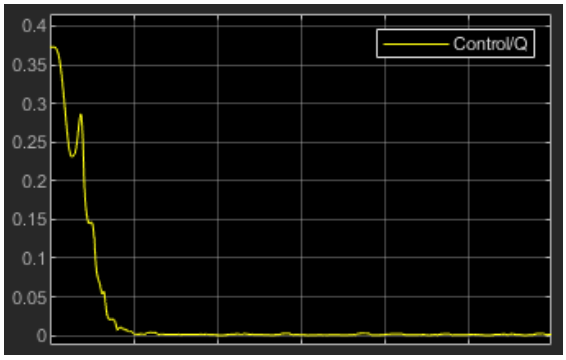
j) Función de Lyapunov V



k) Voltaje de control V

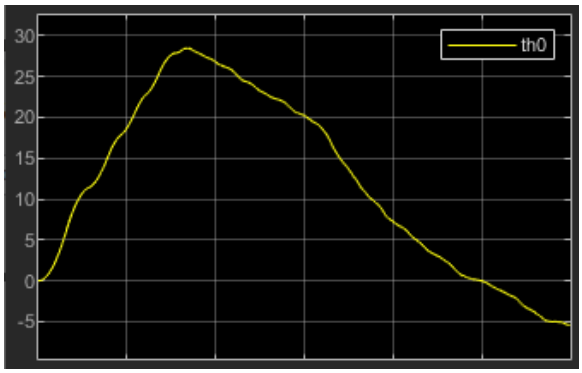


l) Par de control τ_{m0}

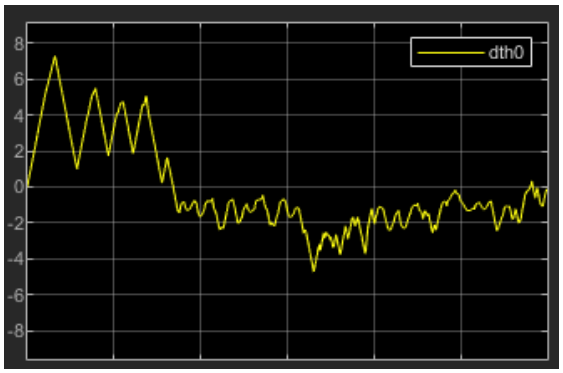


l) Función de Lyapunov V

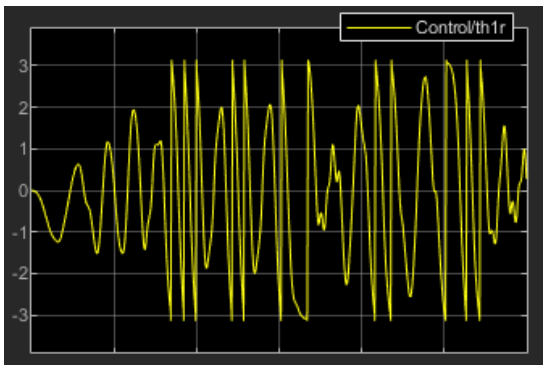
Figura 5.1.2: Simulación de la generalización al péndulo doble de la ley de control de la energía, con compensación de los pares de reacción



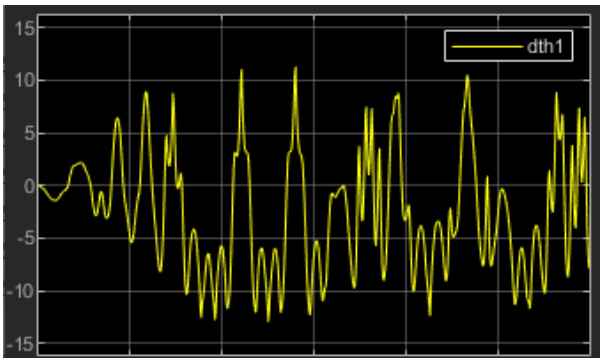
a) Ángulo θ_0



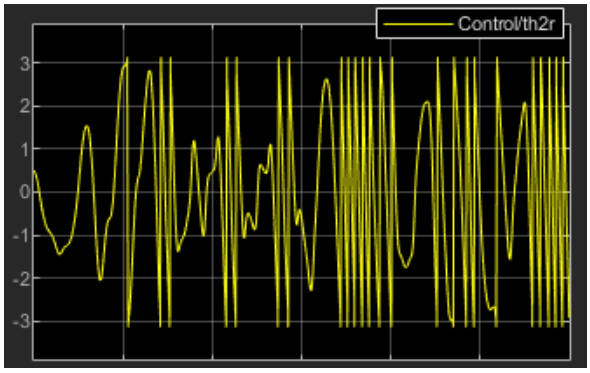
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



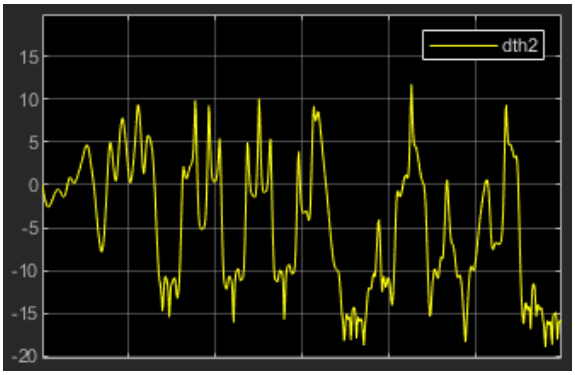
c) Ángulo θ_1



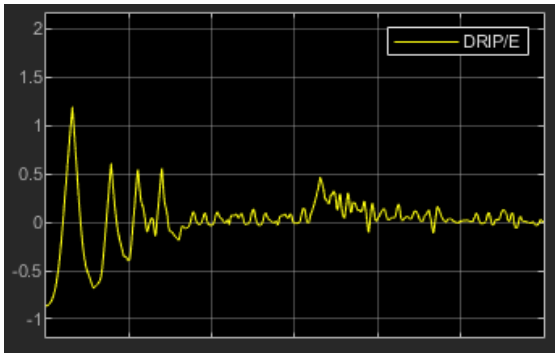
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



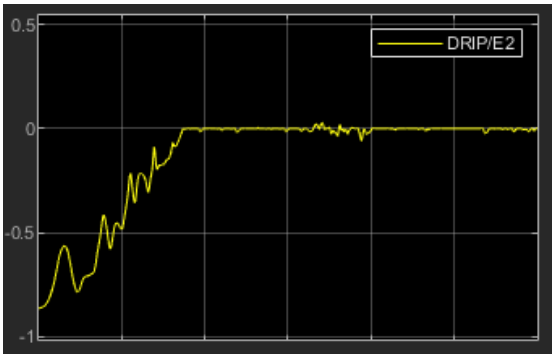
e) Ángulo θ_2



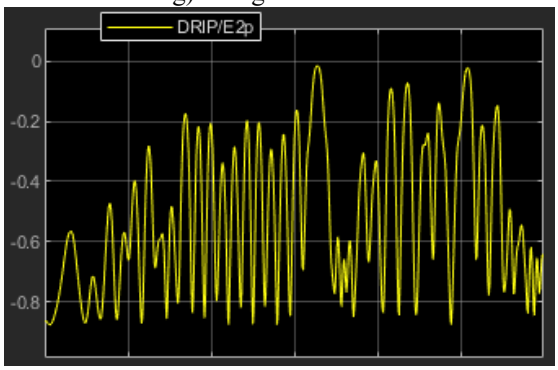
f) Velocidad angular $\dot{\theta}_2$



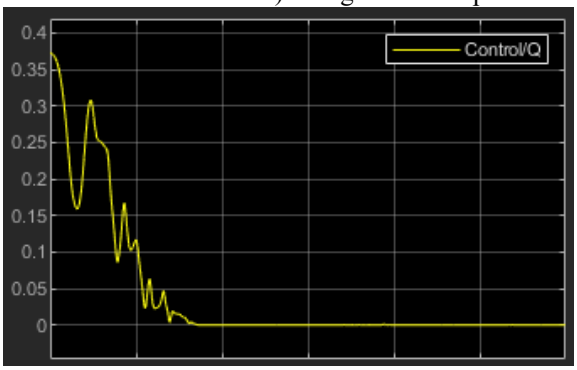
g) Energía total del sistema



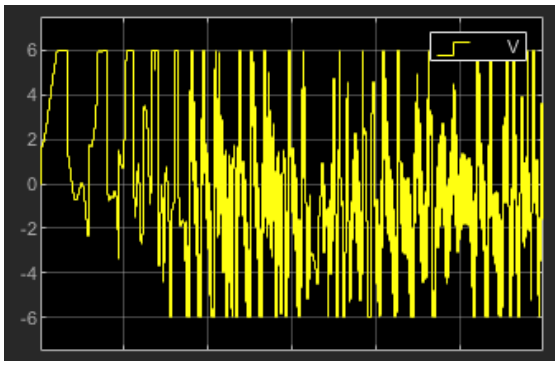
h) Energía total del péndulo



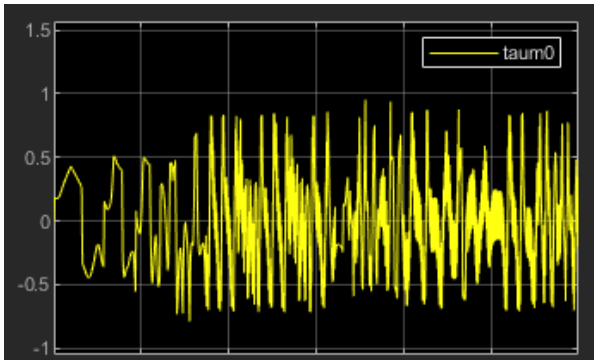
i) Energía potencial del péndulo



j) Función de Lyapunov V

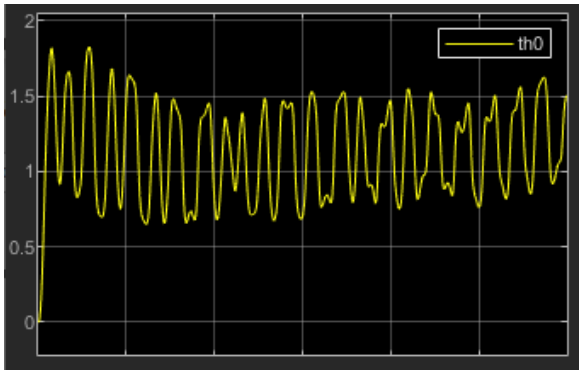


k) Voltaje de control V_s

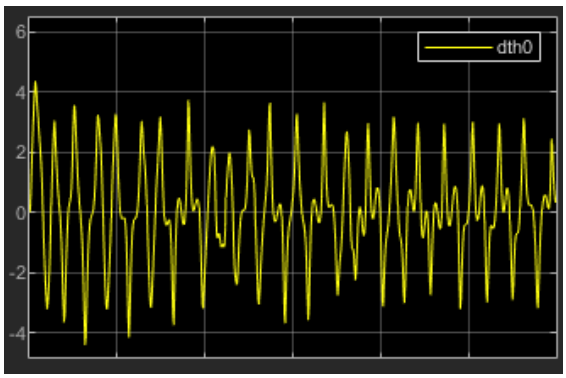


l) Par de control τ_{m0}

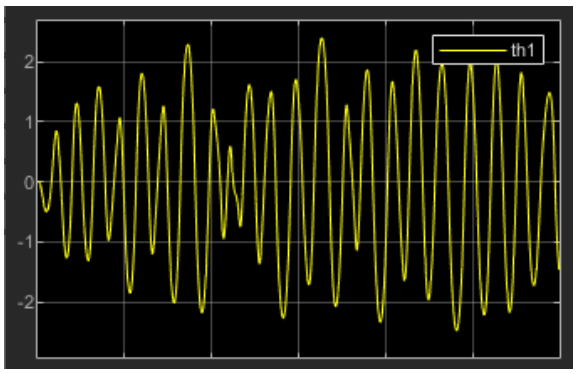
Figura 5.1.3: Simulación de la generalización al péndulo doble de la ley de control de la energía en su variante con signo, con compensación de los pares de reacción



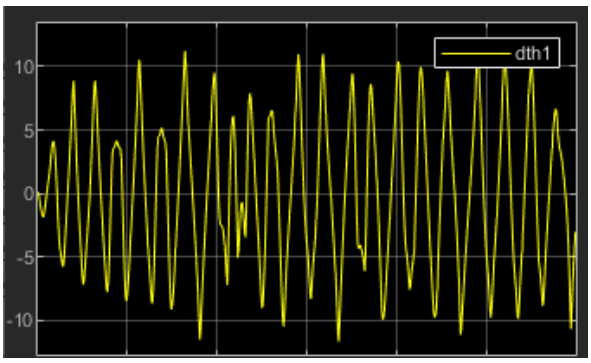
a) Ángulo θ_0



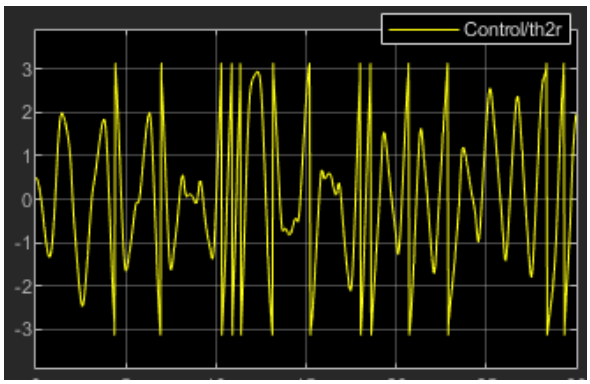
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



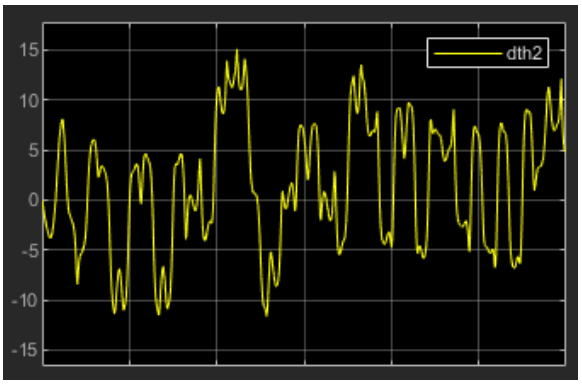
c) Ángulo θ_1



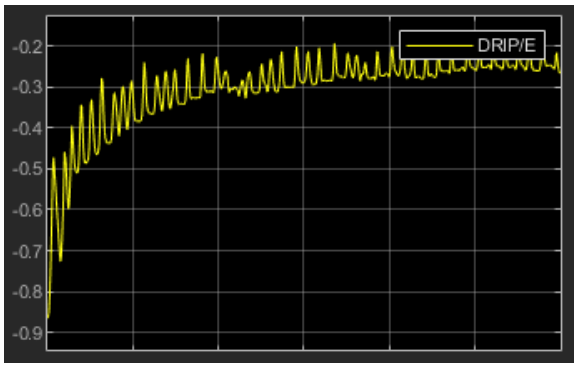
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



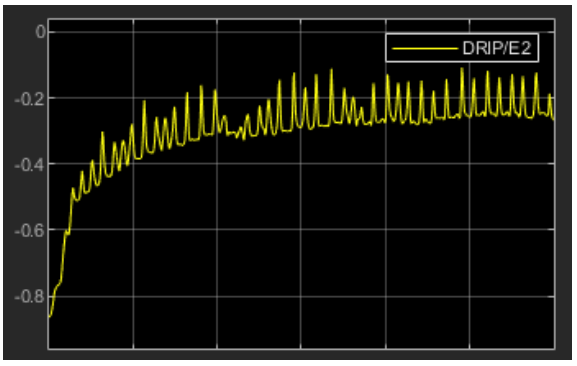
e) Ángulo θ_2



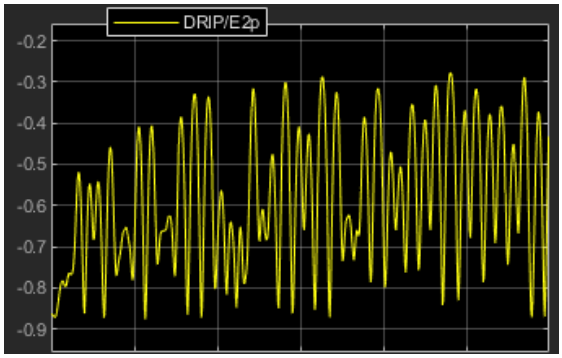
f) Velocidad angular $\dot{\theta}_2$



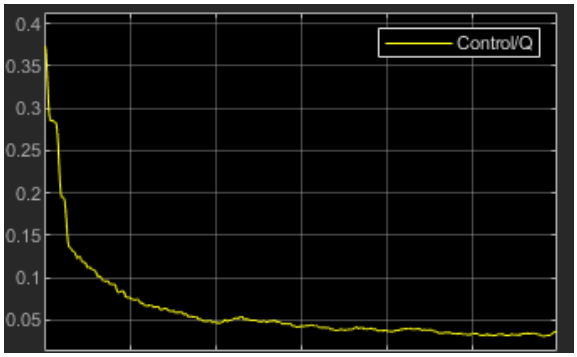
g) Energía total del sistema



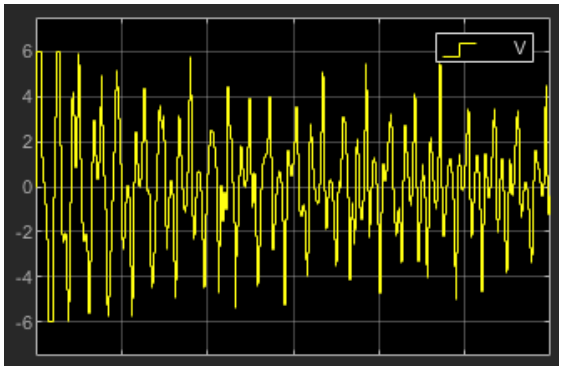
h) Energía total del péndulo



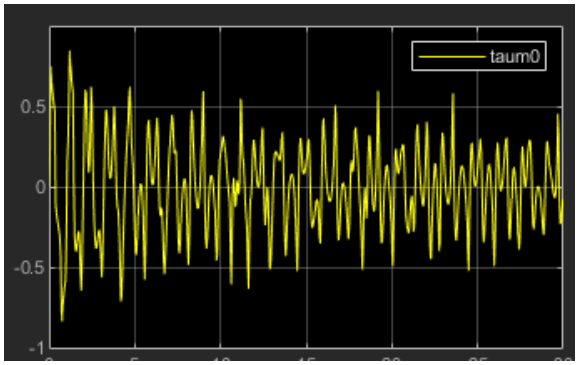
i) Energía potencial del péndulo



j) Función de Lyapunov V



k) Voltaje de control V_s



l) Par de control τ_{m0}

Figura 5.1.4: Simulación de la generalización al péndulo doble de la ley del pseudogradiente de velocidad de Fradkov

5.2 Estabilización del péndulo. Control LQR

Para la estabilización del péndulo se utilizará un control LQR. Siguiendo los pasos del epígrafe 3.2 se determinará un vector de ganancias **K** de manera que la señal de control dada por

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

sea óptima.

Se consideran importantes los ángulos del péndulo, así como sus velocidades angulares, y en menor medida la del brazo. La posición del brazo no es importante para la estabilización, asignándose un valor pequeño al término correspondiente de la matriz **Q**. Se otorgará mayor relevancia al comportamiento de las variables que al esfuerzo de control, por lo que no se tomará un valor elevado para *R*.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix}, \quad R=1$$

5.2.1 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio inestable arriba-arriba

Sustituyendo los valores de los parámetros del modelo en las ecuaciones 4.5.5, de 4.5.6 obtenemos las matrices $\mathbf{A}_{uu}$ y $\mathbf{B}_{uu}$ del sistema linealizado en torno a su punto de equilibrio inestable arriba-arriba:

$$\mathbf{A}_{uu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 6,4421 & 0,3757 & -0,0028 & -0,0105 & 0,0048 \\ 0 & 37,1701 & -6,1594 & -0,0020 & -0,0790 & 0,0474 \\ 0 & -18,6446 & 23,7301 & -0,0003 & 0,0927 & -0,0769 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{uu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 27,7273 \\ 20,4545 \\ 3,4503 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación de Riccati para **P**, se obtiene el siguiente vector de ganancias:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,0010 & 1,9657 & -2,5613 & 0,0116 & 0,1753 & -0,5219 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Para determinar si el sistema es de estado completamente controlable, calculamos el rango de la matriz de controlabilidad y comprobamos que sea igual al orden del sistema:

$$\text{rang}\,([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\ \mathbf{A}^3\mathbf{B}\ \mathbf{A}^4\mathbf{B}\ \mathbf{A}^5\mathbf{B}]) = 6$$

Al calcular el rango de la matriz de controlabilidad para las matrices **A** y **B** del sistema linealizado en torno a su punto de equilibrio inestable arriba-arriba se comprueba que se cumple esta condición:

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0,0028 & 0 & 0,0139 & -0,0019 & 0.4874 \\ 0 & 0,0020 & -0,0002 & 0,0739 & -0,0139 & 2.9342 \\ 0 & 0,0003 & 0,0002 & -0,0300 & 0,0158 & -2.0921 \\ 0,0028 & 0 & 0,0139 & -0,0019 & 0,4874 & -0,1298 \\ 0,0020 & -0.0002 & 0,0739 & -0,0139 & 2,9342 & -0,9459 \\ 0,0003 & 0.0002 & -0,0300 & 0,0158 & -2,0921 & 1,0669 \end{bmatrix}\right) = 6$$

5.2.2 Diseño del control LQR de estabilización en el punto de equilibrio estable abajo-abajo

De la misma manera que para el péndulo simple, resulta de interés el diseño de un control LQR para el péndulo doble en su posición de equilibrio estable, de manera que en el proceso de bajada, una vez cerca del punto de equilibrio, el péndulo se estabilice rápidamente y el brazo se sitúe en una posición de referencia. Las matrices $\mathbf{A}_{dd}$ y $\mathbf{B}_{dd}$ del sistema linealizado en torno a su punto de equilibrio estable abajo-abajo se obtienen de las ecuaciones 4.5.3 y 4.5.4:

$$\mathbf{A}_{\text{dd}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 6,4421 & 0,3757 & -0,0028 & 0,0105 & -0,0048 \\ 0 & -37,1701 & 6,1594 & 0,0020 & -0,0790 & 0,0474 \\ 0 & 18,6446 & -23,7301 & 0,0003 & 0,0927 & -0,0769 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{\text{dd}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 27,7273 \\ -20,4545 \\ -3,4503 \end{bmatrix}$$

Ahora el vector de ganancias es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,0000 & -702,1419 & 221,6021 & 11,2948 & -71,6798 & -92,7354 \end{bmatrix} \qquad (3.2.4)$$

Comprobamos que el rango de la matriz de controlabilidad es igual al orden del sistema para asegurarnos de que es controlable:

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0,0028 & 0 & -0,0139 & 0,0019 & 0.4874 \\ 0 & -0,0020 & 0,0002 & 0,0739 & -0,0139 & -2.9342 \\ 0 & -0,0003 & -0,0002 & -0,0300 & 0,0158 & 2.0921 \\ 0,0028 & 0 & -0,0139 & 0,0019 & 0,4874 & -0,1298 \\ -0,0020 & 0.0002 & 0,0739 & -0,0139 & -2,9342 & 0,9459 \\ -0,0003 & -0.0002 & -0,0300 & 0,0158 & 2,0921 & -1,0669 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \right) = 6$$

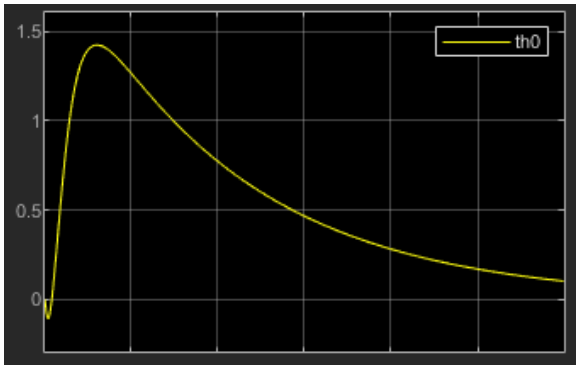
5.2.3 Simulaciones. Análisis de resultados

Se simulará en este apartado la estabilización del péndulo doble en sus posiciones de equilibrio inestable y estable utilizando los controles LQR diseñados.

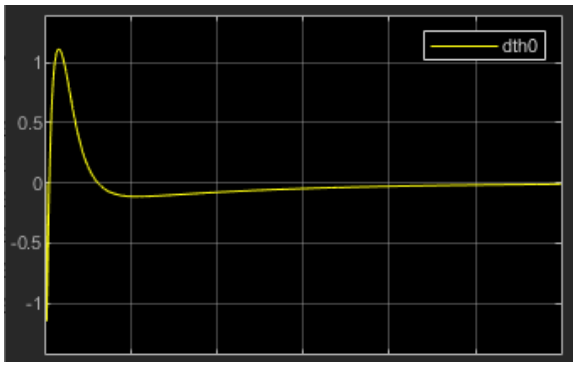
En la Figura 5.2.1 se muestran los resultados de la simulación del control LQR para la estabilización del péndulo en torno a su punto de equilibrio inestable arriba-arriba. Se han considerado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=π+0,02, $\dot{\theta}_{1i}$=-0 s^{-1}, θ_{2i}=π+0,02, $\dot{\theta}_{2i}$=-0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, el vector de ganancias es $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,0010 & 1,9657 & -2,5613 & 0,0116 & 0,1753 & -0,5219 \end{bmatrix} \cdot 10^3$ y el estado objetivo $\mathbf{x}_o = [0\ \pi\ 0\ 0]^T$. Los ángulos del péndulo se estabilizan rápidamente en θ_1=π, θ_2=π (c, e), la señal de control y las velocidades angulares $\dot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ alcanzan rápidamente valores pequeños (b, d, f) y el ángulo del brazo converge lentamente a su valor objetivo θ_0=0 (a). De acuerdo con los resultados de las simulaciones realizadas, para que el control LQR diseñado sea capaz de estabilizar el péndulo el valor del ángulo θ_1 deberá estar en el intervalo [2,9, 3.4].

En la Figura 5.2.2 se representan los resultados de la simulación del control LQR para la estabilización del péndulo en torno a su punto de equilibrio estable. Se han considerado las condiciones iniciales θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0,1, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}, θ_{2i}=-0,1, $\dot{\theta}_{2i}$=0 s^{-1}. El tiempo de simulación es de 30 s, el vector de ganancias es $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,0000 & -702,1419 & 221,6021 & 11,2948 & -71,6798 & -92,7354 \end{bmatrix}$ y el estado objetivo $\mathbf{x}_o$ = $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. Nótese que los ángulos del péndulo se estabilizan rápidamente en θ_1=0,

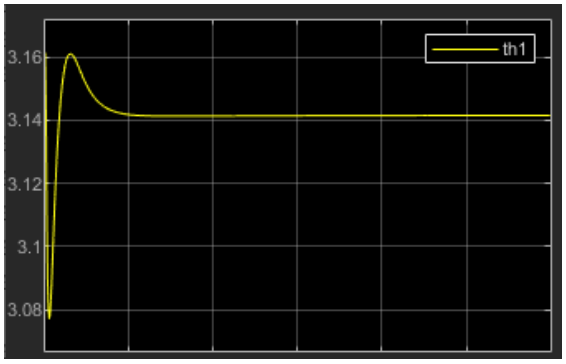
θ_2=0 (c, e), la señal de control y las velocidades angulares $\dot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ alcanzan rápidamente valores pequeños (b, d, f) y el ángulo del brazo converge lentamente a su valor objetivo θ_0=0 (a).



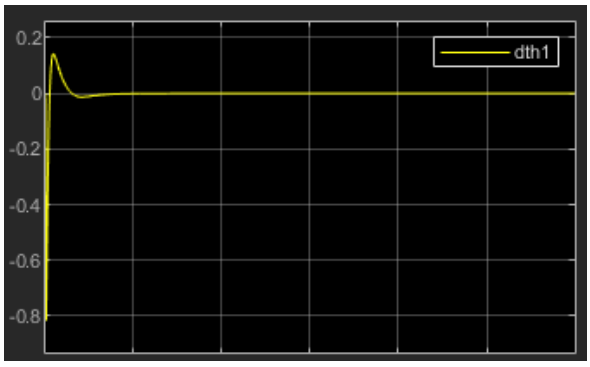
a) Ángulo θ_0



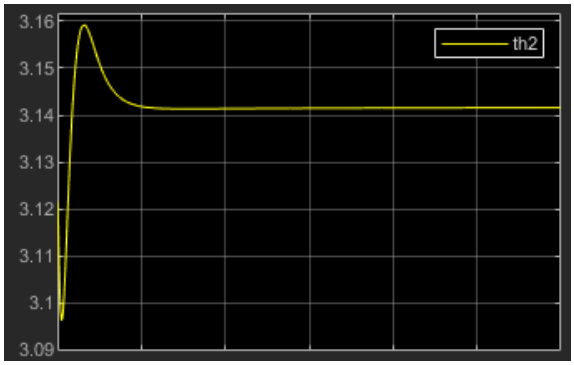
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



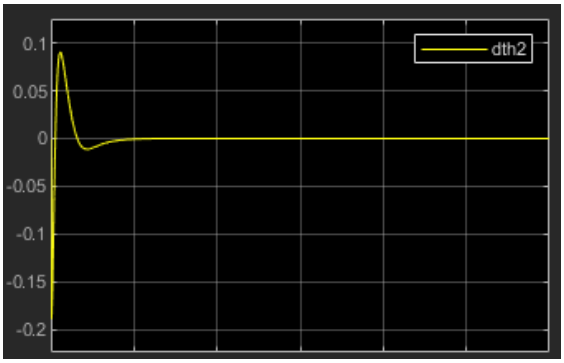
c) Ángulo θ_1



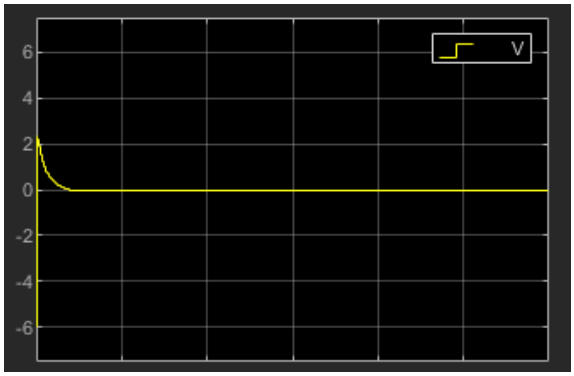
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



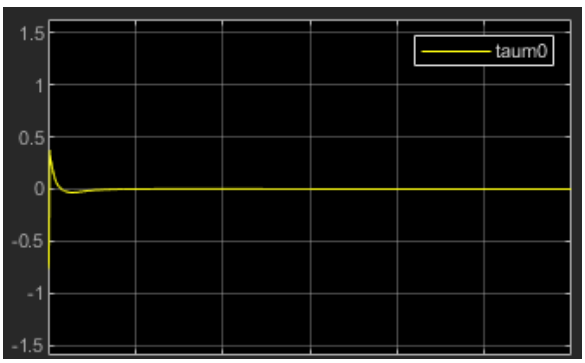
e) Ángulo θ_2



f) Velocidad angular $\dot{\theta}_2$

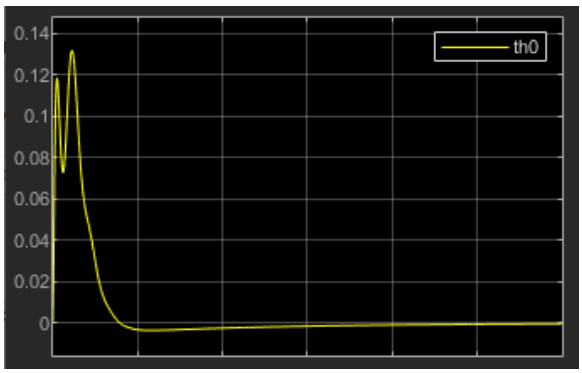


g) Voltaje de control V_s

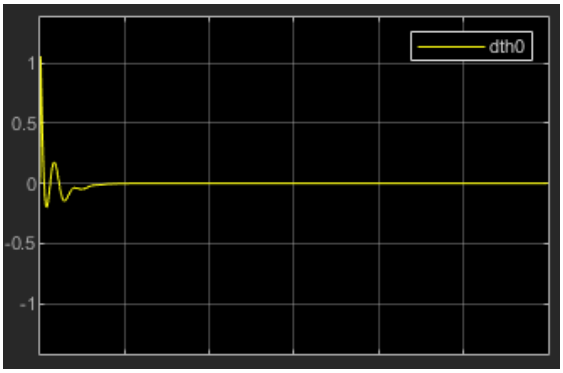


h) Par de control τ_{m0}

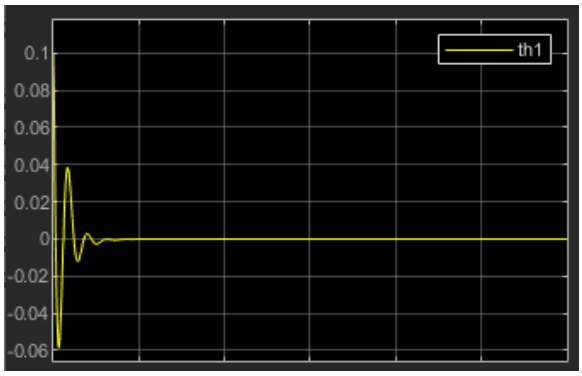
Figura 5.2.1: Control LQR para la estabilización del péndulo doble en su posición de equilibrio inestable



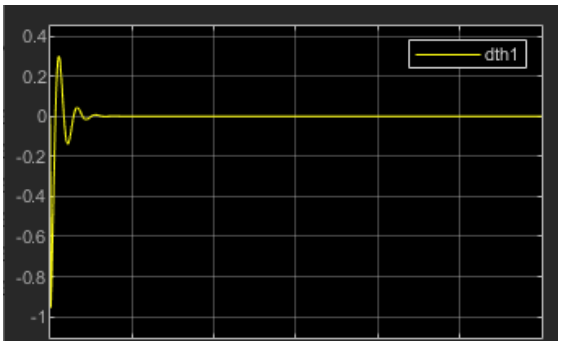
a) Ángulo θ_0



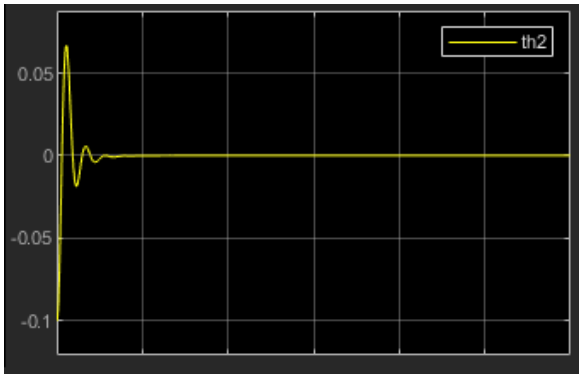
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



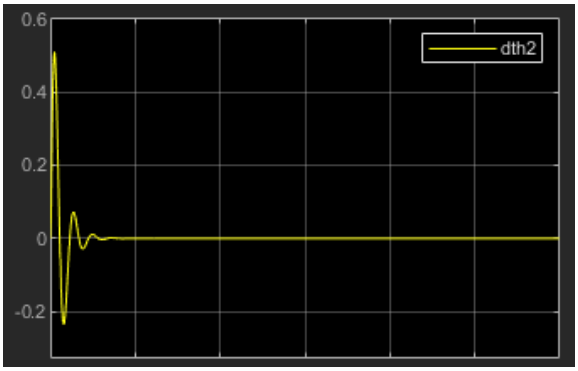
c) Ángulo θ_1



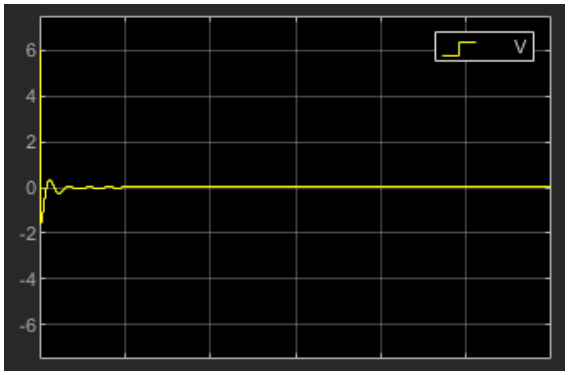
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



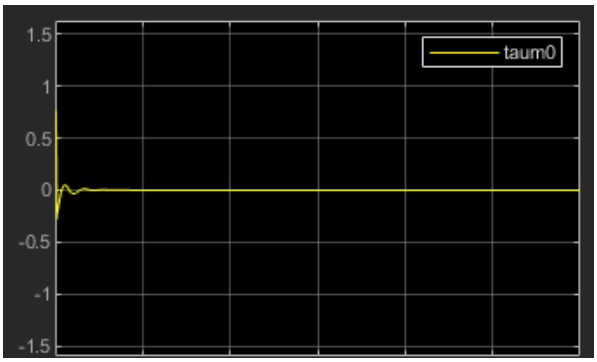
e) Ángulo θ_2



f) Velocidad angular $\dot{\theta}_2$



g) Voltaje de control V_s



h) Par de control τ_{m0}

Figura 5.2.2: Control LQR para la estabilización del péndulo doble en su posición de equilibrio estable

5.3 Conmutación entre los modos de control levantamiento-estabilización

Vimos en el epígrafe 3.3 que la función sigmoide es adecuada para alternar entre los modos de control de levantamiento y estabilización. Siguiendo los mismos pasos que allí tomaremos como criterio para la transición entre los dos modos de control la energía potencial del péndulo.

La diferencia de energía potencial entre la condición correspondiente a péndulo abajo (θ_1=0, θ_2=0) y la condición de péndulo levantado (θ_1=π, θ_2=π) es ahora:

$$\Delta U = U(0,0) - U(\pi,\pi) = -2(m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_2 l_2) g$$

La transición tendrá lugar para un valor de energía potencial dado por $U_t = r_t \Delta U$, con $0 < r_t < 1$. El factor r_t representa la fracción de la energía potencial que le falta al péndulo para alcanzar la configuración correspondiente a la posición arriba-arriba, y recordemos que, dado que el control le suministra al sistema la energía justa para alcanzar esta configuración, cuando la energía potencial del péndulo se acerca a esta energía de referencia la energía cinética rotacional del péndulo será pequeña, y por lo tanto también serán pequeñas las velocidades angulares.

La expresión para la función sigmoide es:

$$\sigma(U) = \frac{1}{1 + e^{-k(U - U_t)}}$$

y de la misma manera que en el epígrafe 3.3:

$$u = (1-\sigma)\, u_{su} + \sigma\, u_s$$

Si consideramos los ángulos θ_1 y θ_2 del péndulo en lugar de la energía potencial se puede utilizar la función:

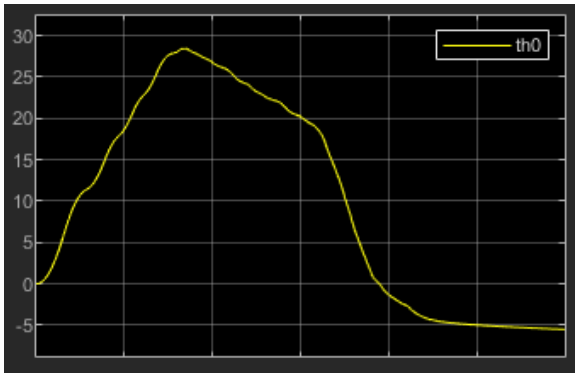
$$\sigma(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\left(1 + e^{-k(|\theta_1| - \theta_{1t})}\right)\left(1 + e^{-k(|\theta_2| - \theta_{2t})}\right)}$$

Los ángulos que intervienen en esta expresión han de estar reducidos al intervalo [-π, π).

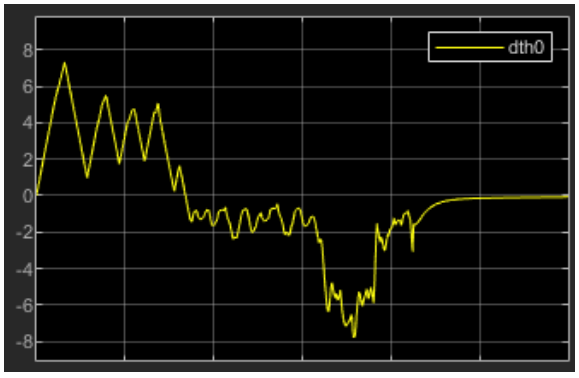
5.3.1 Simulaciones. Análisis de resultados

Se comparan aquí los resultados del levantamiento, conmutación y estabilización en torno al punto de equilibrio inestable del péndulo doble. Las condiciones iniciales son θ_{0i}=0, $\dot{\theta}_{0i}$=0 s^{-1}, θ_{1i}=0, $\dot{\theta}_{1i}$=0 s^{-1}, θ_{2i}=0,1, $\dot{\theta}_{2i}$=0 s^{-1} y el tiempo de simulación 30 s. Se utiliza una estrategia de control lineal LQR para la estabilización del péndulo en torno a su posición de equilibrio inestable (epígrafe 5.2.1), con estado objetivo $\mathbf{x}_o = [0\ \pi\ \pi\ 0\ 0\ 0]^T$, vector de ganancias $\mathbf{K} = [0{,}0010\quad 1{,}9657\quad -2{,}5613\quad 0{,}0116\quad 0{,}1753\quad -0{,}5219]\cdot 10^3$, y la función sigmoide para la conmutación entre levantamiento y estabilización, con k_s=10^4 y r_t=0,10.

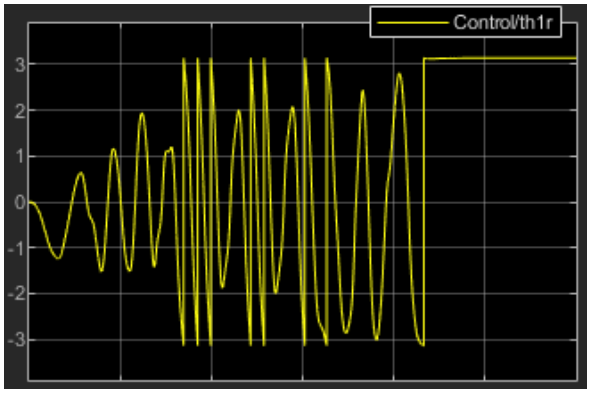
En la Figura 5.3.1 se muestran los resultados de la simulación utilizando para el levantamiento del péndulo una estrategia de control no lineal basado en la energía, en su variante con signo (ecuación 5.1.3), con k=10 y E_r=0 J, con compensación de pares de reacción. En l) vemos que la conmutación tiene lugar en aproximadamente 21 s, estabilizándose rápidamente los péndulos en los ángulos $\theta_1=\pi$, $\theta_2=\pi$ (c, e). La velocidad del brazo y la de los péndulos convergen rápidamente a cero (b, d, e), así como las energías (e, f, g). En cuanto se completa la estabilización el voltaje de control y el par actuador toman valores muy pequeños (k, l). El brazo del péndulo se posiciona lentamente en el ángulo de referencia (a).



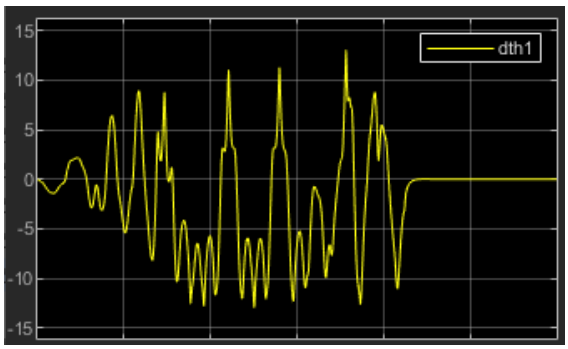
a) Ángulo θ_0



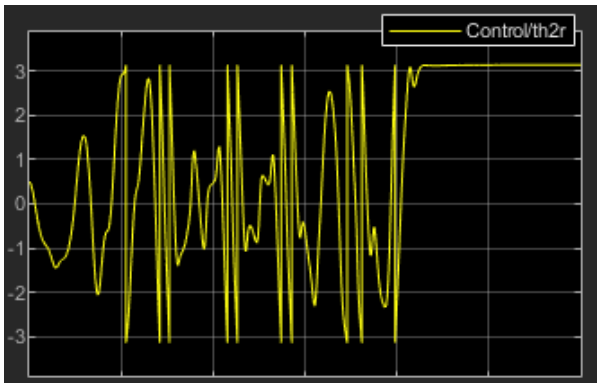
b) Velocidad angular $\dot{\theta}_0$



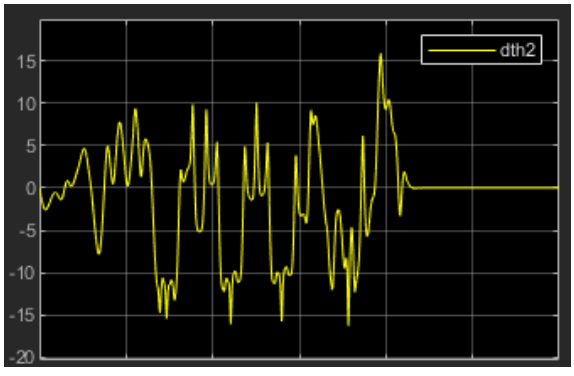
c) Ángulo θ_1



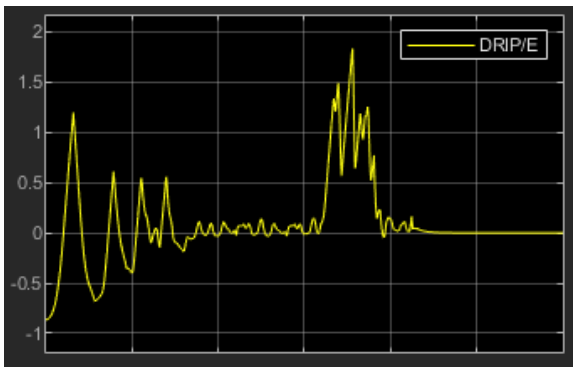
d) Velocidad angular $\dot{\theta}_1$



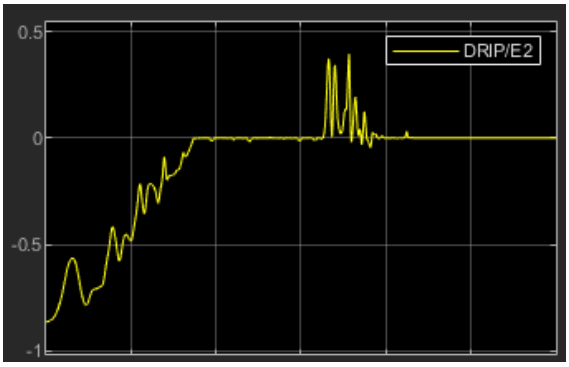
e) Ángulo θ_2



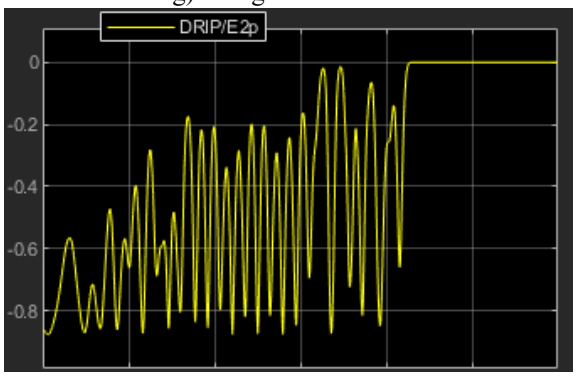
f) Velocidad angular $\dot{\theta}_2$



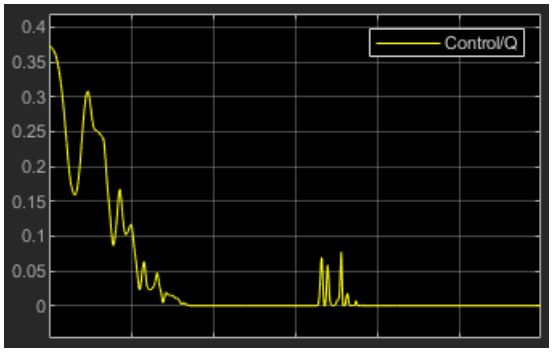
g) Energía total del sistema



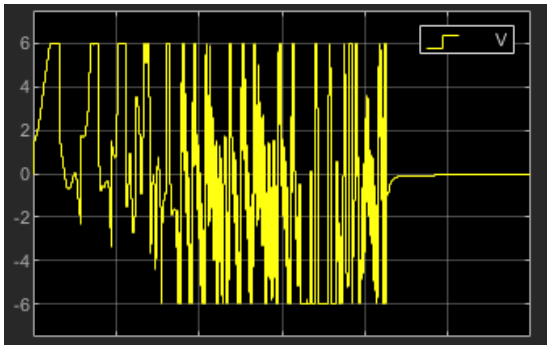
h) Energía total del péndulo



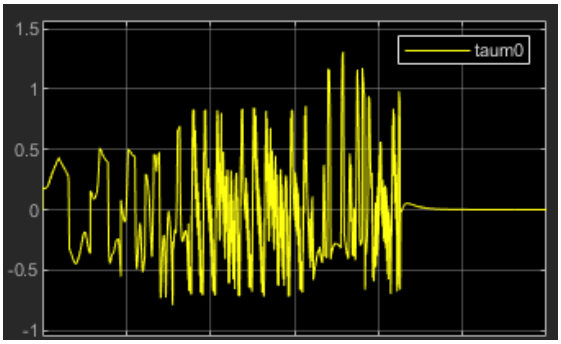
i) Energía potencial del péndulo



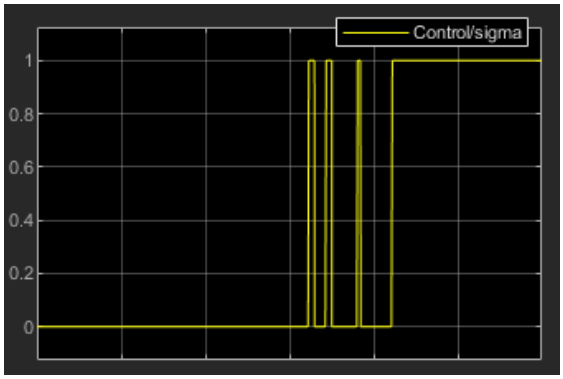
j) Función de Lyapunov V



k) Voltaje de control V_s



l) Par de control τ_{m0}



l) Función de conmutación σ

Figura 5.3.1: Levantamiento del péndulo doble y conmutación a control estabilizador LQR. Ley de control de la energía en su variante con signo, con compensación de pares de reacción

Conclusiones

Se comenzó este trabajo desarrollando un modelo matemático del péndulo invertido rotacional, comparándose las expresiones obtenidas con las del modelo obtenido por Cazzolato y Prime para corroborar su validez.

Se desarrolló, partiendo del modelo obtenido para el péndulo invertido rotacional, un modelo matemático del péndulo doble invertido rotacional. El modelo conserva la energía y en el límite concuerda con otros modelos conocidos, como el de péndulo doble sobre carro.

Se determinaron los puntos de equilibrio de los sistemas desarrollados y se linealizaron los modelos en torno a todos sus puntos de equilibrio estable e inestable.

Tomando en consideración estas linealizaciones se diseñaron sistemas de control óptimo LQR para la estabilización de los péndulos simple y doble en sus configuraciones de péndulo totalmente levantado y en reposo. Los controles dieron buenos resultados, llegando incluso a estabilizar al péndulo doble en la conmutación desde la ley de control de levantamiento.

Se estudiaron los puntos críticos de los dos sistemas y se obtuvieron expresiones para calcularlos, comprobándose su validez mediante simulaciones.

Se obtuvieron las ecuaciones de los modelos de dimensión 2 y de dimensión 4 del péndulo simple y doble, respectivamente.

Se obtuvieron las ecuaciones de los modelos del péndulo invertido sobre carro simple y doble como caso particular de sus homólogos rotacionales, y se estudiaron otras aproximaciones.

Se revisaron estrategias de control no lineal para el levantamiento/bajada del péndulo y se estudió la compensación de los pares de reacción y de fricción viscosa. En general se obtienen buenos resultados compensando los pares de reacción. La compensación de los términos disipativos sólo da buenos resultados en el péndulo simple.

Se generalizaron al péndulo doble invertido rotacional las estrategias de control de la energía de Åström y Furuta, basada en el método directo de Lyapunov, y la de Gordillo, Acosta y Aracil, basada en el método del pseudogradiente de velocidad de Fradkov. Se encuentra que la ley de Gordillo, Acosta y Aracil para el péndulo rotacional simple es muy sensible a la elección de los parámetros, no lográndose que la respuesta del control sea adecuada para el modelo utilizado. La generalización al péndulo doble dio buenos resultados.

Se desarrolló un método basado en la energía para la conmutación entre las leyes de control de levantamiento/bajada y estabilización, con buenos resultados. Este método simplifica la conmutación especialmente en el caso del péndulo doble.

Trabajo futuro

Se propone la generalización de la ley de control de la energía a una cadena de n péndulos.

La generalización al péndulo doble invertido rotacional de la estrategia de control basada en el método del pseudogradiente de velocidad de Fradkov requiere para su justificación matemática un modelo explícito en el espacio de estados. En este sentido, puede resultar de interés desarrollar explícitamente las ecuaciones de Hamilton para obtener dicho modelo.

Resulta también de interés estudiar en qué casos el aporte a un péndulo doble de la energía requerida para que alcance la posición de equilibrio inestable arriba-arriba no se traduce en una consecución del objetivo.

Referencias

[1] Lundberg, Kent. (2009). History of Inverted-Pendulum Systems. IFAC Proceedings Volumes. 42. 131-135. 10.3182/20091021-3-JP-2009.00025.

[2] J. Schaffer, and R. Cannon (1996). On the Control of Unstable Mechanical Systems. Automatic and Remote Control III: Proceedings of the Third Congress of the International Federation of Automatic Control.

[3] Boubaker, Olfa. (2013). The Inverted Pendulum Benchmark in Nonlinear Control Theory: A Survey. International Journal of Advanced Robotic Systems. 10. 233-242. 10.5772/55058.

[4] Magdy, Mohamed & Abdo, Mohamed & By, Supervised & Mostafa, Abdallah & Marhomy, El & Abd, Mahmoud & Attia, Allah. (2018). Stability and Control of an Inverted Pendulum Motion. 10.13140/RG.2.2.25938.61129.

[5] C. L. Wilson, P. Capo-Lugo (2011). Robust Control Algorithm for a Two Cart System and an Inverted Pendulum. NASA Marshall Space Flight Center, pp. 1–14, 2011. Document ID 20110015819

[6] Cazzolato, Ben & Prime, Zebb. (2011). On the Dynamics of the Furuta Pendulum. Hindawi Publishing Corporation Journal of Control Science and Engineering. 8. 10.1155/2011/528341.

[7] Gordillo, Francisco & José, Aracil. (2010). El Péndulo Invertido: un Desafío para el Control No Lineal. Revista iberoamericana de automatica e informatica industrial (RIAI), ISSN 1697-7912, Vol. 2, Nº. 2, 2005, pags. 8-19. 2. 10.4995/riai.v2i2.10501.

[8] Åström, K.J. & Furuta, K.. (2000). Swinging Up a Pendulum by Energy Control. Automatica. 36. 287-295. 10.1016/S0005-1098(99)00140-5.

[9] Åström, K. J., Furuta, K., Iwashiro, M., & Hoshino, T. (1995). Energy based strategies for swinging up a double pendulum. IFAC Proceedings Volumes, Volume 32, Issue 2, 1999, Pages 6450-6455 10.1016/S1474-6670(17)57101-3

[10] T. Henmi, Mingcong Deng and A. Inoue, "Swing-up control of a serial double inverted pendulum," *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Boston, MA, USA, 2004, pp. 3992-3997 vol.5, doi: 10.23919/ACC.2004.1383932.

[11] Yao, J.-S & Hou, X.-L & Xu, X.-H. (2004). Study on swing-up control of double inverted pendulum. 19. 1183-1186.

[12] Zhang, Yongli & Li, Hongxing & Miao, Z.-H & Cheng, H.-F. (2011). Swing-up of double inverted pendulum based on variable gain LQR technique. Xitong Gongcheng Lilun yu Shijian/System Engineering Theory and Practice. 31. 1341-1355.

[13] Samvrit Srinivas (2018). SWING-UP AND STABILIZATION OF THE DOUBLE FURUTA PENDULUM. Master of Science Thesis submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park. 10.13016/M2TH8BR28

[14] Goldstein, Herbert; Poole, C. P.; Safko, J. L. (2001). Classical Mechanics (3rd ed.). Addison-Wesley. 978-0201657029

[15] Spong, M. W., & Vidyasagar, M. (1991). Robot dynamics and control. New York: Wiley. ISBN: 978-0-471-61243-8

[16] Marsden, J. E. (1992). Lectures on mechanics. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0-521-42844-0

[17] Ogata, K.. (2010). Modern Control Engineering (5th ed). Pearson. Isbn 978-0136156734

[18] R. C. *Hilborn*, "*Chaos* and Nonlinear Dynamics" (2nd ed.) Oxford University Press, New York, 2001. Isbn 978-0198507239

[19] Slotine, J. E., Li, W. (1991). Applied nonlinear control. Prentice-Hall. Isbn 9780130408907

[20] Kaplan, W. (2002). Advanced calculus. Pearson isbn 978-0201799378

[21] Gordillo, Francisco & Acosta, J. Á & Aracil, Javier. (2003). A new swing-up law for the Furuta pendulum. International Journal of Control - INT J CONTR. 76. 10.1080/0020717031000116506.

[22] A. L. Fradkov, I. A. Makarov, A. S. Shiriaev and O. P. Tomchina, "Control of oscillations in Hamiltonian systems," *1997 European Control Conference (ECC)*, Brussels, Belgium, 1997, pp. 1243-1248, doi: 10.23919/ECC.1997.7082270.

[23] Quanser Inc., "SRV02 Rotary Servo User Manual," 2011

[24] Rafat, Mohammad & Wheatland, M. & Bedding, Timothy. (2008). Dynamics of a double pendulum with distributed mass. American Journal of Physics. 77. 10.1119/1.3052072.

[25] K. Furuta, M. Yamakita and S. Kobayashi, "Swing up control of inverted pendulum," *Proceedings IECON '91: 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, Kobe, Japan, 1991, pp. 2193-2198 vol.3, doi: 10.1109/IECON.1991.239008.

[26] P. H. Richter and H. -J. Scholz, "Chaos in classical mechanics: The double pendulum," in Stochastic Phenomena and Chaotic Behavior in Complex Systems, edited by P. Schuster (Springer, Berlin, Heidelberg, 1984), pp. 86–97. 10.1007/978-3-642-69591-9_9

[27] Introduction to control of oscillations and chaos, by Alexander L. Fradkov and Alexander Yu. Pogromsky, World Scientific Pub. Co., Singapore, 1998, 391pp+xiv, ISBN 981-02-3069-9. International Journal of Robust and Nonlinear Control - INT J ROBUST NONLINEAR CONTR. 11. 1182-1184. 10.1002/rnc.609.