

Algo de lo que hacemos: El Método de Diferencias Finitas Generalizadas

JUAN JOSÉ BENITO, FRANCISCO UREÑA¹

Dpto. de Construcción y Fabricación
ETS Ingenieros Industriales UNED

INTRODUCCIÓN

A raíz de la invitación para escribir algo en la revista de la Escuela y tras detenerme a pensar *sobre qué hacerlo*, dado el contexto de la publicación, pensé que debía escribir sobre *“algo de lo que hago”* en ella. Inmediatamente surgió la idea de centrarme en los métodos sin malla, tema al que he dedicado mucho tiempo de estudio durante los últimos años y que tiene indudable interés desde un punto de vista objetivo.

Por otra parte, casi desde sus inicios, se fueron incorporando a esta línea de investigación personas que, con gran entusiasmo, capacidad de trabajo, imaginación y eficacia fueron elevando el interés de los resultados científicos alcanzados, y además, cimentando lo que ya sin duda es un auténtico grupo de casi más que ami-

gos.¹ De ahí el matiz introducido sobre la idea original en el título definitivo del artículo.

El paso siguiente era *“como”* hablar del Método de Diferencias Finitas Generalizadas (que dentro de los métodos sin malla es en el que hemos centrado más nuestra atención) en el ámbito de una revista con un carácter no tan especializado como el de las publicaciones en que habitualmente nos desenvolvemos, pero con lectores que sin duda poseen una sólida formación básica. Decidí entonces no utilizar ninguna expresión matemática y tratar de explicar los conceptos de la forma más sencilla posible, lo que sin duda implica cierta pérdida de precisión en el

¹ El grupo está formado inicialmente por J.J. Benito, F. Ureña y L. Gavete, incorporándose a lo largo del tiempo E. Salete, M. Ureña, A. García, A. Casasús, L.V. Casas, A. Muelas, R. Galindo, A. Buceta, A.M. Vargas

INFORMACIÓN DEL GRUPO

Ha generado más de 38 artículos sobre GFDM publicados en revistas especializadas, en los seis últimos años. Presentamos aquí los publicados en 2020-2021 (resto publicaciones al final del artículo)

- *Convergence and numerical solution of a model for tumor growth.*(2021)
- *Solving a reaction-diffusion system with chemotaxis and non-local terms using Generalized Finite Difference Method. Study of the convergence.* (2021)
- *Convergence and numerical simulations of prey-predator interactions via a meshless method.* (2021).
- *Solving Monje-Ampère equation in 2D and 3D by Generalized Finite Difference Method. Engineering Analysis with Boundary Elements.* (2021)
- *An effective numeric method for different formulations of the elastic wave propagation problem in isotropic medium.* (2021).
- *Complex Ginzburg-Landau Equation with Generalized Finite Differences.* (2020)
- *On the convergence of the generalized finite difference method for solving a chemotaxis system with no chemical diffusion.* (2020).
- *Solving a fully parabolic chemotaxis system with periodic asymptotic behavior using Generalized Finite Differences Method.* (2020)
- *Solving a chemotaxis-haptotaxis system in 2D using Generalized Finite Differences.* (2020)
- *On the numerical solution to a parabolic-elliptic system with chemotactic and periodic terms using Generalized Finite Differences.* (2020)
- *Solving the Telegraph equation in 2-D and 3-D using generalized finite difference method (GFDM).* (2020).
- *Non-linear Fokker-Planck equation solved with generalized finite differences in 2D and 3D.* (2020).
- *Solving second order non-linear hyperbolic pde's using generalized finite difference method (GFDM).* (2020)

contenido, pero que permite transmitir con más facilidad una idea de conjunto sobre el tema.

Los métodos sin malla, como herramienta para la búsqueda de soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, surgen como una evolución natural de los métodos ya completamente consolidados que utilizan una malla, en un esfuerzo por eludir el inconveniente asociado a este hecho, utilizando una discretización y aproximación nodal, pero sin abandonar los elementos clave de muchas de sus ideas fundamentales.

En un breve espacio de tiempo, sobre esta idea básica de eludir una malla, han surgido una gran cantidad de propuestas metodológicas que con mayor o menor originalidad han tratado de acuñar denominaciones que de alguna manera enmarañan la realización de un análisis general, puesto que muchas veces es preciso referirse para su catalogación a detalles muy específicos. No obstante, se ha tratado aquí de transmitir una visión de conjunto agrupándolos mediante alguna de sus características más esenciales.

La idea de este trabajo es presentar los orígenes de los métodos sin malla y, desde un punto de vista personal, examinar brevemente lo esencial de la ya aludida amplia panoplia de métodos a los que la idea original ha dado lugar, inscribiendo

en este marco el Método de Diferencias Finitas Generalizadas, que es en el que más tiempo hemos trabajado, con objeto de presentar las ideas fundamentales de su formulación y mostrar alguna de nuestras aportaciones.

Ha resultado no obstante irresistible comenzar con una breve revisión de los autores e ideas básicas que han cimentado los métodos numéricos y particularmente, debido a su relevancia, el método de los elementos finitos.

En la parte final, se presentan aplicaciones del método de diferencias finitas generalizadas que ponen de manifiesto su utilidad y quizás tengan un interés más específico para algún lector. Se trata de aplicaciones ingenieriles sobre problemas de propagación de ondas en el terreno, dinámica estructural, cuestiones atmosféricas (que en su momento permitieron una interesante colaboración con la AEMET) o incluso de tipo biológico entre otros, así como de la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales clásicas, que al poder ser utilizadas como modelo matemático de otras muchas aplicaciones, pueden abrir una interesante perspectiva de futuro.

BREVE APROXIMACIÓN HISTÓRICA A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

La búsqueda de soluciones aproximadas a problemas matemáticos en general, es un proceso antiguo y ya

aparecen métodos para aproximar algunas medidas en triángulos y círculos sobre el año 2000 A.C.

En 1650 A.C. el Papiro de Rhind, explica un método para encontrar raíces de ecuaciones sencillas sin el uso de álgebra.

Arquímedes desarrolla el método de Exhaustión, creado por Eudoxo de Cnido, para aproximar áreas, con éste obtiene un valor muy aproximado de π .

En 900 D.C. se desarrolla una ingente labor matemática en el mundo árabe encabezada por Al-Warizmi, produciendo la creación de métodos algebraicos y revisión de los métodos numéricos disponibles en la época, así como el inicio de los métodos algorítmicos para resolver problemas.

En 1617 John Napier introduce los logaritmos y diseña una máquina para calcularlos conocida como los huesos de Napier.

En 1623 Kepler utiliza una máquina para realizar cálculos de forma práctica que usó en estudios astronómicos; ésta podía realizar muchas operaciones y hasta guardar los pasos intermedios para ser utilizados en otros cálculos.

Leibnitz se interesa por los métodos desarrollados por Arquímedes y obtiene metodologías similares con las cuales se da inicio al cálculo dife-

rencial e integral. Diseña, entre otras cosas una máquina conocida como la máquina calculadora, que permite resolver ecuaciones en diferencias y métodos de series de potencias para aproximar valores de funciones.

Newton desarrolla una gran cantidad de métodos para realizar numéricamente procedimientos matemáticos. El más famoso es la interpolación polinomial, pero muchos de los métodos usados actualmente han sido generados gracias a sus ideas.

En 1768 motivado por el trabajo de Newton y Leibnitz, Euler desarrolla un método para encontrar soluciones aproximadas a problemas de ecuaciones diferenciales.

En 1822 Charles Babbage, diseñó una máquina de diferencias que en teoría permitía realizar operaciones matemáticas y hasta resolver ecuaciones complejas y evaluar polinomios por medio de sumas sucesivas.

Los siguientes métodos se deben a John C. Adams, y aparecen publicados por primera vez por Bashford, en 1883, actualmente, se conocen con el nombre de métodos (explícitos) de Adams-Bashford y los implícitos se conocen como métodos de Adams-Moulton .

Carl David Tolmé Runge se centra en trabajos de matemática aplicada. En 1905 fue llamado a Göttingen por Félix Klein, donde fue nombrado como el primer catedrático de Matemática Aplicada.

Wilhelm Martin Kutta en 1901 utilizó este formato general y describió varios métodos de orden cuatro con cuatro etapas. Uno de ellos es el que ha pasado a los libros como el *método de Runge-Kutta*.

El primer estudio riguroso de la teoría matemática encerrada en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales se debe a Dahlquist que escribió su tesis en el año 1956, siendo publicada en 1959. Es el primero en escribir una teoría que explique conceptos como estabilidad o el orden alcanzable.

En 1946 se termina de construir el primer integrador y computador ENIAC. La utilización del ordenador ha permitido el desarrollo de los métodos numéricos de cálculo, entre los que hay que destacar el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Las bases teóricas del MEF datan de finales del siglo XIX y principios del XX, con los métodos de Rayleigh (1877), Ritz (1909) y Galerkin (1915), cuya idea general es la minimización de la energía de los sistemas físicos sobre espacios aproximadores de dimensión finita.

La modelización del continuo en elementos discretos, pueden relacionarse con los trabajos realizados independientemente por McHenry (1943-1944) y Hrennikoff (1941), pero es en la serie

de artículos publicados en el *Aircraft Engineering* por Argyris en 1954-1955, donde se presenta completamente desarrollada la formulación matricial de la teoría de estructuras y donde están claramente perfilados los métodos de las fuerzas y los desplazamientos.

La primera comunicación en la que se presenta el término *Método de los Elementos Finitos*, aunque como el propio autor comenta, sin aportar nada nuevo, es la publicada en el ASCE en 1960 con el título *The finite element method in plane stress analysis*, firmada por Clough. Pero el trabajo con el que se asocia la primera aplicación del MEF es el dirigido por Turner y realizado fundamentalmente por Clough en el verano de 1953 para la *Boeing Airplane Company* con objeto de evaluar la rigidez del ala delta de un avión y que dio lugar, tras su presentación en la reunión del *Institute of Aeronautical Sciences* en enero de 1954 en Nueva York, al conocido artículo firmado por Turner, Clough, Martin y Topp con el título "*Stiffness and deflection analysis of complex structures*", cuya publicación inexplicablemente no se realiza hasta 1956.

A partir de los años sesenta, el avance en el desarrollo del MEF es rápido y diverso lo que hace relativamente complejo y fuera del alcance de este trabajo el establecimiento de una cronología debiéndose, eso sí, incluir en estas

líneas algunas referencias. En estos años la aplicación del MEF se abre a otros campos, iniciándose la aparición de grandes programas comerciales, publicaciones ya clásicas y figuras como por ejemplo Zienkiewicz, Owen, Wilson, Penzien, Irons, Bathe, Przemieniecki, Livesley, Taylor , Newmark, Hughes, Washizu, Babuska, Gallaguer, Belytschko entre otros muchos más investigadores.

MÉTODOS SIN MALLA

Muchos problemas en el amplio espectro científico requieren de la resolución de una ecuación en derivadas parciales. La obtención de una solución analítica del problema no es siempre posible, ya sea porque aún no somos capaces de encontrarla o porque ésta no se puede expresar mediante de funciones elementales. Para acercarnos a la solución de este tipo de problemas se recurre a los métodos numéricos, entre los que se puede destacar, por ser actualmente el más utilizado, el método de los elementos finitos (*finite element method*) (FEM)² que presenta una serie de desventajas, como:

- El tiempo que consumen para generar mallas de calidad en geometrías

² A lo largo del artículo se utilizarán términos en inglés para algunos conceptos y denominaciones de métodos con objeto de evitar traducciones poco acuíñadas que puedan conducir a equívocos y, por otra parte, facilitar el acceso a una bibliografía prácticamente escrita en su totalidad en inglés. Por tanto, se tratará de utilizar términos en castellano consolidados.

arbitrarias para obtener la precisión deseada.

- La dificultad para construir aproximaciones con un orden cualesquiera de continuidad, lo que provoca que las soluciones de problemas con derivadas parciales de orden alto o problemas con discontinuidades sean difíciles de resolver.
- La realización de refinamientos h-p adaptativos puede llegar a ser muy tediosa.
- Son ineficientes al tratar con dificultades relativas a la actualización de la malla, lo que sucede en problemas de grandes deformaciones, desplazamientos o de propagación de grietas.

Puede decirse, por tanto, que uno de sus principales hándicaps está en la necesidad de una malla, lo que ha provocado el interés por su eliminación y la aparición de los denominados métodos sin malla (*meshfree o meshless methods*), cuyo objetivo fundamental es pues eliminar o reducir la dependencia de la malla.

Se pueden definir los métodos sin malla como aquellos en los que la aproximación puede ser construida estrictamente en términos de nodales. Así, se puede apreciar por ejemplo, como las aproximaciones más usuales de los métodos sin malla, como son las realizadas mediante mínimos cuadrados móviles (*moving least squares* (MLS)) o

reproducing kernel (RK), no precisan de la topología de una malla para su construcción.

Algunas características generales de los métodos sin malla son:

- Ausencia de malla. Los vínculos entre nodos no se fijan a priori sino que se determinan en tiempo de ejecución por lo que, por ejemplo, al no ser necesaria la generación de la malla al principio del cálculo, se pueden evitar problemas como el de la sensibilidad al alineamiento de la malla.
- La adaptatividad, en especial la h-adaptatividad, es más simple pues sólo tienen que añadirse nodos.
- No es necesario el remallado durante el cálculo lo que afecta a la precisión, tiempo de ejecución y a la complejidad de los códigos, sobre todo en problemas con grandes deformaciones, de propagación de grietas o de interfases entre otros muchos.
- En cuanto a la continuidad de las funciones de forma, los métodos sin malla cumplen fácilmente la condición de continuidad que surge del orden del problema en consideración.
- No es necesario un postproceso para suavizar la solución eliminando saltos entre elementos, como por ejemplo ocurre en el FEM para las tensiones. Los casos especiales en los que la continuidad de las fun-

ciones de forma y las derivadas no sea deseable, como por ejemplo en propagación de grietas, se pueden manejar con relativa facilidad.

- Para el mismo orden de consistencia, los experimentos sugieren que los resultados de convergencia de los métodos sin malla, son considerablemente mejores que los resultados con funciones de forma de métodos basados en mallas.
- En general, los métodos sin malla consumen un mayor tiempo computacional que los métodos basados en mallas. Las funciones de forma son de naturaleza más complejas que las funciones de forma de los métodos basados en mallas. En cada punto es necesario buscar su entorno, resolver pequeños sistemas de ecuaciones y operaciones matriciales para determinar las derivadas. Además, el sistema de ecuaciones global tiene matrices con bandas más anchas que las del FEM.
- La mayoría de los métodos sin malla no cumple la propiedad de la delta de Kronecker y, por tanto, la imposición de condiciones de contorno esenciales puede degradar la convergencia del método.

Siguiendo el procedimiento de formulación, los métodos sin malla se pueden agrupar de la forma que se indica a continuación:

- Los métodos sin malla de Galerkin

basados en la formulación débil. Aunque no se necesita malla para construir la aproximación, la integración en el dominio si es necesaria, además de precisar de técnicas para hacer cumplir las condiciones de contorno esenciales.

Con respecto a la formulación débil, podemos situar su origen en 1977 de la mano de Lucy y Gingold con el método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), que utilizaron para modelar fenómenos astrofísicos sin contornos tales como la explosión de estrellas o de nubes de partículas. A partir de la fecha señalada, no aparecen referencias de interés sobre estos métodos hasta los trabajos de Monaghan et al. (1982, 1988), en los que se explicó el método de forma más rigurosa dotándole de una base más racional. El interés en el campo de la mecánica de medios continuos por evitar las dificultades que suponía la utilización de una malla en la resolución de muchos problemas, condujo a que se prestara atención al método, realizándose avances para mejorar su precisión y resolver los problemas de inestabilidad en la tensión.

Los primeros pasos dados por Lancaster y Salkauskas (1981) se basaron en la idea de realizar la aproximación local mediante la utilización de funciones de aproximación obtenidas por el método de mínimos cuadrados móviles.

Nayroles, Touzot y Villon (1992) fueron los primeros en utilizar, aunque sin precisar completamente, una aproximación de este tipo en un método de Galerkin, denominándolo método de elementos difusos (*diffuse element method* (DEM)). Presentaron aplicaciones en dos dimensiones para problemas de potencial y elasticidad lineal, aunque usando una cuadratura para la integración de orden muy bajo, unas funciones de forma muy simplificadas y no forzaron las condiciones de contorno esenciales.

Belytschko, Lu y Gu (1994), refinaron y desarrollaron una implementación alternativa del método de los elementos difusos, que clarificó las ideas básicas y desde un punto de vista práctico, mejoró la precisión al utilizar multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de contorno esenciales, un orden de cuadratura mayor en la integración y en un principio, el procedimiento de ortogonalización de Schmidt, posteriormente abandonado, para la construcción de las funciones de base que eliminasen los problemas de inversión de matrices que se debe realizar en cada nodo. Ellos denominaron al método, Galerkin sin elementos (*Element Free Galerkin* (EFG)) y lo aplicaron a una gran variedad de problemas bidimensionales de potencial y elasticidad lineal, mecánica de la fractura con propagación de grieta (mismos autores 1995 y Fleming 1997), donde, además de la facilidad propia del mé-

todo para modelar el crecimiento de la grieta sin necesidad de remallar y la realización de un refinamiento adaptativo, mostraron la sencillez con que se pueden incorporar funciones singulares en la formulación (funciones de enriquecimiento), dinámica de la fractura (Belytschko, Lu, Tabbara 1996), flexión en placas delgadas de Kirchhoff, utilizando splines cuárticos como funciones de ponderación con dominios de influencia circulares y, con no mucho éxito, a placas de Mindlin-Reissner (Lu, Gu y Belytschko 1996). Casi al mismo tiempo que el EFG, Liu et al. estudiaron con éxito una nueva técnica en que la aproximación se basa en una integral y que denominaron *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM). En este método la función del Kernel estimado (que, por cierto, es el punto inicial de la formulación del SPH) se modifica introduciendo una función de corrección reproductiva. El método se ha utilizado con éxito en problemas de grandes deformaciones, contactos e impactos.

La idea inicial de superponer una malla independiente es una tentación evidente, pero aparecen errores e inestabilidades al utilizar una cuadratura de Gauss en la que no coinciden la malla de integración y el soporte de la aproximación. Este problema se puede corregir, con el coste correspondiente, utilizando grados altos de cuadratura, lo que incentivó el trabajo de investigación y

condujo a interesantes propuestas (por ejemplo, Chen et al. 2001-2013 o Duan, Zang y Belytschko 2012).

Un salto importante en la formulación y desarrollo de estos métodos se produjo a partir de los trabajos de Oden y Duarte (1996) y de Babuska y Melenk (1996-97) que realizan una generalización muy interesante de la aproximación por mínimos cuadrados móviles usando el concepto de partición de la unidad, que los primeros denominaron *Nubes-hp* (hp-clouds) y de Partición de la Unidad (*Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM) los segundos. La idea es la construcción de familias de funciones de aproximación a base de multiplicar una partición de la unidad, obtenida por mínimos cuadrados móviles (por ejemplo *Shepard*), por polinomios u otra clase de funciones de enriquecimiento apropiadas para el problema en estudio. Ésto introduce una posibilidad sencilla de aumentar el grado de los polinomios que forman las funciones de forma, es decir la creación de familias jerárquicas (*adaptatividad-p*), a la que se puede añadir también la introducción de nuevos nodos (*adaptatividad-h*).

Strouboulis, Copps y Babuska realizaron una generalización del PUFEM que denominaron *General Finite Element Method* (GFEM), en el que se han ido introduciendo muchas mejoras, proponiendo curiosamente incluso

una aproximación basada en una malla junto con esquemas de integración sin malla.

Antes de finalizar, a continuación se enumeran, sin comentarios adicionales, algunos otros métodos basados en la formulación débil, con la intención de poner de manifiesto la enorme difusión que los métodos sin malla han alcanzado durante los últimos años. *Natural Element Methods* (NEMs), *Radial Point Interpolation* (RPI), *Optimal Transport Meshfree* (OTM), *Material Point Method* (MPM), *Generalized Interpolation Material Point* (GIMP), *Convected Particle Domain Interpolation Method* (CP-DIM).

Tratando de aprovechar las ventajas que ofrecen por una parte los métodos de mínimos cuadrados móviles (en cuanto a que no es necesaria la utilización de una malla) y, por otra, el método de los elementos de contorno (ya que en este es únicamente necesario discretizar el contorno), Mukherjee (1997) aplicó una combinación de ambos a la resolución de una ecuación de Laplace en lo que denominó Método Nodal de contorno (*Boundary Node Method* (BNM)) y que únicamente requiere la colocación de nodos sobre el contorno del dominio en estudio. El método presenta ciertas dificultades fundamentalmente asociadas a la imposición de las condiciones de contorno.

- Métodos de colocación basados

en la formulación fuerte. Debido a la facilidad para la construcción de aproximaciones suaves sin malla, las ecuaciones en derivadas parciales pueden ser resueltas directamente en los puntos de colocación sin integración del dominio, ni procedimientos especiales para la aplicación de las condiciones de contorno esenciales.

Respecto a la formulación fuerte, Jensen en 1972 fue el primero en considerar métodos en diferencias finitas con nodos dispersos. En particular, consideró el desarrollo de Taylor interpolado en estrellas de seis nodos para obtener las fórmulas en diferencias finitas aproximando las derivadas hasta orden dos. Perrone y Kao en 1974 sugirieron que se deberían considerar nodos adicionales en el esquema de seis nodos y un proceso promedio para la generalización de los coeficientes en diferencias finitas aplicados. La idea de usar estrellas con un número arbitrario de nodos y funciones de ponderación para obtener fórmulas en diferencias finitas para mallas irregulares, fue presentada en 1980 por Liszka y Orkisz, formalizando la aproximación por mínimos cuadrados móviles también planteada por Lancaster y Salkauskas en 1981. Aunque los métodos de colocación se utilizaban hacía muchos años, el uso de la interpolación sobre datos dispersos en estos métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales

puede atribuirse a Kansa (1990). Por otra parte, Hardy había utilizado funciones de base radial para interpolación, un tipo de funciones que se emplearon en el *Radial Basis Collocation Method* (RBCM) para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por colocación en la formulación fuerte. A lo largo de la década de los noventa del pasado siglo, varios autores como Miccheli, Chiu, Madych, etc, continuaron trabajando en el desarrollo del método, siendo seguramente Schaback et al. en 1998 quienes establecieron de forma más clara su base teórica. Posteriormente se ha trabajado mucho en el método, pudiéndose citar a Hu, Li y Wong, entre otros, por sus interesantes aportaciones.

Otras formulaciones que se pueden destacar son: el Método del Punto Finito (Finite Point Method (FPM)) propuesto por Oñate, Idelsohn, Zienkiewicz y Taylor en 1996, en el que se utiliza una aproximación por mínimos cuadrados ponderados en un método de colocación puntual y el método de colocación basado en RK propuesto por Hu et al. en 2011 entre otros.

ALGUNAS APORTACIONES AL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS (GENERALIZED FINITE DIFFERENCE METHOD (GFDM)).

Tras un periodo de tiempo dedicado a trabajos en el método EFG y generali-

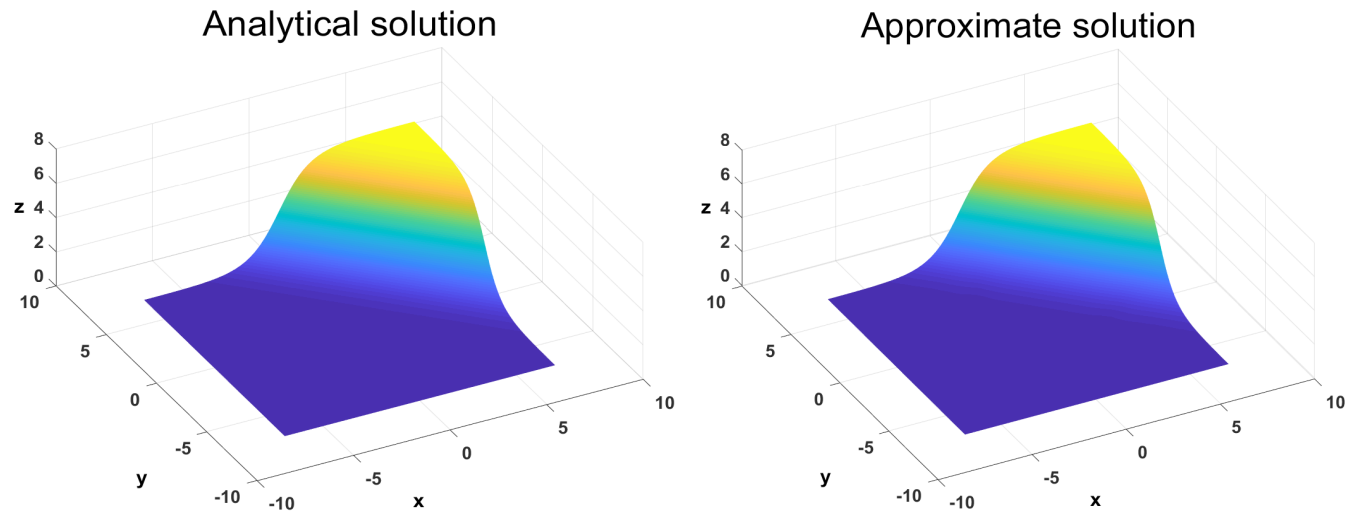
dades sobre los métodos sin malla [1, 2], el primer paso de nuestro grupo en esta línea de investigación [3, 4] se centró en la obtención de fórmulas en diferencias para las derivadas parciales espaciales utilizando el método de mínimos cuadrados móviles (*moving least squares*, MLS) en los casos bi y tridimensional. Para ello, sobre una discretización con una distribución regular o irregular de nodos del dominio, a cada nudo interior x_0 se le asigna un número de nodos próximos, conjunto que se denomina estrella de nodo central x_0 . Para cada nodo de la estrella se obtiene el desarrollo en serie de Taylor en el entorno del nodo central y se construye un funcional con el error cuadrático ponderado entre el valor de la función en el nodo central y la aproximación por Taylor truncada de forma que aparezcan los términos con las derivadas parciales para las que se desea obtener las fórmulas en diferencias. A continuación, se minimiza dicho funcional respecto a las derivadas parciales, con lo que se dispone de un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve por el método de Cholesky obteniéndose las fórmulas explícitas en diferencias para las derivadas parciales. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial se obtiene lo que se ha denominado ecuación de la estrella y realizando este mismo proceso para cada nodo interior de la discretización del dominio se obtiene un sistema. En el caso problemas con derivadas

temporales, se utilizan las fórmulas en diferencias clásicas, que junto con las fórmulas obtenidas anteriormente para las derivadas espaciales, conducen finalmente a esquemas explícitos para la resolución.

En los trabajos iniciales y como es lógico, se estudia la influencia de los parámetros involucrados en la aproximación, esto es: el número de nodos, el criterio de selección de los mismos y la función de ponderación. Se aplica el GFDM a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas e hiperbólicas empleando esquemas explícitos, analizando la consistencia, el orden de aproximación, la convergencia y la estabilidad.

Para el estudio de la adaptatividad, nuestro grupo ha presentado un índice de irregularidad de la discretización, IIC, que se obtiene hallando la desviación típica del radio medio de las estrellas que es la distancia media entre el nodo central y el resto de nodos de la estrella. Se introdujo una formulación matricial más compacta del método, se demuestra el teorema de existencia y unicidad y se extraen una serie de consecuencias inmediatas, como muestra [25], donde se proponen dos funciones de penalización, permitiendo una selección automática de los nodos de la estrella, que resulta de un enorme interés para problemas tridimensionales.

Figura 1

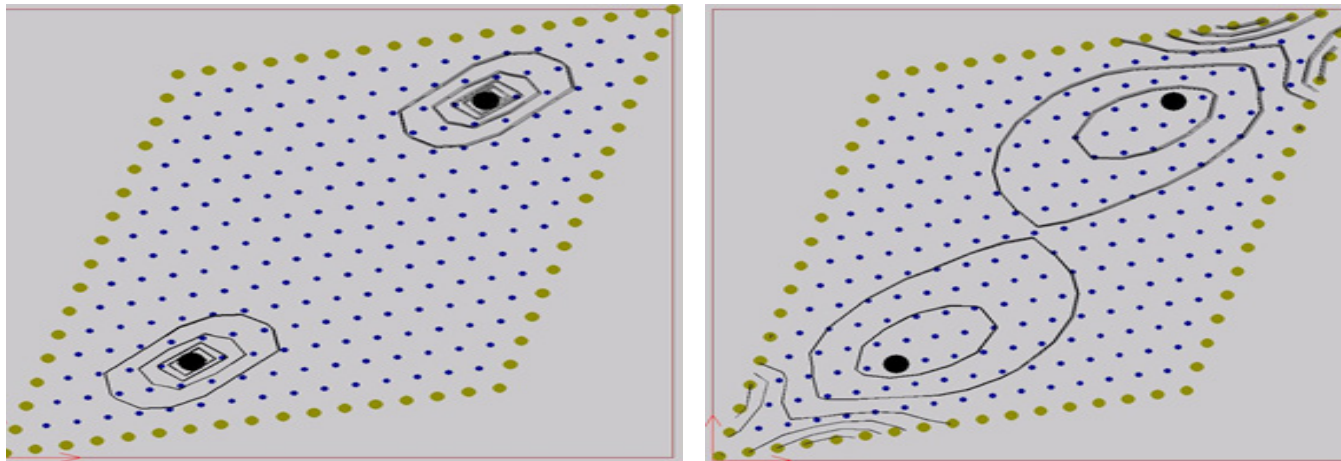


nodos a su estrella asociada, evitando la posibilidad de un mal condicionamiento, con el establecimiento de una distancia mínima entre nodos (dpa). Se aprecia que la disminución de la dpa y el límite de error debe ser paulatina y para ello, el método se aplica paso a paso, limitando en cada uno de ellos el número de nudos seleccionados para su aplicación, lo que hace disminuir el límite de error y el número total de nodos añadidos.

en los aspectos teóricos y metodológicos como en su aplicabilidad a muchos y diversos problemas. Se ha aplicado a problemas de *advección-difusión*, analizando la consistencia, el orden, la estabilidad y la convergencia.

La figura 1 muestra la solución analítica y aproximada, para $t=7s$, de la ecuación *sine-Gordon* (SG) que responde a uno de los modelos dinámicos más importantes en la ciencia no lineal. La ecuación SG posee soluciones de tipo *onda solitón*. Los solitones se utilizan en las comunicaciones, ya que pueden transferir ondas a grandes distancias sin errores, y tienen diversas aplicaciones físicas, como en la electrónica, las señales de las fibras ópticas, la superconductividad, etc.

Figura 2



Se han desarrollado nuevos métodos adaptativos consistentes en añadir nodos a mitad de distancia entre el central y el resto de nodos de la estrella en 3D. Además se examina de forma puntual la disminución del error y se propone un índice de calidad mostrando como mejora en cada paso del adaptativo. Se incorpora al método adaptativo otro algoritmo para añadir nodos en los baricentros de los triángulos de mayor área entre los formados por el nodo central y los nodos restantes de la estrella. Otro método adaptativo diferente de los anteriores está basado en el uso del *quadtree* y en la computación de los gradientes en cada nodo del cuadrilátero asignado a cada nodo interno. Aquellos cuadriláteros con valores más altos que el establecido son elegidos para aplicarles el método.

Se ha utilizado para la simulación numérica de la conductividad eléctrica de un tejido y en electrocardiología. La figura 2 muestra las posibilidades del GFDM en el modelado de la ecuación *monodominio* en todo el tejido. En la parte derecha de la figura se observa claramente la orientación anisotrópica de las fibras. El ángulo de las fibras tiene una gran influencia en la propagación eléctrica del estímulo.

Se ha empleado en problemas de análisis dinámico como la vibración de vigas y de placas finas y gruesas, analizando la consistencia, el orden, la estabilidad y la convergencia de los esquemas obtenidos, y se han comparado los resulta-

APLICACIONES

Nuestro grupo ha contribuido notablemente al desarrollo del GFDM, tanto

J. Orkisz propuso un indicador del error nodal mediante la comparación de los valores obtenidos utilizando n y $2n$ términos del desarrollo de Taylor, lo que supone una enorme complicación en los cálculos. Por ello, nosotros propusimos como indicador una combinación lineal de las derivadas parciales de grado superior ponderada por los coeficientes de la estrella, obteniendo las derivadas parciales de forma re-

cursiva a partir de las de orden inferior. Para reducir el error se puede actuar sobre el número de nodos de la discretización, el orden del truncamiento del desarrollo de Taylor o sobre los parámetros de la estrella (su número de nodos, criterio de selección y función de ponderación) y el método propuesto consiste en elegir los nodos con un error superior a un límite (media de los errores nodales) y añadir hasta cuatro

dos con los obtenidos con un software comercial que usa FEM obteniendo resultados similares. Ésto se puede observar en la figura 3 donde se muestra la deformación de una placa fija de forma irregular con una carga puntual en el nodo situado en (0, 5; 0, 5) utilizando el GFDM (parte izquierda) y el método de los elementos finitos (parte derecha).

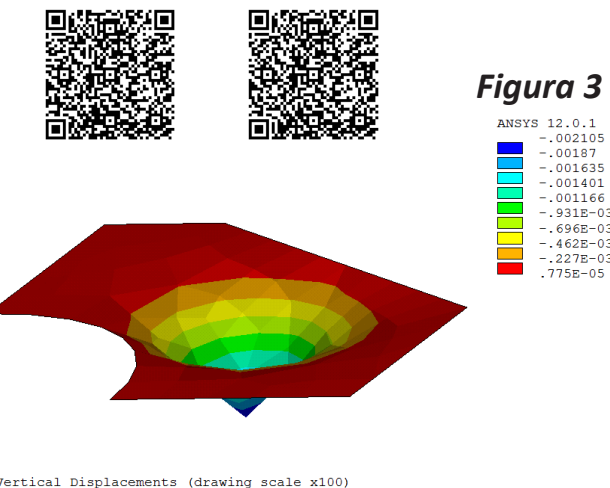
También se ha aplicado a la resolución de problemas de propagación de ondas, en sus distintas formulaciones, y en medios viscoelásticos. Estudiando ventajas e inconvenientes de dichas formulaciones, esquemas y convergencia. Seguidamente se exponen unos ejemplos:

En este primer ejemplo se modeliza un frente de onda que se encuentra con un obstáculo, y en la figura 4 se observa cómo el frente de onda se difracta alrededor del obstáculo de un material con mayor velocidad de propagación que la del medio que la rodea (representado por una circunferencia) cerrando

el hueco detrás de él y recuperando la forma del frente de onda. Se puede ver una animación de los resultados obtenidos a lo largo del tiempo en el enlace ([Multimedia2](#))³ En la figura 5 se puede ver el mismo ejemplo pero para el caso de que la velocidad del material del obstáculo es menor que la del dominio, incluyéndose en el enlace ([Multimedia3](#))⁴ una animación del proceso.

En este segundo ejemplo se plantea el problema de reflexión en la superficie de una onda plana. En la parte de la derecha de la figura 6 se puede observar la onda P incidente y ondas P y SV reflejadas, así como la onda de Rayleigh. En la parte de la izquierda de la figura, se modeliza un problema de incidencia sobre una interfase y se puede observar la onda plana P incidente y ondas planas P y SV reflejadas y transmitidas. Se pueden ver animaciones de los resulta-

3 [Multimedia2](#) 4 [Multimedia3](#)



GFDM - Displacements (drawing scale x100)

Vertical Displacements (drawing scale x100)

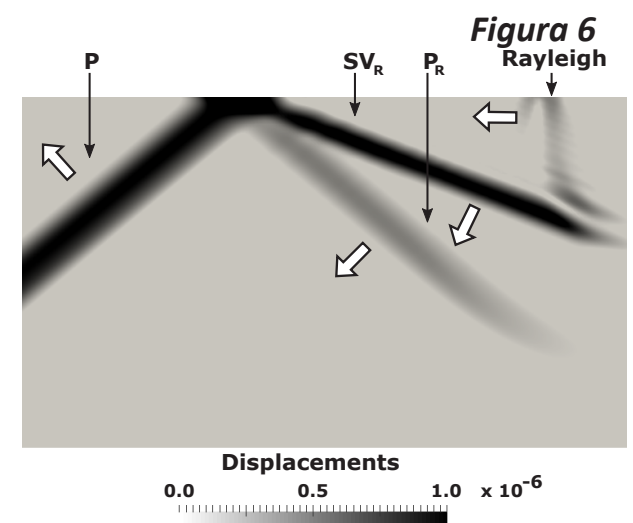
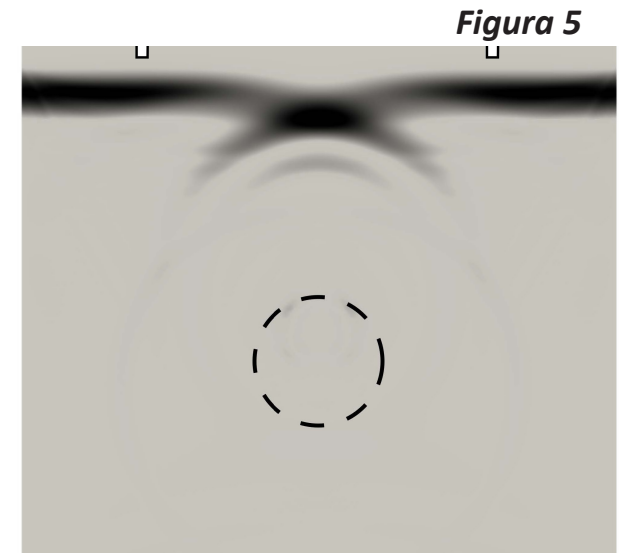
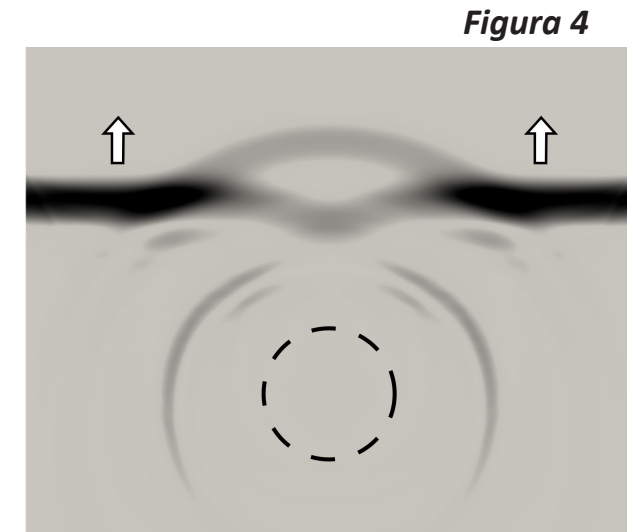
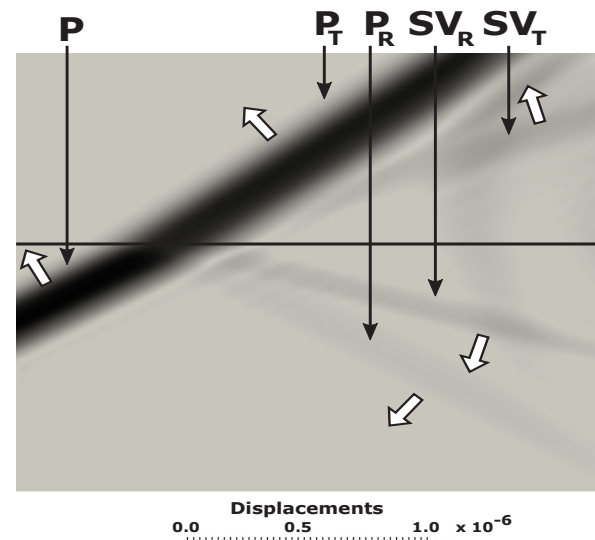
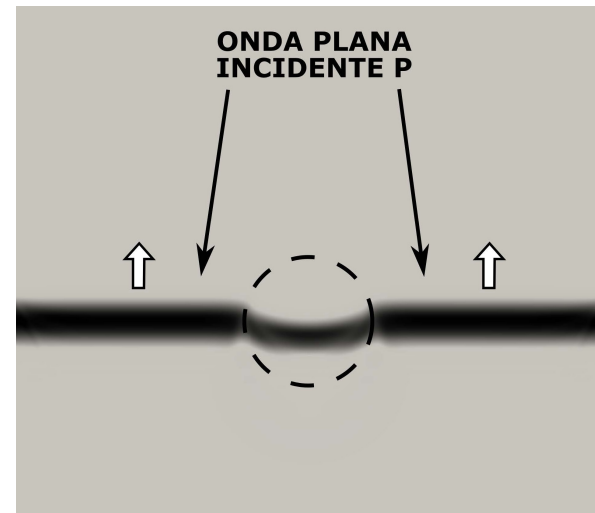
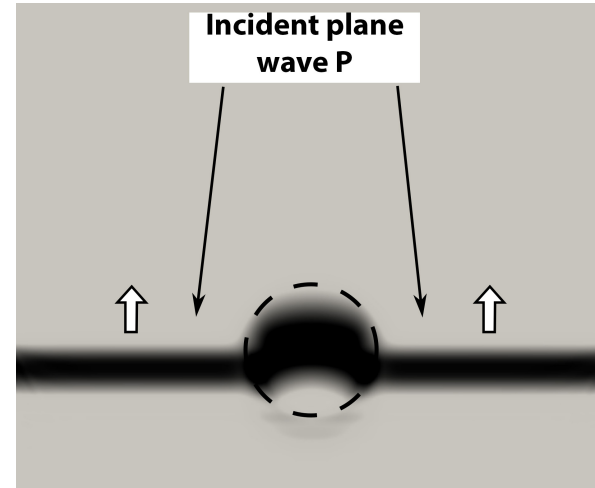
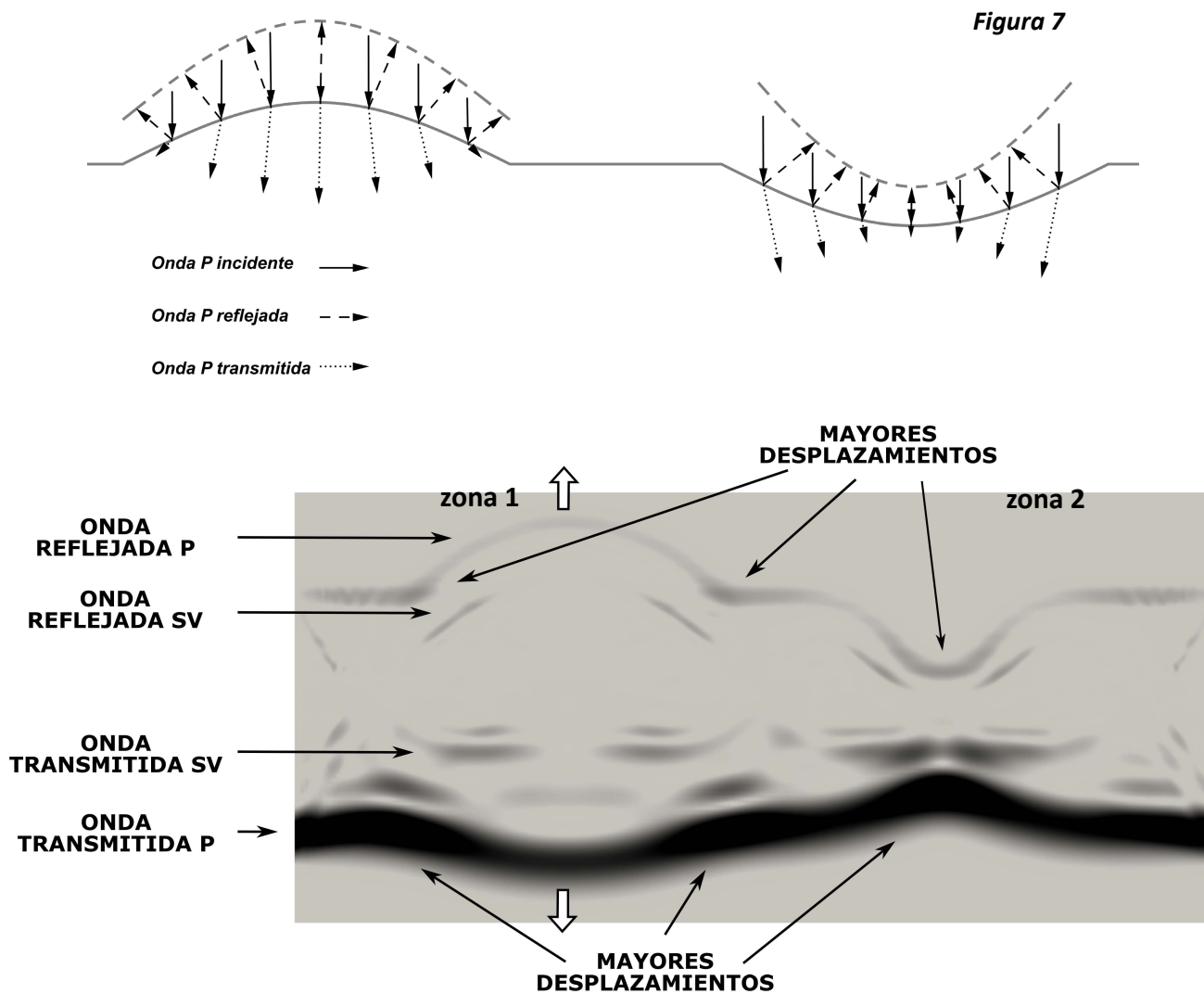


Figura 4

Figura 5

Figura 6



dos obtenidos a lo largo del tiempo en los enlaces a [Multimedia1](#) y [Multimedia6](#)⁵ respectivamente.

En la figura 7 se presenta un caso más general de interfase. En la parte curva de la misma, las ondas P reflejadas mantienen la forma al alejarse de la interfase, expandiéndose (zona 1) o con-

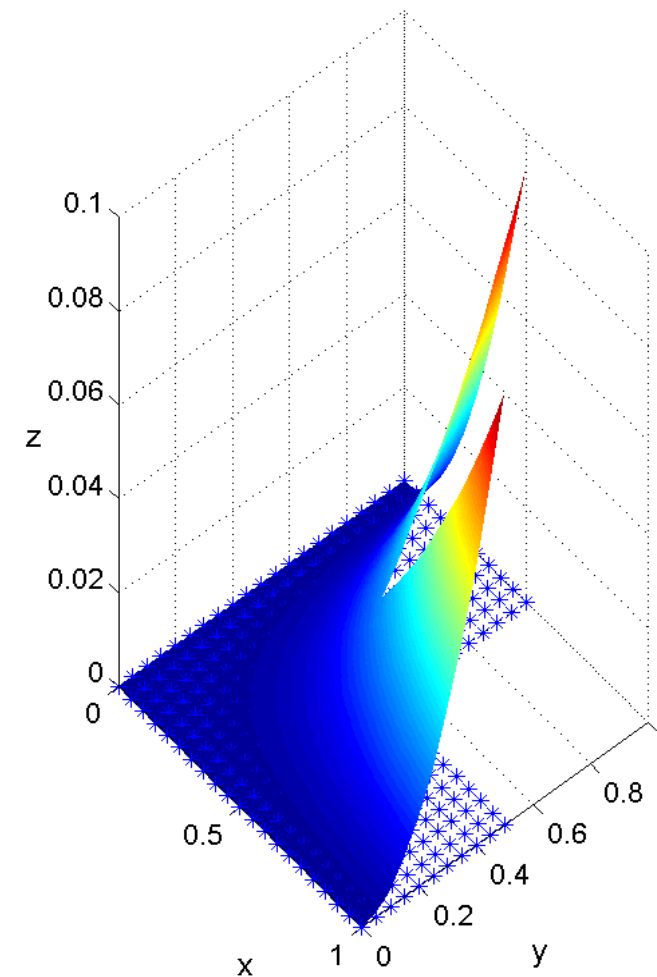
5 [Multimedia1](#) [Multimedia4](#) [Multimedia6](#)



trayéndose (zona 2) según se trate de curva convexa o cóncava. Las ondas P transmitidas se abren en la región cóncava (ahora zona 1) y se cierran en la convexa (ahora zona 2). Todo esto se puede apreciar mejor en la animación de los resultados incluida en el enlace [Multimedia4](#)⁵.

La aplicación del GFDM a la resolución

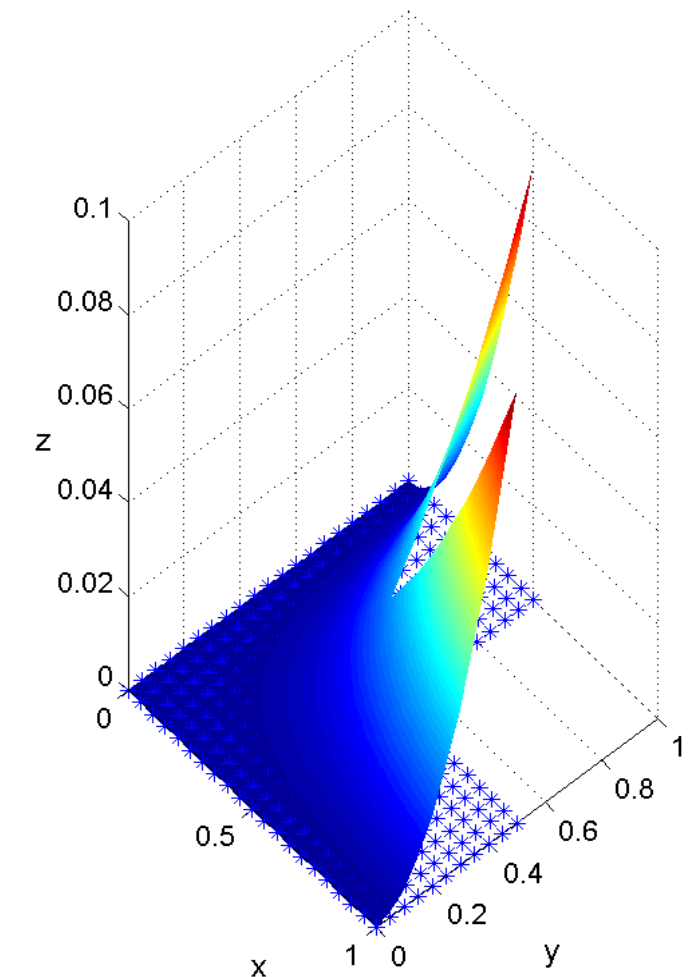
Analytical solution



de ecuaciones en derivadas parciales no lineales: elípticas, parabólicas e hiperbólicas, analizando la consistencia, estabilidad y convergencia del método [23], ha permitido el estudio y resolución de ecuaciones conocidas de la Física y de la Ingeniería: Monje-Ampère, Ginzburg-Landau, Telégrafo, Fokker-Planck, etc. Como ejemplo, en la figura 8 se muestra la solución analítica y la solución aproximada de la ecuación no lineal de Fokker-Planck, quienes la utilizaron por primera vez para describir el

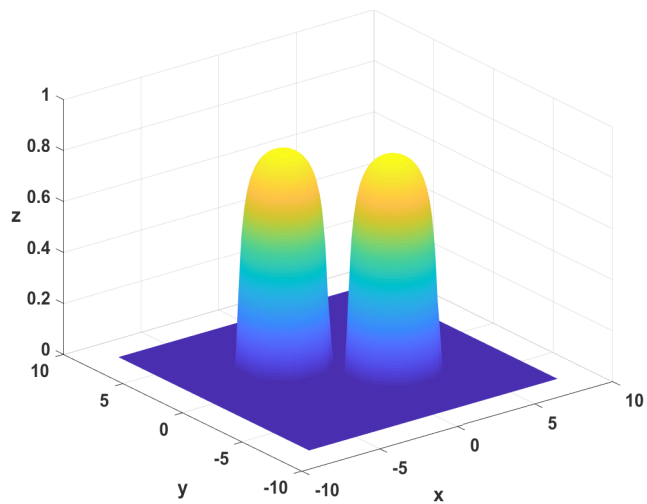
Figura 8

Approximate solution

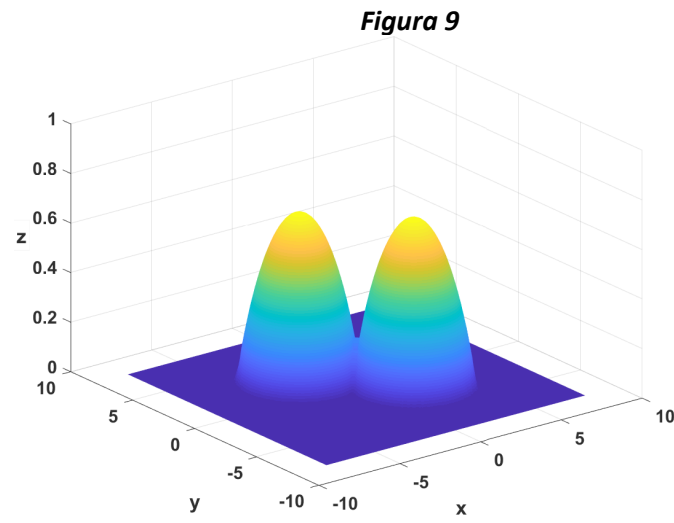


movimiento browniano de las partículas. La ecuación describe el cambio de probabilidad de una función en el espacio y el tiempo, y surge en una amplia gama campos como la óptica cuántica, la física del estado sólido, la dinámica de poblaciones, la biofísica y la física del láser.

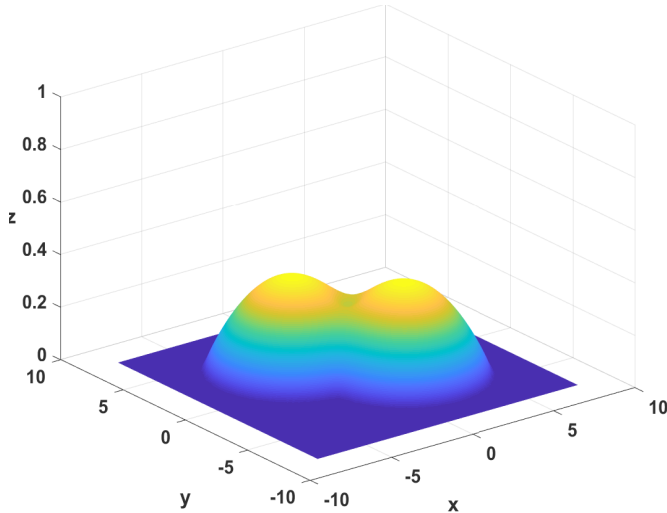
A continuación se muestra la figura 9, en la que se puede observar la solución numérica de una ecuación del medio poroso, para cuatro valores temporales



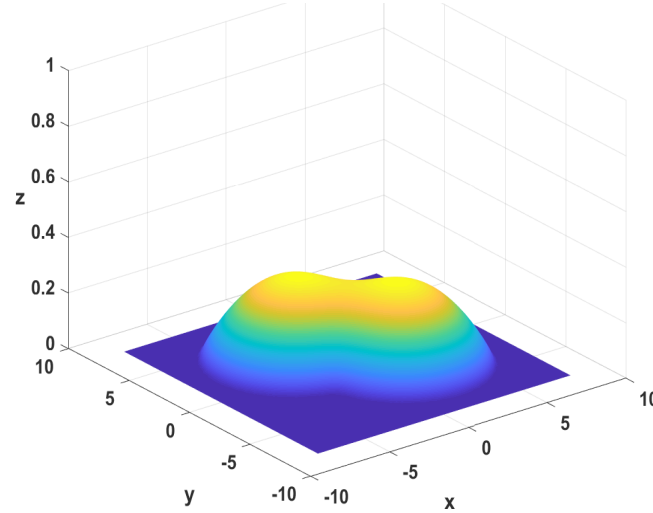
Initial solution



Approximate solution at $t = 0.5$



Approximate solution at $t = 3.0$



Approximate solution at $t = 4.5$

(en segundos): $T = 0.0, 0.5, 3.0, 4.5$. Se puede ver como con el transcurso del tiempo los focos iniciales se van difundiéndose y formando uno solo.

Un nuevo campo de aplicación ha sido el estudio de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales relacionados con la chemotaxis, haptotaxis y determinado modelo de propagación de tumores [26]. La figura 10 responde a un modelo matemático que describe la evolu-

ción del microambiente tumoral en el que intervienen las densidades de nutrientes (σ), de la matriz extracelular (E) y de las enzimas degradantes de la matriz (m). La parte superior es el dato inicial y la inferior es la situación para $t=10s$.

También hemos aplicado el GFDM a problemas de propagación de ondas en el terreno [24]. Para ilustrar la capacidad del modelo de reproducir la refrac-

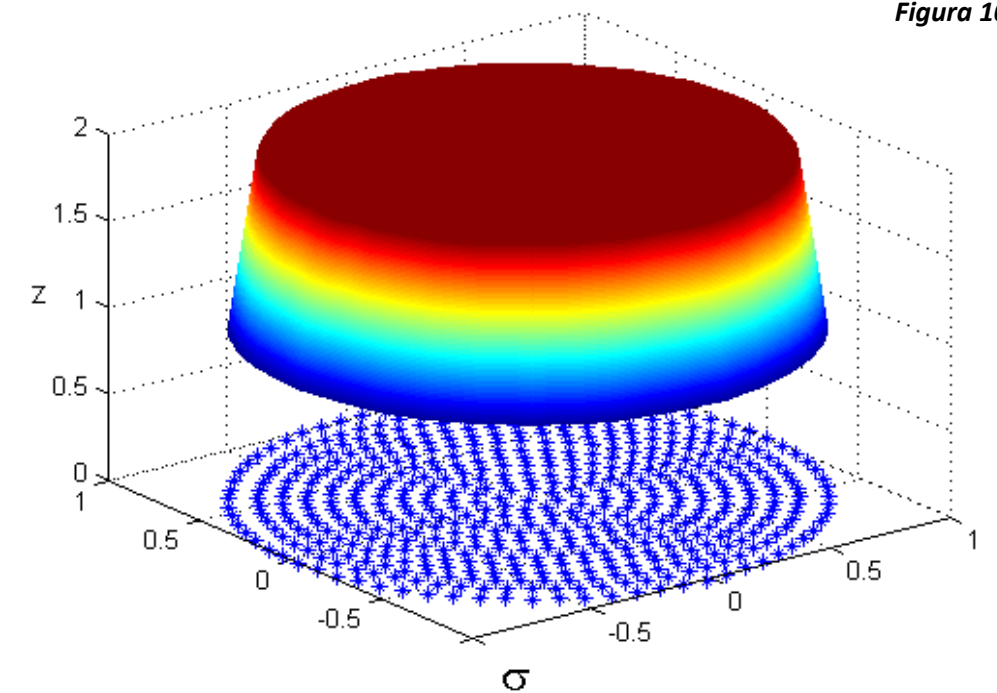
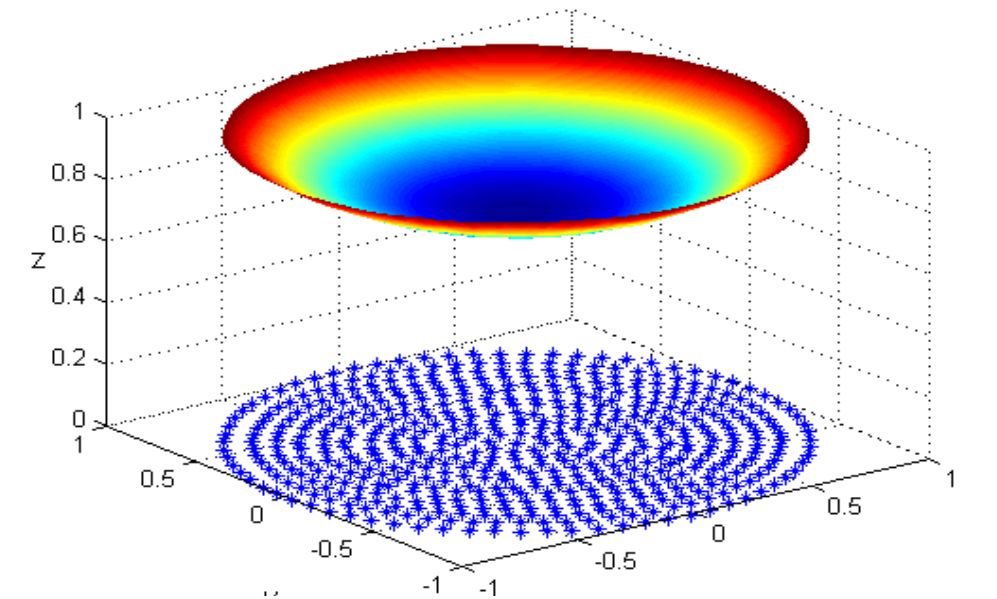


Figura 10



ción de las ondas se muestran varias capturas de pantalla del modelo en las figuras 11 y 12. La refracción se modela claramente entre las capas 1 y 2, y entre las capas 2 y 3. La escala gráfica se ha ajustado para realzar el frente de onda, lo que se traduce en una mayor sa-

turación de color para las zonas con mayor amplitud. Las ondas P se han señalado en las figuras, mostrando la mayor velocidad de las ondas en la capa 2 en comparación con la capa 1. Además, las ondas Rayleigh pueden identificarse en la superficie cerca del punto donde se

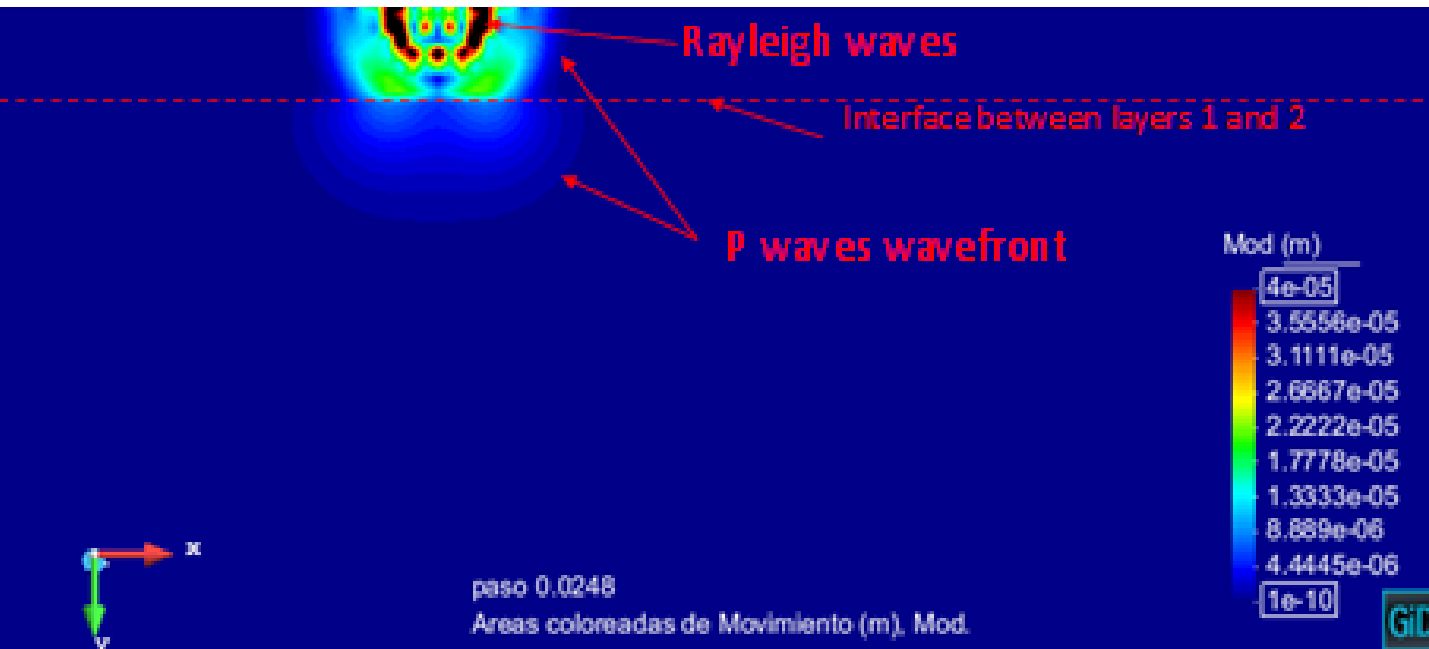


Figura 11

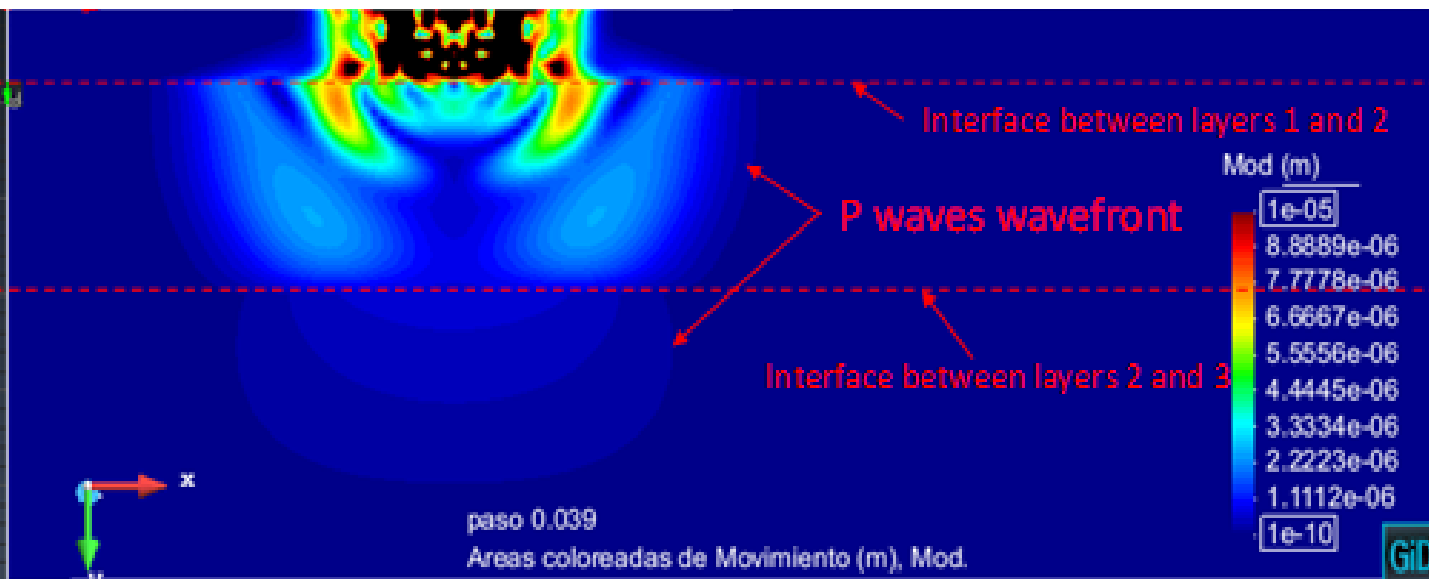
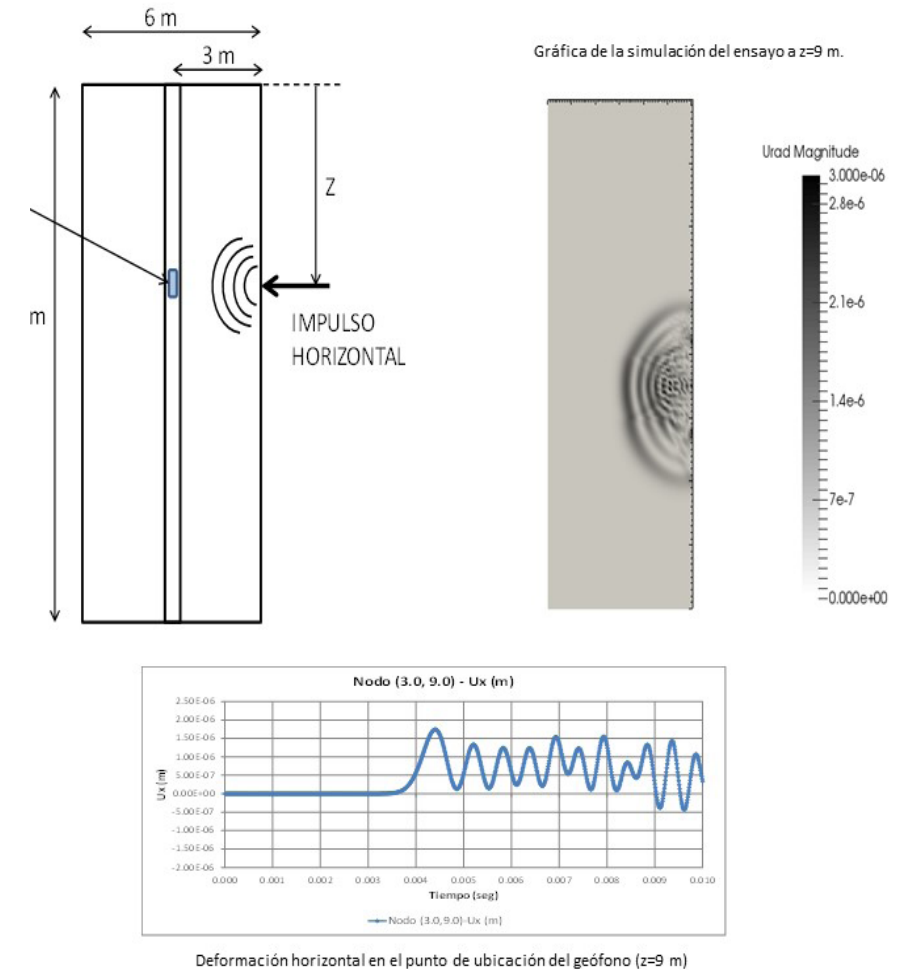


Figura 12



Deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono (z=9 m)

ha aplicado el pulso. Se puede ver una animación en el enlace correspondiente a [Multimedia5](#)⁶.

Entre otras aplicaciones a casos reales en el área geotécnica, en la figura 13 se incluyen los resultados de la simulación de un ensayo de Cross-hole y la animación en el tiempo se puede ver en el enlace [Multimedia7](#)⁶.

⁶ [Multimedia5](#)

[Multimedia7](#)



BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

- [1] Gavete L., Benito J.J., Falcón S., Ruiz A., (2000). Implementation of Essential Boundary Conditions in a Meshless Method. Communications in Numerical Methods in Engineering. 409-421. John Wiley & Sons,
- [2] Gavete L., Benito J.J., Falcón S., Ruiz A. (2000). Penalty Functions as Constrained Variational Principles for Element Free Galerkin Method. European Journal of Mechanics. A/ Solids. Vol.19, 699-721. Elsevier.
- [3] Benito J.J., Ureña F., Gavete L. (2001). Influence of several factors in the Generalized Finite Difference Method. Applied Mathematical Modeling. Vol. 25, 1039-1053.
- [4] Benito J.J., Ureña, F., Gavete, L., Alvarez, R. (2003). An h-adaptive method in the ge-

neralized finite differences. Computer methods in applied mechanics and engineering, 192(5), 735-759.

[5] Chen J.-S., Chi S.-W., Hillman M. (2017) Meshfree Methods: Progress made after 20 years, Journal of Engineering Mechanics DOI 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001176.

[6] Clough R W. 1960 The finite Element method in plane stress analysis. Proc. 2nd ASCE Conf. Electronic Computation. Pittsburg, Pennsylvania.

[7] Clough R W. 1980. The finite element method after twenty-five years: a personal view. 1980. Computers and Structures. 12; 361-370

[8] Fries T.P., Matthies H.G. Classification and Overview of Meshfree Methods. (2004). Technical University Braunschweig. Brunswick.

[9] Babuska, I., Banerjee, U., Osborn, J. E. (2003). Meshless and generalized finite element methods: A survey of some major results. In Meshfree methods for partial differential equations (pp. 1-20). Springer, Berlin, Heidelberg.

[10] Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. International journal for numerical methods in engineering, 37(2), 229-256.

[11] Duarte, C. A., Oden, J. T. (1996). An hp adaptive method using clouds. Computer methods in applied mechanics and engineering, 139(1-4), 237- 262.

[12] Jensen, P. S. (1972). Finite difference techniques for variable grids. Computers & Structures, 2(1-2), 17-29.

[13] Lancaster, P., Salkauskas, K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. Mathematics of computation, 37(155), 141-158.

[14] Liszka, T., & Orkisz, J. (1980). The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. Computers & Structures, 11(1-2), 83-95.

[15] Liu, W. K., Jun, S., Zhang, Y. F. (1995). Reproducing kernel particle methods. International journal for numerical methods in fluids, 20(8-9), 1081-1106.

[16] Melenk, J. M., Babuska, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory

and applications. Computer methods in applied mechanics and engineering, 139(1-4), 289-314.

[17] Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational mechanics, 10(5), 307-318.

[18] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (1996). A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. International journal for numerical methods in engineering, 39(22), 3839-3866.

[19] Perrone N., Kao R. A general finite difference method for arbitrary meshes, Computer & Structures 1975; 5: 45-58.

[20] Turner M.J., Clough R.W., Martin HC, Topp L.J. 1956. Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aeron. Sci.; 23:805-823.

[21] Zienkiewicz O.C. 2004. The birth of the finite element method and of computational mechanics. Int. J. Numer. Meth. in Engng. 60: 3-10.

[22] Casasús, A. (2011) Aplicación del método de las diferencias finitas generalizadas a problemas de elasto-dinámica. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

[23] García, A. (2018). Diferencias finitas generalizadas en 2D aplicadas a problemas no lineales. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

[24] Muelas, A. (2016). Aplicación del método de las diferencias finitas generalizadas a problemas de propagación de ondas en el terreno. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

[25] Ureña, M. (2016). Simulación numérica de problemas sísmicos mediante el método de las diferencias finitas generalizadas. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

[26] Vargas, A.M. (2020). Análisis Matemático de un modelo de ecuaciones en derivadas parciales con términos quimiotácticos. Universidad Complutense de Madrid.

ARTÍCULOS DEL GRUPO (2016-2019)

Gavete L., Benito J.J., Ureña F. Generalized Finite Differences for Solving 3D Elliptic and Parabolic Equations. (2016). Applied Mathematical Modelling. Vol 40, 955-965 DOI: 10.1016/j.apm.2015.07.003.\

Salete E., Benito J.J., Ureña F., Gavete L., Ureña M., García A.. Stability of PML regions in GFDM for wave problems. (2017). Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol 312, 231--239 \ \ DOI: [\](http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.05.027)

Gavete L., Ureña F., Benito J. J., García A., Ureña M., Salete E. Solving second order non-linear elliptic partial differential equations using generalized finite difference method. (2017). Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol 318, 378- 387 DOI: [\](http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.07.025)

Ureña M., Benito J. J., Ureña F., Salete E., Gavete L. Application of Generalised Finite Difference Method to reflection and transmission problems in seismic SH waves propagation. (2018). Mathematical Methods in the Applied Sciences. Vol 4, ISSUE 6, 2328-2339 DOI: 10.1002/mma.4268 ([\](http://wileyonlinelibrary.com))

Benito J. J., Ureña F., Gavete L., Salete E., Ureña M. Implementation with Generalized Finite Differences of the displacements and velocity-stress formulations of seismic wave propagation problem. (2017). Applied Mathematical Modelling. Vol 52, 1-14 DOI: 10.1016/j.apm.2017.07.017.\

Ureña M., Benito J. J., Ureña F., García A., Gavete L., Benito L. Adaptive strategies to improve the application of the Generalised Finite Differences Method in 2D and 3D. (2018). Mathematical Methods in the Applied Sciences. Vol 41, 7115-7129. DOI: 10.1002/mma.4675.\

Ureña F., Gavete L., García A., Benito J. J., Vargas A.M. Solving second order non-linear parabolic pde's using generalized finite difference method. (2019) Journal of Computational and

Applied Mathematics. Vol 354. 221-241 DOI: 10.1016/j.cam.2018.02.016.\

Benito J. J., Ureña F., Ureña M., Salete E., Gavete L. A new meshless approach to deal with interfaces in seismic problems. (2018) Applied Mathematical Modelling. Vol 58, 447-458 DOI: 10.1016/j.apm.2018.02.014.\

Gavete L., Ureña F., Benito J. J., Ureña M., Gavete M.L. Solving elliptical equations in 3D by means of an adaptive refinement in generalized finite differences. (2018). Mathematical Problems in Engineering. Hindawi. Vol Pág 14 DOI: 10.1155/2018/9678473.\

Benito J. J., Ureña F., Ureña M., Salete E., Gavete L. Schemes in generalized finite differences for seismic wave propagation in Kelvin-Voigt viscoelastic media. (2018) Engineering Analysis with Boundary Elements. Vo 95. 25-32 //doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.06.017.\

Gavete M.L., Vicente F., Gavete L., Ureña F., Benito J.J. Numerical simulation in electrocardiology using an explicit generalized finite difference method. (2019) Biomechanical Journal of scientific and technical research. ISSN: 2574-1241 DOI: 10.26717/BJSTR.2019.13.002454.\

Muelas A., Salete E., Benito J.J., Ureña F., Gavete L., Ureña M. The application of generalized finite differences method (GFDM) for modelling geophysical test. (2019) Journal of Geoscience and Environment Protection. Vol 7. 1-17 ISSN Online: 2327-4344, ISSN Print: 2327-4336, DOI: 10.4236/gep.2019.74001.\

Benito J. J., García A., Gavete M.L., Gavete L., Negreanu M., Ureña F., Vargas A.M.: Numerical simulation of a mathematical model for cancer cell invasion. (2019) Biomechanical Journal of scientific and technical research. Vol 23, Issue 2, 17355-17359 DOI: 10.26717/BJSTR.2019.23.003889.\