



## DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISE DE TENSÕES EM TUBOS CURVOS

ELZA MARIA MORAIS FONSECA

Instituto Politécnico de Bragança  
Departamento de Mecânica Aplicada da ESTIG  
Campus de Sta. Apolónia Apart. 134, 5301-857 Bragança, Portugal  
e-mail: efonseca@ipb.pt, Tel.: 351 273313050, Fax: 351 273313051

FRANCISCO JOSÉ MALHEIRO QUEIRÓS DE MELO

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade de Aveiro  
Campus de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal  
e-mail: fqm@mec.ua.pt, Tel.: 351 234370985, Fax: 351 234 370 985

CARLOS ALBERTO DE MAGALHÃES OLIVEIRA

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Dr. Roberto Frias, s/n 4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: cmoliv@fe.up.pt, Tel.: 351 225081778, Fax: 351 225081440

**Resumo:** Apresenta-se uma formulação para a caracterização do estado de tensão e deformação de sistemas tubulares de parede fina usando o método dos elementos finitos. O elemento de tubo desenvolvido apresenta um campo de deslocamentos para uma casca com o modelo de deformação de semi-membrana. A solução para obter a distorção de qualquer secção do tubo necessita de condições de fronteira do tipo deslocamentos ou forças prescritas. É apresentado um estudo numérico para obtenção do campo de tensões longitudinais de membrana e posterior determinação do factor de flexibilidade em tubos curvos submetidos à flexão pura.

### 1. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE TUBO

#### 1.1. Funções de forma para um elemento de arco fino com dois nós

Para o desenvolvimento deste modelo foram incluídas na formulação algumas hipóteses simplificativas, as quais conduziram no entanto, a resultados bastante aproximados dos obtidos por outras aproximações numéricas ou procedimentos experimentais. A espessura é considerada muito pequena quando comparada com o raio da secção transversal, medido em relação à espessura média. Por sua vez, o raio da secção é também considerado muito inferior ao raio de curvatura do círculo médio. A superfície média é transversalmente inextensível e a contribuição da flexão segundo a direcção longitudinal é considerada desprezável, pelo que o problema será resolvido com base na teoria de semi-membrana. Os parâmetros geométricos considerados para a definição do elemento são o comprimento do arco curvo ( $s$ ), o raio de curvatura média ( $R$ ), a espessura ( $h$ ), o raio da secção recta do tubo ( $r$ ) e o ângulo ao centro ( $\alpha$ ).

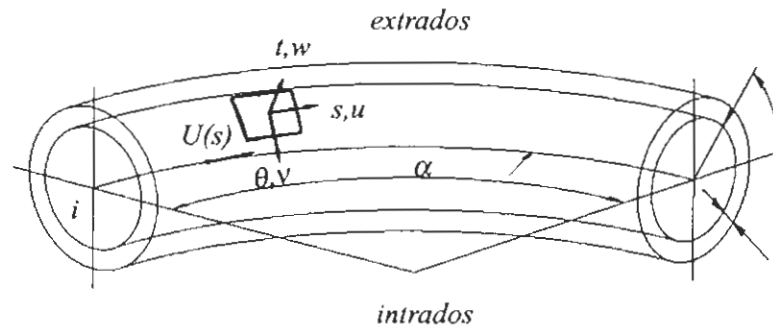


Fig. 1. Elemento de tubo.

O campo de deslocamentos definido para um referencial curvo necessita de um grupo de três deslocamentos sobre a linha média do arco considerado como elemento de viga rígida:  $U$  é o deslocamento tangencial,  $W$  o deslocamento transversal e  $\varphi$  a rotação no plano, conforme se representa na figura 2. Estes parâmetros estão relacionados entre si através de expressões diferenciais simples que são consequência directa da teoria de flexão de vigas de secção transversal indeformável. Constituem hipóteses simplificativas consideradas por Melo e Castro [1] e por Thomson na referência [3].

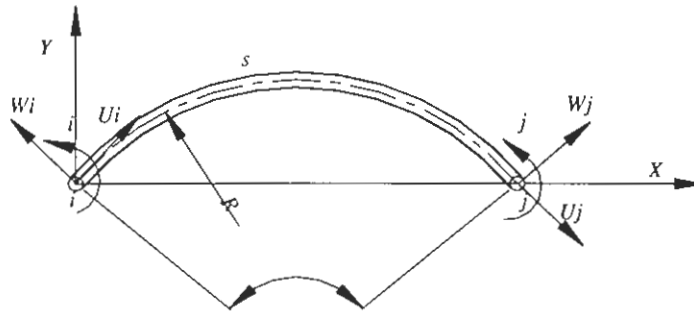


Fig. 2. Parâmetros geométricos para o elemento finito de tubo curvo

Na 1ª hipótese a rotação de cada secção está associada ao deslocamento transversal  $W$  através da equação diferencial, à semelhança da teoria de Euler-Bernoulli:

$$\varphi = \frac{dW}{ds} \quad (1)$$

Na 2ª hipótese, considerando que a solicitação se refere à flexão de uma viga curva no plano de curvatura o deslocamento tangencial  $U$  relaciona-se com  $W$  admitindo que o eixo curvo baricêntrico é de perímetro constante (inextensível):

$$W = -\frac{dU}{ds} R \quad (2)$$

A curvatura é dada pela expressão:

$$k_s = \frac{d^2W}{ds^2} \quad (3)$$

Considerou-se um elemento de tubo com deslocamentos tipo viga curva de alta ordem, sendo necessários seis parâmetros para definir o campo de deslocamentos. Assim  $U$  pode ser aproximado pelo seguinte polinómio de 5ª ordem:

$$U(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 \quad (4)$$

Os coeficientes são determinados em função de condições de fronteira impostas, à passagem de um elemento considerado recto, num sistema local  $(X, Y)$ , para o referencial curvo  $(s)$ , conforme a figura 2.

O campo de deslocamentos genérico determinado, no sistema local de um elemento de tubo com dois nós, é função das seguintes equações:

$$U(s) = (U_i N_{ui} + U_j N_{uj}) + (W_i N_{wi} + W_j N_{wj}) + (\varphi_i N_{\varphi i} + \varphi_j N_{\varphi j}) \quad (5)$$

$$W(s) = -R \left( (U_i N'_{ui} + U_j N'_{uj}) + (W_i N'_{wi} + W_j N'_{wj}) + (\varphi_i N'_{\varphi i} + \varphi_j N'_{\varphi j}) \right) \quad (6)$$

$$\varphi(s) = -R \left( (U_i N''_{ui} + U_j N''_{uj}) + (W_i N''_{wi} + W_j N''_{wj}) + (\varphi_i N''_{\varphi i} + \varphi_j N''_{\varphi j}) \right) \quad (7)$$

As funções de forma são determinadas de acordo com as expressões:

$$N_{ui} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)s + \left(-\frac{10}{L^2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{6}{RL^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^2 + \left(\frac{15}{L^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{8}{RL^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^3 + \left(-\frac{6}{L^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{RL^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^4 \quad (8)$$

$$N_{uj} = \left(\frac{10}{L^2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{4}{RL^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^2 + \left(-\frac{15}{L^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{7}{RL^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^3 + \left(\frac{6}{L^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{RL^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^4 \quad (9)$$

$$N_{wi} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{R} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)s + \left(-\frac{10}{L^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{6}{RL^2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^2 + \left(\frac{15}{L^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{8}{RL^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^3 + \left(-\frac{6}{L^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{RL^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^4 \quad (10)$$

$$N_{wj} = \left(-\frac{10}{L^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{4}{RL^2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^2 + \left(\frac{15}{L^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{7}{RL^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^3 + \left(-\frac{6}{L^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{RL^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)s^4 \quad (11)$$

$$N_{\varphi i} = -\frac{1}{2R} s^2 + \frac{3}{2LR} s^3 - \frac{3}{2L^2R} s^4 + \frac{1}{2L^3R} s^5 \quad (12)$$

$$N_{\varphi j} = -\frac{1}{2LR} s^3 + \frac{1}{L^2R} s^4 - \frac{1}{2L^3R} s^5 \quad (13)$$

## 1.2. Definição do campo de deslocamentos e de deformações

O campo de deslocamentos à superfície da casca é função do deslocamento longitudinal ou tangencial ao longo de  $s$  ( $u$ ), do deslocamento meridional ou tangencial segundo  $\theta$  ( $v$ ) e do deslocamento transversal da casca ( $w$ ), conforme figura 1. Este campo de deslocamentos é obtido por sobreposição de um campo de deslocamentos associado a um tubo de secção circular em que a sua configuração não é alterada para qualquer ponto da secção e por deslocamentos associados à distorção da secção circular por ovalização e empenamento.

A solução apresentada para o cálculo dos deslocamentos de distorção consiste na utilização de um elemento toroidal em que o campo de deslocamentos é definido por combinação de funções lineares, polinómios de 1ª ordem, com desenvolvimentos em série trigonométrica destinados à ovalização e empenamento na secção. O deslocamento da superfície na direcção radial resultante unicamente da ovalização conforme definido por Thomson [3], é dado pela equação 14.

$$w(s, \theta) = \sum_{i \geq 2} a_i \cos i \theta \quad (14)$$

O deslocamento meridional resultante da ovalização é obtido através da expressão 15.

$$v(s, \theta) = - \int \sum_{i \geq 2} a_i \cos i \theta d\theta = \sum_{i \geq 2} -\frac{a_i}{i} \sin i \theta \quad (15)$$

Finalmente o deslocamento longitudinal resultante do empenamento da secção é função da seguinte equação:

$$\Omega(s, \theta) = \sum_{i \geq 2} b_i \cos i \theta \quad (16)$$

Sobrepondo este campo de deslocamentos ao do elemento de viga rígida, equações 5 a 7, teremos o campo de deslocamentos à superfície de uma casca, conforme as equações seguintes:

$$u = U(s, \theta) - r \cos \theta \varphi(s, \theta) + \Omega(s, \theta) \quad (17)$$

$$v = -W(s) \sin \theta + \sum_{i \geq 2} -\frac{a_i}{i} \sin i \theta \quad (18)$$

$$w = W(s) \cos \theta + w(s, \theta) \quad (19)$$

O campo de deformação refere-se a deformações de membrana e a variações de curvatura. Foi adoptado um modelo de deformação de semi-membrana e desprezou-se a rigidez à flexão na direcção longitudinal da casca toroidal, considerando-se a flexão meridional resultante da ovalização, conforme proposto por Melo, Flügge e Kitching [1,4,5].

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \gamma_{s\theta} \\ K_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{R} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$\varepsilon_s$  representa a deformação longitudinal de membrana,  $\gamma_{s\theta}$  a deformação de corte e  $K_\theta$  é a curvatura meridional relativa à ovalização.

Foram considerados 19 deslocamentos nodais (3 de viga e 16 de distorção), tendo sido necessário o desenvolvimento de 8 termos na série de Fourier. A matriz rigidez foi calculada efectuando integrações exactas em  $s$  e  $\theta$ , conforme a equação 21.

$$[K]_{local} = \int_{s=0}^{s=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} [B]_{local}^T [D] [B]_{local} r ds d\theta \quad (21)$$

A matriz transformação T permite a passagem da matriz K para o sistema global, na forma:

$$[K]_{global} = [T]^T [K]_{local} [T] \quad (22)$$

Os deslocamentos nodais são obtidos conforme o seguinte sistema de equações:

$$F_{global} = K_{global} \delta_{global} \quad (23)$$

O vector força pode ser formado por termos que envolvam forças longitudinais, forças transversais e momentos de flexão, ou termos relativos à expansão de Fourier para os deslocamentos de ovalização e

empenamento. Todas as forças e momentos referidos nesta situação devem pertencer ao sistema global do elemento, com exceção das forças relativas aos deslocamentos de ovalização e empenamento.

As tensões são calculadas para um referencial local conforme a expressão 24.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_{s\theta} \\ M_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Eh}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \gamma_{s\theta} \\ K_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

No caso do elemento de tubo considerado, a expressão da tensão longitudinal,  $\sigma_s$ , é referida no folheto médio da casca.

## 2. CASO EM ESTUDO: ANÁLISE DE TENSÕES EM TUBOS CURVOS COM EXTREMOS FLANGEADOS

Na tabela 1 apresentam-se 12 geometrias diferentes para tubos curvos segundo a ISO 1127. Todos estes tubos curvos são estudados tendo em conta o tipo de restrição nas suas extremidades e submetidos ao efeito de um momento flector uniforme. Dada a simetria geométrica e de carregamento, estudou-se metade da estrutura e os resultados apresentam-se para a secção  $s = 0$ , tal qual a figura 3. O material dos tubos tem módulo de elasticidade de  $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu$  é 0.3.

Tabela 1. Parâmetros geométricos

D[mm]	h[mm]	R[mm]	L[mm]
21.30	2	31.95	50.19
33.70	2	50.55	79.40
60.30	2	90.45	142.08
101.60	2	152.40	239.39
323.90	2	485.85	763.17
406.40	3	609.60	957.56
508.00	3	762.00	1196.95
609.60	3	914.40	1436.34
711.20	4	1066.80	1675.73
812.80	4	1219.20	1915.11
914.40	4	1371.60	2154.50
1016.00	4	1524.00	2393.89

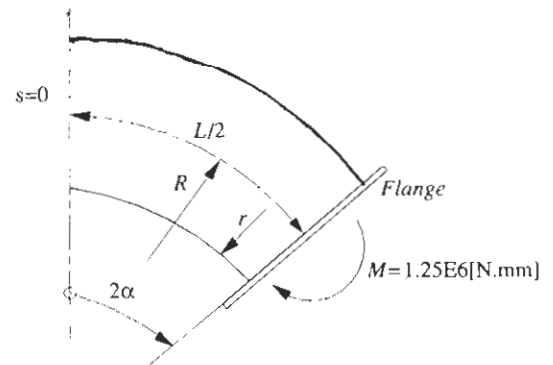
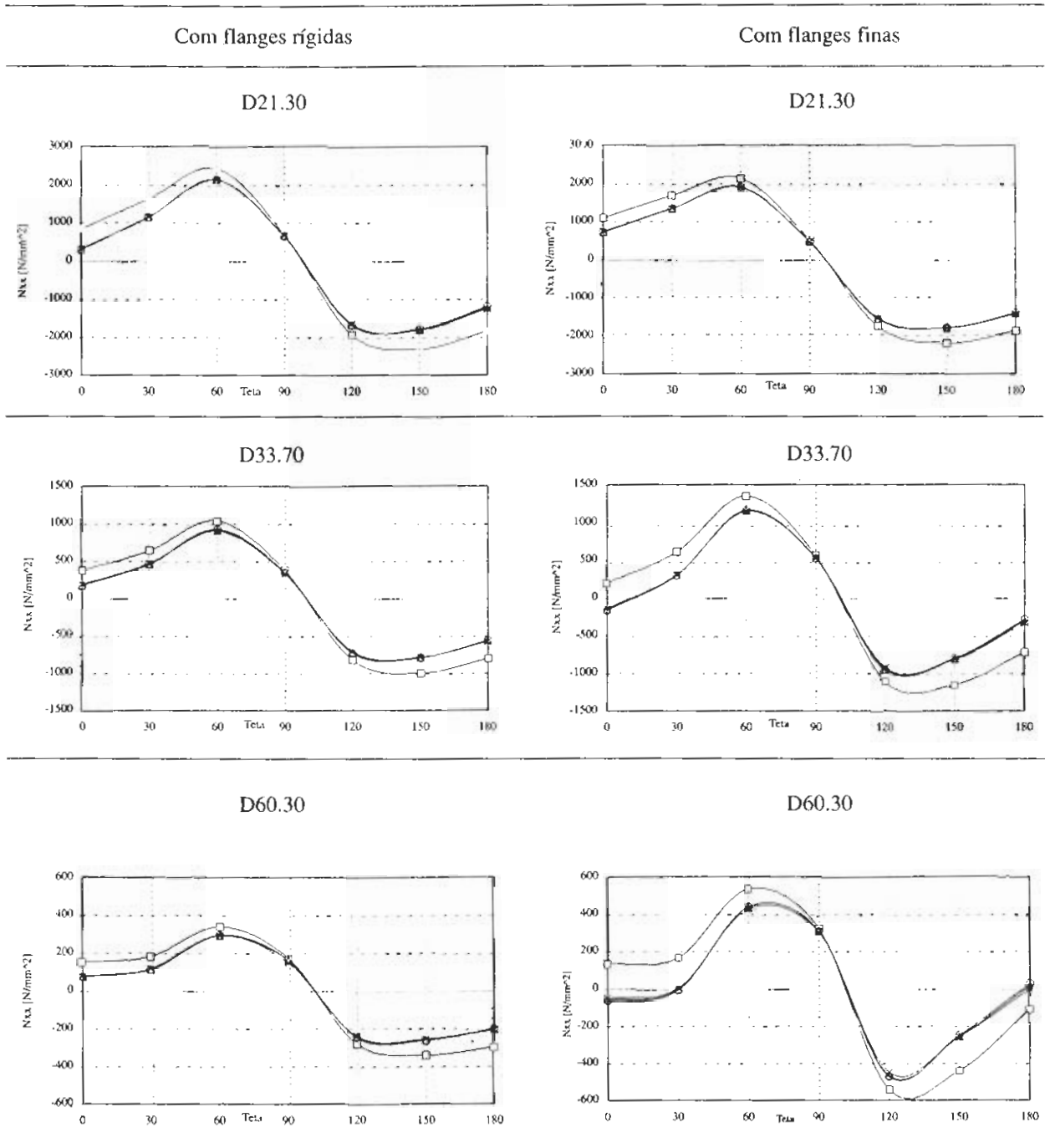
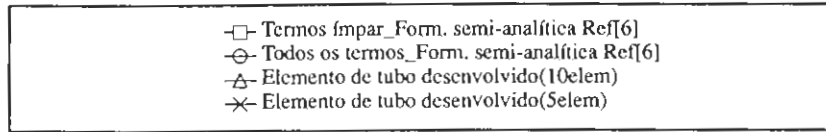


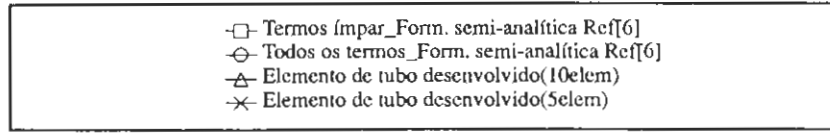
Fig. 3. Geometria do tubo curvo analisado.

Na figura 4 representam-se as tensões longitudinais, para todos os tubos curvos em análise, com flanges finas ou espessas. Usou-se a formulação desenvolvida para o novo elemento finito de tubo curvo, considerando malhas de 5 e 10 elementos. Os resultados obtidos são comparados com os apresentados na referência 6 em que se utilizou uma formulação semi-analítica. Verifica-se que em qualquer tipo de malha de elementos finitos utilizada, a aproximação à solução semi-analítica apresenta bons resultados. De referir que a melhor concordância em relação a resultados de outros autores existe na formulação que utiliza todos os termos da série de Fourier, sendo esta a que mais rapidamente converge para diversas soluções estudadas.

## Legenda:

Fig. 4. Tensões longitudinais na secção equidistante dos extremos ( $s=0$ ).

Legenda:



Com flanges rígidas

Com flanges finas

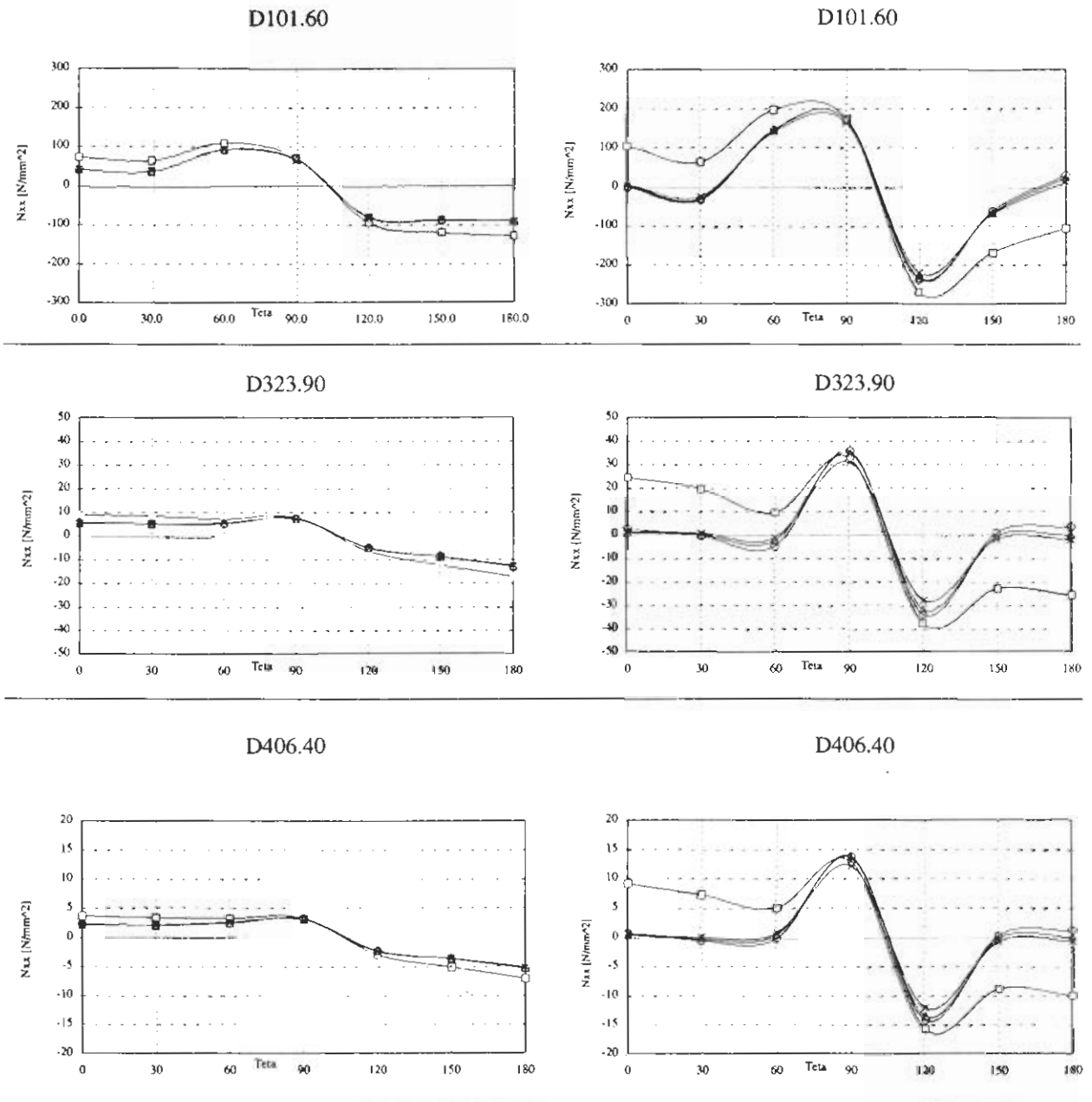


Fig. 4. (continuação). Tensões longitudinais na secção equidistante dos extremos (s=0).

Legenda:

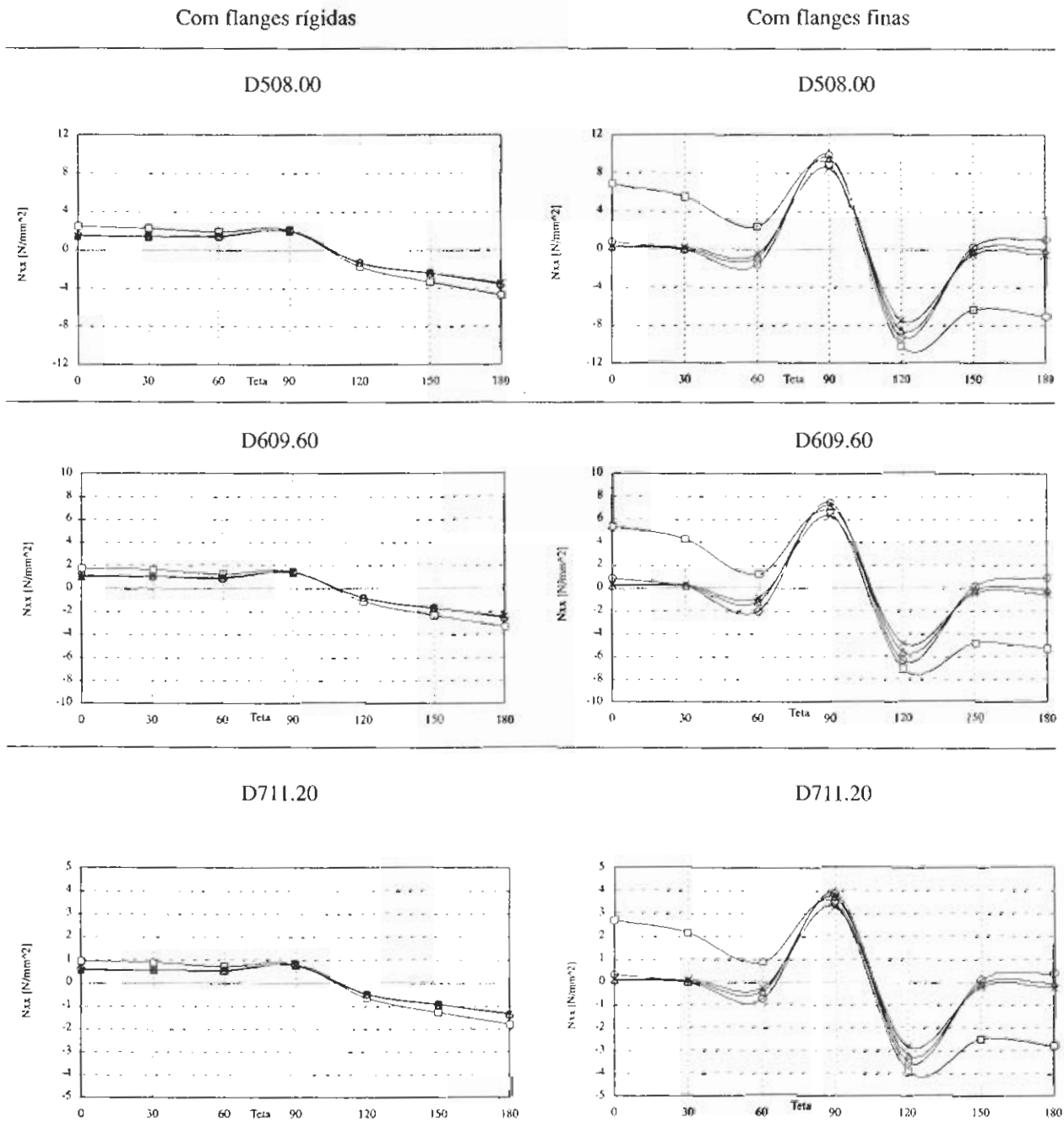
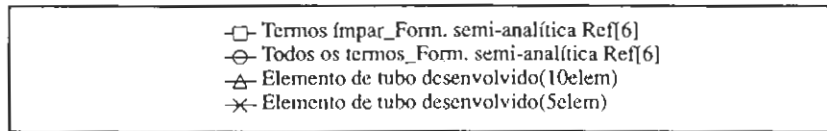


Fig. 4. (continuação). Tensões longitudinais na secção equidistante dos extremos ( $s=0$ ).



Legenda:

- Termos ímpar\_Form. semi-analítica Ref[6]
- Todos os termos\_Form. semi-analítica Ref[6]
- △ Elemento de tubo desenvolvido(10elem)
- × Elemento de tubo desenvolvido(5elem)

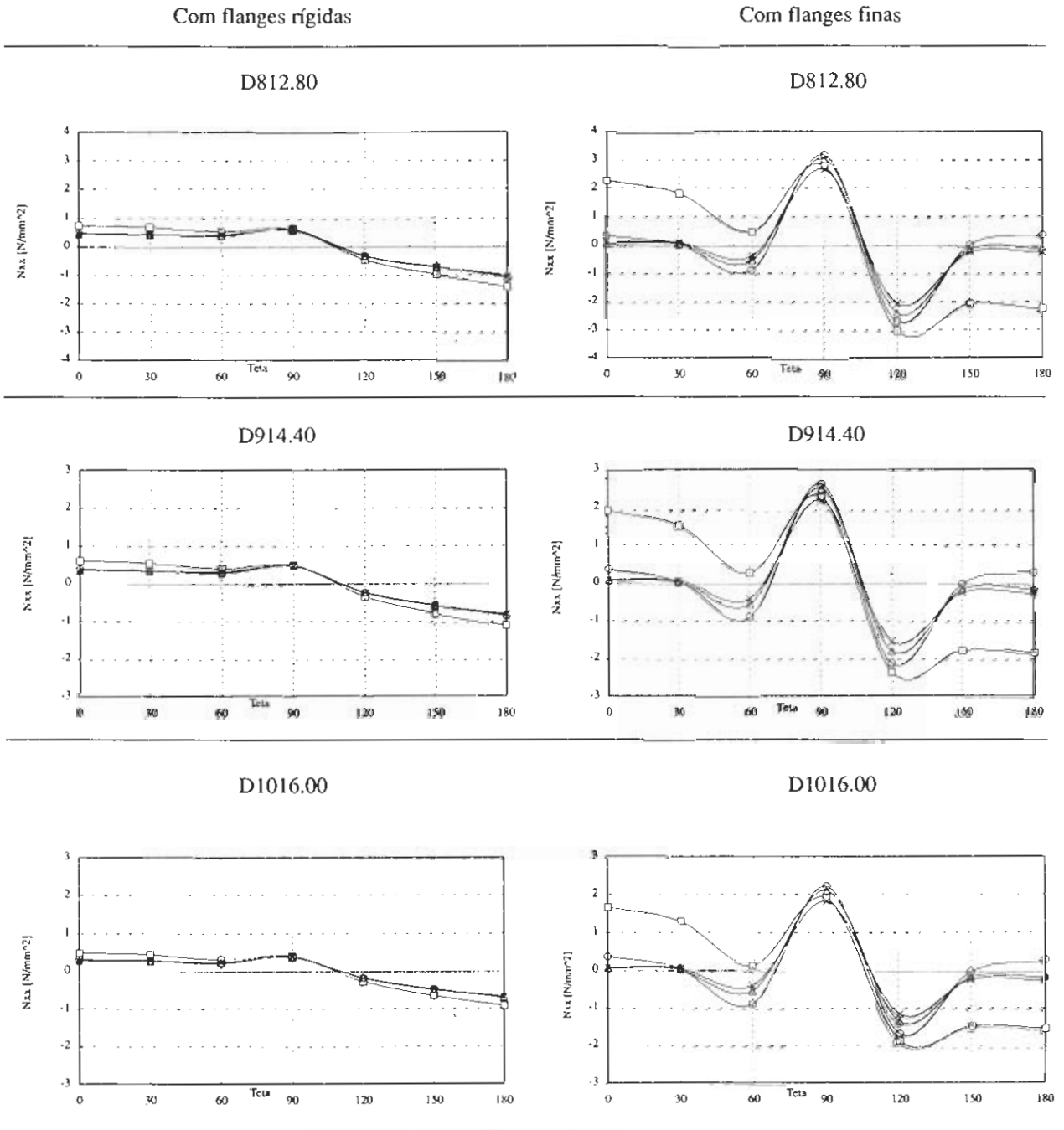


Figura 4 (continuação) - Tensões longitudinais na secção equidistante dos extremos (s=0).

### 3. CÁLCULO DO FACTOR DE FLEXIBILIDADE

De acordo com o código ASME, *American Standards for Mechanical Engineers*, o cálculo do factor de flexibilidade em tubos curvos submetidos a flexão uniforme, é obtido pelas expressões seguintes:

$$K = \frac{1.65}{\bar{h}^{2/3}} \quad (\text{Tubos flangeados}) \quad (25a)$$

$$K = \frac{1.65}{\bar{h}} \quad (\text{Tubos sem flanges}) \quad (25b)$$

Onde  $\bar{h}$  é o parâmetro do tubo dado por:

$$\bar{h} = \frac{hR}{r^2} \quad (26)$$

A figura 5 compara os resultados obtidos com o elemento de tubo desenvolvido, com a formulação semi-analítica apresentada na referência 6, considerando todos os tubos anteriormente referidos com flanges rígidas, com a curva ASME, equação 25a.

A figura 6 mostra os resultados obtidos com os mesmos tubos curvos, mas utilizando flanges finas. Neste caso os resultados deverão ser comparados com a curva ASME, equação 25b.

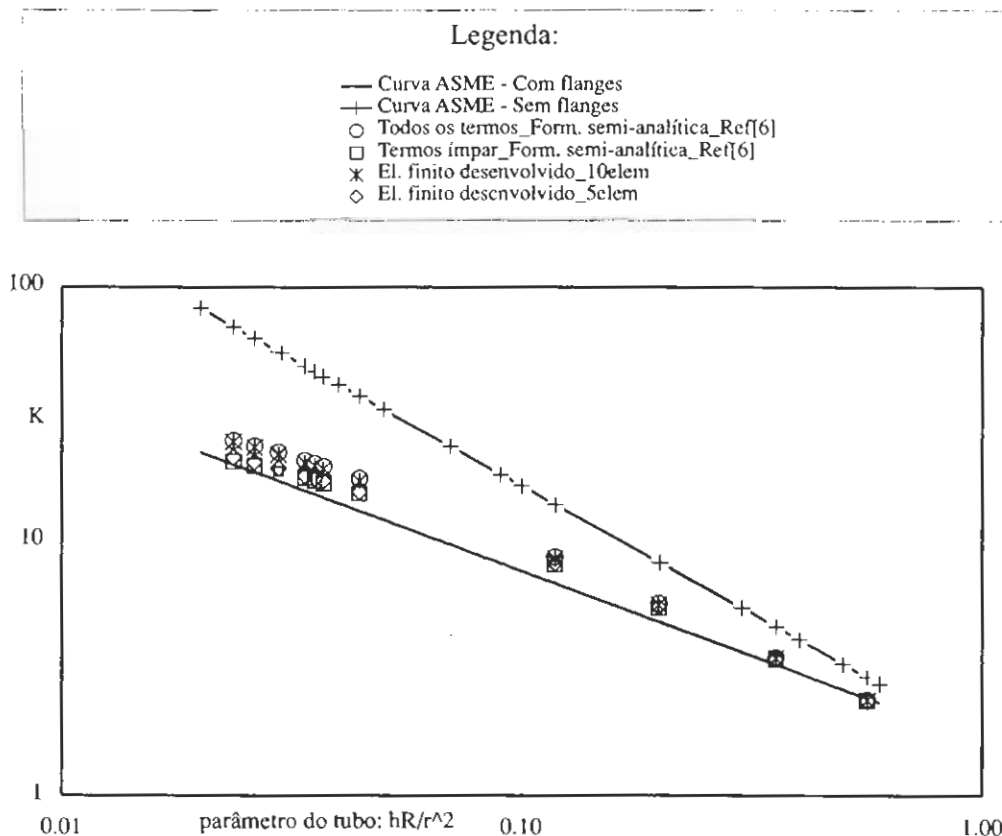


Fig. 5. Factor de flexibilidade para tubos curvos com flanges rígidas.

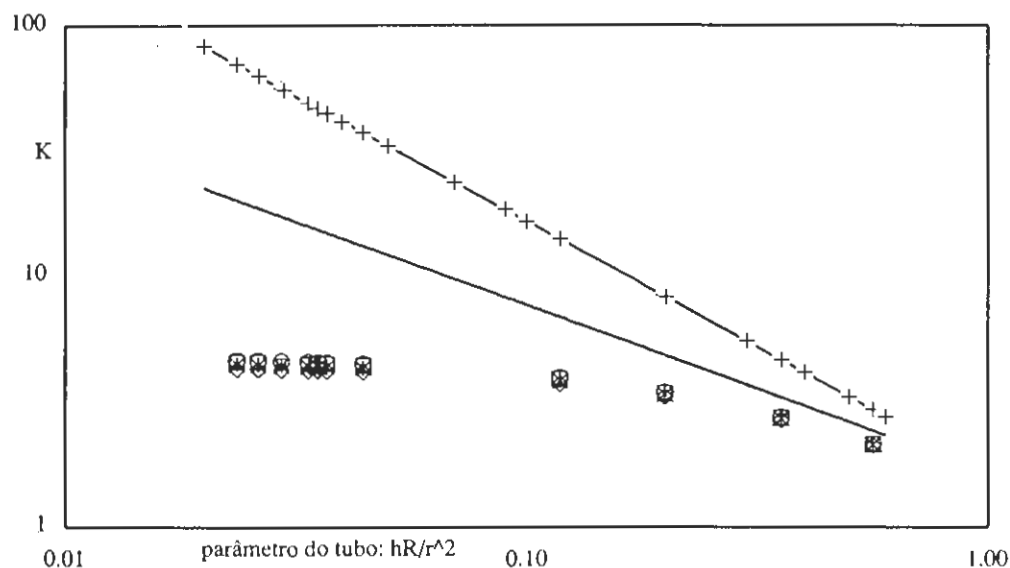


Fig. 6. Factor de flexibilidade para tubos curvos com flanges finas.

#### 4. CONCLUSAO

O elemento finito desenvolvido permite obter campos de tensões para estruturas tubulares usando uma formulação com base na teoria de cascas finas. A solução combina uma formulação do campo de deslocamentos de uma viga curva com termos da série de Fourier para a modelação da ovalização e empenamento da superfície tubular.

Os resultados obtidos apresentaram-se em boa concordância com os relatados na referência 6 em que se utilizou uma formulação semi-analítica. O uso deste elemento permite um desempenho computacional elevado no que respeita à facilidade da geração de malhas, na simulação das condições de fronteira em tubos de parede fina com ou sem restrições de bordo, apresentando bons resultados mesmo com malhas menos refinadas.

A complexidade de análises deste tipo de estruturas exige o recurso a métodos numéricos de elevado desempenho, pelo que se recorreu ao uso do método dos elementos finitos.

#### REFERÊNCIAS

- [1] F.J.M.Q. Melo and P.M.S.T. Castro, "A reduced integration Mindlin beam element for linear elastic stress analysis of curved pipes under generalized in-plane loading", *Computers & Structures* **43**, 787-794 (1992).
- [2] L. Madureira and F.Q. Melo, "A hybrid formulation in the stress analysis of curved pipes", *Engineering Computations* **17**, 970-980 (2000).
- [3] G. Thomson, "In plane bending of smooth pipe bends", PhD Thesis, University of Strathclyde, Scotland, UK (1980).
- [4] W. Flugge, *Thin Elastic Shells*, Springer, Berlin (1973).
- [5] R. Kitching, "Smooth and mitred pipe bends", Gill, S.S. (Ed.), *The stress analysis of pressure vessels and pressure vessels Components*, Chapter 7, Pergamon Press, Oxford (1970).
- [6] E. M. M. Fonseca, F. J. M. Q. de Melo and C. A. M de Oliveira "Determination of flexibility factors on curved pipes with end restrains using a semi-analytic formulation", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. **79/12**, pp. 829-840, 2002.

## THE DEVELOPMENT OF A FINITE ELEMENT FOR THE STRESS ANALYSIS OF CURVED PIPES

**Abstract:** A formulation for characterization thin piping systems stresses and deformation situation using the finite element method is presented. The element pipe developed presents a displacement field for a toroidal shell semi-membrane deformation model. The solution for the pipe section distortion depends upon boundary conditions of prescribed displacements or forces. A numerical study for the longitudinal stresses of membrane is obtained and the flexibility factor is determined for curved pipes bends.