



## SOLUÇÃO HÍBRIDA ANALÍTICO-NUMÉRICA PARA PROBLEMAS TÉRMICOS EM DUTOS DE SETORES CIRCULARES

THIAGO ANTONINI ALVES<sup>1</sup>, RICARDO ALAN VERDÚ RAMOS<sup>2</sup>, CASSIO  
ROBERTO MACEDO MAIA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR  
Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC)

Câmpus Ponta Grossa, Av. Monteiro Lobato, s/nº, km 04, CEP 84.016-210, Ponta Grossa/PR, Brasil

<sup>2</sup>Universidade Estadual Paulista - Unesp/Ilha Solteira

Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica (DEM)

Caixa Postal 31, CEP 15.385-000, Ilha Solteira/SP, Brasil

(Recibido 27 de febrero de 2019, para publicación 26 de junio de 2019)

**Resumo** – No presente trabalho, a transferência de calor por convecção forçada foi calculada para o escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos *Newtonianos* com perfil de temperatura de entrada uniforme no interior de dutos de setores circulares submetidos a condições de contorno de temperatura de parede constante (condição de *Dirichlet*). Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação de condições de contorno em problemas com essa geometria, uma Transformação Conforme foi empregada visando efetuar uma mudança de coordenadas apropriada e, então, a equação da energia resultante foi resolvida através do emprego da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG sobre ela. O perfil da temperatura média de mistura, o desenvolvimento dos números de *Nusselt* local e médio e o comprimento de entrada térmica foram, então, determinados para diferentes configurações geométricas dos dutos. Estes resultados foram comparados, quando possível, com aqueles disponíveis na literatura e apresentaram uma boa concordância.

**Palavras-chave** – Convecção forçada, transformada integral, transformação conforme, geometria de setor circular.

### 1. INTRODUÇÃO

Uma importante linha de pesquisa científico-tecnológica é a obtenção de técnicas e procedimentos que possibilitem a interpretação mais realista possível dos fenômenos naturais, proporcionando assim, resultados precisos e confiáveis. Em particular, a solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos sempre representou um grande desafio à Engenharia Mecânica, uma vez que, as equações diferenciais fundamentais que regem os princípios de conservação, são, em via de regra, de difícil solução [1]. Recentemente, pesquisadores estão concentrando seus esforços no desenvolvimento de técnicas híbridas analítico-numéricas que garantam precisão e confiabilidade nos resultados por elas obtidos [2-3]. Em particular, a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG [4], é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser eficaz na solução de problemas de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor e Massa, os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas. A TTIG permite um tratamento analítico elegante e formal proporcionando um menor esforço numérico-computacional para a obtenção de solução de problemas [5].

Neste contexto, foi proposta para o presente trabalho, a composição de duas ferramentas matemáticas na obtenção de solução de uma classe de problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em geometria não-convencional [6]. Mais precisamente, foi analisado o problema térmico envolvido no escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos *Newtonianos* com perfil de temperatura de entrada uniforme no interior de dutos com geometria de setor circular e submetidos a condições de contorno de temperatura de parede constante (condição de *Dirichlet*). Para facilitar

a aplicação das condições de contorno, inicialmente proceder-se-á uma mudança de variáveis através de um sistema de coordenadas que seja resultado de uma Transformação Conforme [7]. Este procedimento simplifica o tratamento dos operadores *Laplacianos* no novo sistema de coordenadas. Feito isso, para a obtenção do campo de temperatura no escoamento, a TTIG foi empregada sobre a equação da energia. Os parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de *Nusselt* local e médio, comprimento de entrada térmica foram, então, calculados para as diversas configurações da geometria analisada e, comparados, quando possível, com os disponíveis na literatura.

## 2. PROCEDIMENTO HÍBRIDO ANALÍTICO-NUMÉRICO

Para a formulação matemática do problema foi considerado um escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento no interior de dutos de setores circulares, com perfil de temperatura de entrada uniforme e temperatura de parede constante (condição de contorno de *Dirichlet*). As propriedades dos fluidos permanecem constantes em todo o domínio e os efeitos da dissipação viscosa e da condução axial foram desprezados. Desta forma, para fluidos *Newtonianos*, a equação da energia para o sistema de coordenadas (Fig. 1a), é escrita como:

$$\rho c_p w(x,y) \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = k \nabla^2 T(x,y,z), \quad \{(x,y) \in \Omega, z > 0\}, \quad (1)$$

sendo que,  $\rho$  representa a massa específica do fluido,  $c_p$  é o calor específico a pressão constante,  $k$  é a condutividade térmica,  $w$  é a velocidade e  $T$  é a temperatura.

As condições de entrada e de contorno são dadas por:

$$T(x,y,z) = T_0, \quad \{(x,y) \in \Omega, z = 0\}, \quad (2)$$

$$T(x,y,z) = T_p, \quad \{(x,y) \in \Gamma, z > 0\}, \quad (3)$$

sendo que,  $T_0$  e  $T_p$  são as temperaturas de entrada e de parede, respectivamente,  $\Gamma$  é o contorno e  $\Omega$  é o domínio da geometria de setor circular.

O perfil de velocidade  $w(x,y)$  do escoamento no interior do duto de setor circular é obtido por meio da Técnica da Transformada Integral Generalizada, conforme apresentado em Antonini Alves *et al.* [8].

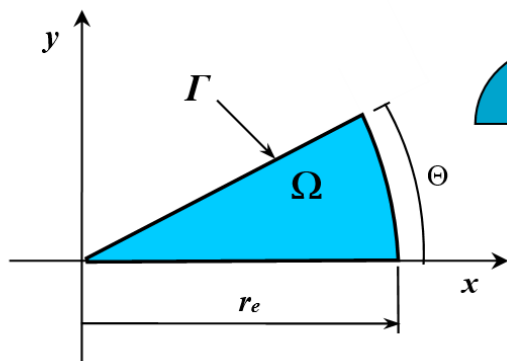


Fig. 1.a. Geometria proposta para o problema.

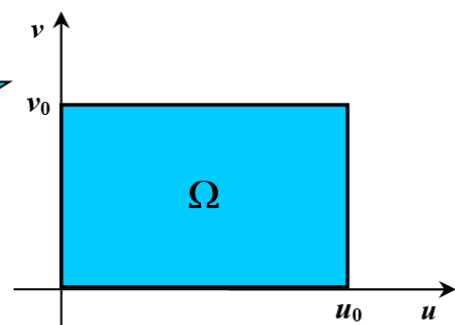


Fig. 1.b. Transformação do domínio no plano  $(x,y)$  para o plano  $(u,v)$ .

### 2.1. Adimensionalização

Reescrevendo a equação da energia e as condições de contorno, Eqs. (1)-(3), na forma adimensional, tem-se, respectivamente, que:

$$W(X,Y) \frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial Y^2}, \tag{4}$$

$$\theta(X,Y,Z) = 1, \quad \{(X,Y) \in \Omega, Z = 0\}, \tag{5}$$

$$\theta(X,Y,Z) = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, Z > 0\}, \tag{6}$$

com:

$$X = \frac{x}{D_h}, \quad Y = \frac{y}{D_h}, \quad Z = \frac{z}{Pe D_h}, \quad D_h = \frac{4 A_S}{Per}, \tag{7}$$

$$W(X,Y) = \frac{w(X,Y)}{w_{méd}}, \quad Pe = \frac{\rho c_p w_{méd} D_h}{k}, \tag{8}$$

$$\theta(X,Y,Z) = \frac{T(X,Y,Z) - T_p}{T_o - T_p}, \tag{9}$$

sendo que,  $D_h$  representa o diâmetro hidráulico,  $Pe$  o Número de Péclet,  $A_S$  a área da seção transversal,  $Per$  o perímetro do contorno analisado e  $w_{méd}$  a velocidade média do fluido.

### 2.2. Transformação de Coordenadas

A geometria de setor circular é proveniente da seguinte Transformação Conforme:

$$\xi = r_e e^{i\omega}, \tag{10}$$

sendo que,  $\xi$  é a variável complexa no plano  $z$ :  $\xi = X + iY$  e  $\bar{\omega}$  é o conjugado da variável complexa no plano transformado  $\omega$ :  $\omega = u + iv$ . Esta relação permite transformar o domínio do setor circular no plano  $(x,y)$ , Fig. 1(a), em um domínio retangular no plano  $(u,v)$  conforme ilustrado na Fig. 1(b).

As relações de transformação de coordenadas, os coeficientes métricos  $h_u$  e  $h_v$  e o Jacobiano  $J(u,v)$  são dadas por:

$$X = r_e e^{-v} \cos(u), \quad Y = r_e e^{-v} \sen(u), \quad Z = z. \tag{11}$$

$$h_u(u,v) = h_v(u,v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2} = r_e e^{-v}, \tag{12}$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = r_e^2 e^{-2v}. \tag{13}$$

Este novo sistema de coordenadas é ortogonal. Como pode ser observado, o arco externo do setor circular é dado pela reta  $v = 0$  no novo sistema de coordenadas e o arco interno pela reta  $v = v_0$ , com  $v_0 = \ln(r_e/r_i) = \ln(r^*)$ . Além disso, obtém-se a geometria de setor circular fazendo  $v_0 \rightarrow \infty$ .

Com estas novas variáveis definidas, a equação da energia e as condições de entrada e de contorno, Eqs. (4)-(6), transformam-se em:

$$H(u,v) \frac{\partial \theta(u,v,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial v^2}, \quad \{(u,v) \in \Omega\}, \quad (14)$$

$$\theta(u,v,Z) = 1, \quad \{(u,v) \in \Omega, Z = 0\}, \quad (15)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{u = 0, 0 < v < v_0, Z > 0\}, \quad (16)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{0 < u < u_0, v = 0, Z > 0\}, \quad (17)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{u = u_0, 0 < v < v_0, Z > 0\}, \quad (18)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{0 < u < u_0, v = v_0, Z > 0\}, \quad (19)$$

sendo que,  $H(u,v) = J(u,v) W(u,v)$ .

### 2.3. Aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG

Para a solução da equação da energia no novo sistema de coordenadas, aplica-se a TTIG para proceder à remoção das derivadas parciais de segunda ordem. Para esta finalidade, o potencial  $\theta(u,v,Z)$  é escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Sendo assim, é realizada a aplicação da Transformada Integral por partes. Neste sentido, inicialmente, é considerado o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0\}, \quad (20)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(u_0) = 0. \quad (21)$$

Os autovalores e as autofunções associados a este problema são dados, respectivamente, por:

$$\mu_i = \frac{i\pi}{u_0}, \quad \psi_i(u) = \text{sen}(\mu_i u), \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (22)$$

Essas autofunções são ortogonais, o que permite o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v,Z) = \int_0^{u_0} K_i(u) \theta(u,v,Z) du, \quad \text{transformada}, \quad (23)$$

$$\theta(u,v,Z) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v,Z), \quad \text{inversa}, \quad (24)$$

sendo que  $K_i(u)$  são as autofunções normalizadas dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad N_i = \int_0^{u_0} \psi_i^2(u) du = \frac{u_0}{2}. \quad (25)$$

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas  $K_i(u)$  com a equação da energia e utilizando-se das condições de contorno e das equações que definem o problema auxiliar de autovalor, obtém-se a primeira transformação da equação diferencial:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v,Z)}{\partial Z} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v,Z) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v,Z)}{\partial v^2}, \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (26)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) K_j(u) H(u,v) du \tag{27}$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada  $v$ , considera-se o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \varphi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\}, \tag{28}$$

$$\phi(0)=0, \quad \varphi(v_0) = 0. \tag{29}$$

Os autovalores e as autofunções para este problema são:

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{v_0}, \quad \phi_m(v) = \text{sen}(\lambda_m v), \quad m = 1,2,3... \tag{30}$$

As autofunções acima definidas têm a propriedade de ortogonalidade que permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{im}(Z) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) \theta(u,v,Z) du dv, \quad \text{transformada}, \tag{31}$$

$$\theta(u,v,Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \quad \text{inversa}, \tag{32}$$

sendo que,  $Z_m(v)$  são as autofunções normalizadas:

$$Z_m(v) = \frac{\varphi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad M_m = \int_0^{v_0} \varphi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2} \tag{33}$$

Efetua-se a remoção da derivada parcial relativa a variável  $v$  através do produto interno das autofunções normalizadas  $Z_m(v)$  com a equação diferencial transformada em  $u$  e fazendo uso das condições de contorno e das relações de ortogonalidade relativas ao segundo problema de autovalor. Obtém-se assim, a Transformação Integral da equação da energia, dada pela seguinte equação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0, \quad n = 1,2,3... \tag{34}$$

$$B_{ijmn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_j(u) K_i(u) Z_m(v) Z_n(v) H(u,v) du dv \tag{35}$$

sendo que os parâmetros  $B_{ijmn}$  são integráveis e, portanto, conhecidos.

A solução do sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias dado permite a obtenção do potencial transformado, quando submetido à condição de entrada transformada dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) \theta(u,v,0) du dv \tag{36}$$

O potencial transformado  $\tilde{\theta}_{im}(Z)$  pode ser obtido numericamente resolvendo o sistema de equações diferenciais correspondente e truncando-se a expansão para uma dada ordem  $M$  e  $N$ , de acordo com a precisão estabelecida:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0 \quad (37)$$

O potencial temperatura pode, então, ser reconstruído fazendo uso da transformada inversa, para a expansão truncada até a ordem  $M$  e  $N$ ,

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z) \quad (38)$$

e, finalmente, realiza-se a determinação dos parâmetros térmicos de interesse. Obviamente, quanto maior  $N$  e  $M$  maior será a precisão dos resultados.

## 2.4. Parâmetros Térmicos de Interesse

### 2.4.1. Temperatura Média de Mistura

A temperatura adimensional média de mistura é dada por:

$$\theta_{med}(Z) = \frac{1}{A_S} \int_{\Omega} \theta(X, Y, Z) W(X, Y) d\Omega \quad (39)$$

Dessa forma, no plano  $(u, v)$ ,  $\theta_{med}$  é dada por:

$$\theta_{med}(Z) = \frac{1}{A_S} \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} \theta(u, v, Z) W(u, v) J(u, v) dv du \quad (40)$$

### 2.4.2. Número de *Nusselt* Local

O número de *Nusselt* local é definido da seguinte forma:

$$Nu(Z) = -\frac{1}{4\theta_{med}(Z)} \frac{d\theta_{med}(Z)}{dZ} \quad (41)$$

### 2.4.3. Número de *Nusselt* Médio

O número de *Nusselt* médio pode ser obtido por integração analítica dada por:

$$Nu_{med}(Z) = \frac{1}{Z} \int_0^Z Nu(Z) dZ = -\frac{1}{4Z} \ln \theta_{med}(Z) \quad (42)$$

### 2.4.4. Comprimento de Entrada Térmico

De acordo com Shah & London [9], o comprimento de entrada térmica é definido como sendo a posição em que o número de *Nusselt* local é 5% maior que o número de *Nusselt* na região em que o fluido está desenvolvido termicamente (número de *Nusselt* limite). Desta forma,

$$L_{th} = \text{raiz positiva de } \{1,05 Nu(\infty) - Nu(Z) = 0\} \quad (43)$$

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a obtenção de resultados numéricos, o Método da Quadratura de *Gauss* foi utilizado para efetuar o cálculo das integrais envolvidas nos coeficientes  $B_{ijmn}$  e nos demais parâmetros físicos de interesse. Desta forma, foi necessária, também, a determinação das autofunções e do *Jacobiano* da transformações nos

pontos de quadraturas. Feito isso, o sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente para a determinação dos coeficientes do potencial transformado por meio da utilização da rotina *DIVPAG* da Biblioteca *IMSL* [10].

Para a determinação dos coeficientes do potencial transformado, a expansão da série que representa a equação da energia, Eq. (38), foi truncada para diversas ordens  $M$  e  $N$ . Por meio de uma análise de convergência, foi verificado que  $r^* = 10^{-3}$  é um excelente valor para a obtenção da geometria de setor circular. Além disso, em decorrência desta análise foi constatado que a convergência da temperatura adimensional média de mistura é mais lenta principalmente na região próxima a entrada do duto e/ou para  $5^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$ , sendo necessário considerar truncamentos da série com ordem superior a  $M = N = 35$ , para alcançar pelo menos quatro dígitos de precisão. Para a região em que  $\Theta > 90^\circ$  foi observado que a série que determina o potencial temperatura converge mais rapidamente, sendo necessário a consideração de 30 termos na expansão da série em cada direção. Ressalta-se que o tempo máximo de processamento necessário para o cálculo dos parâmetros térmico de interesse é de aproximadamente 30 segundos em um microcomputador pessoal comum (processador de 3,6 GHz com 16 GB de memória RAM).

Nas Figuras 2, 3 e 4 são apresentados os resultados numéricos dos comportamentos da temperatura adimensional média de mistura e dos números de *Nusselt* local e médio, respectivamente, para diversos dutos de geometria de setor circular em função do ângulo  $\Theta$ . Além disso, é apresentado na Fig. 5 e na tabela. 1, o comportamento do número de *Nusselt* limite e do comprimento de entrada térmica.

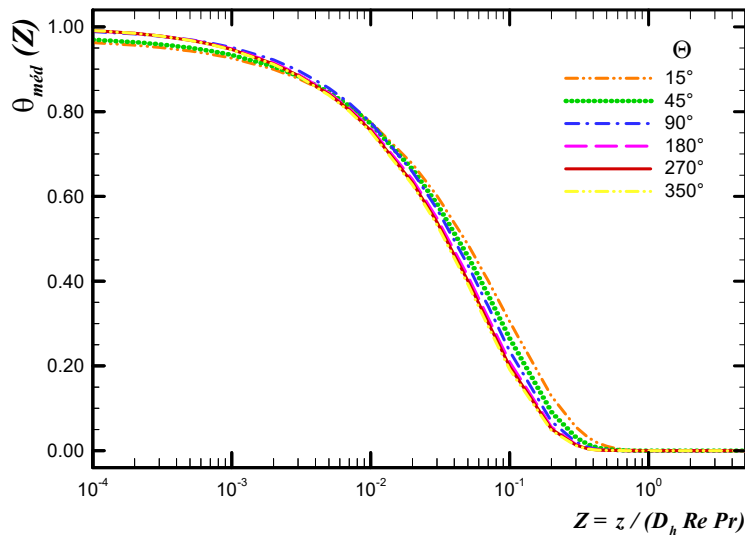


Fig. 2. Temperatura adimensional média de mistura para diversas configurações dos dutos de setores circulares.

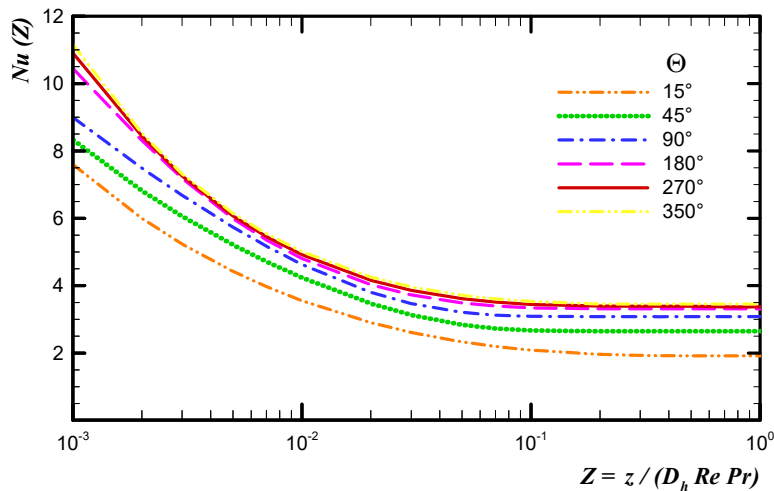


Fig. 3. Número de *Nusselt* local para diversas configurações dos dutos de setores circulares.

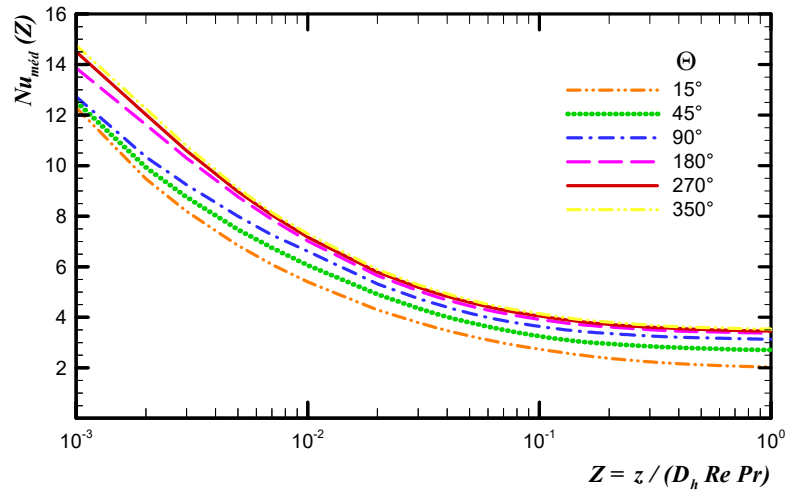


Fig. 4. Número de Nusselt médio para diversas configurações dos dutos de setores circulares.

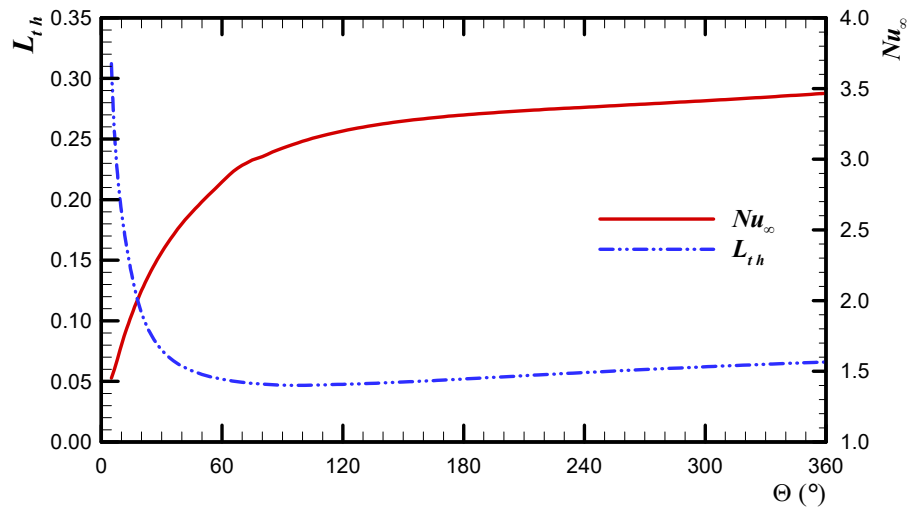


Fig. 5. Número de Nusselt limite e do comprimento de entrada térmica para o escoamento em dutos de setores circulares.

Tabela 1. Parâmetros térmicos relevantes para o escoamento em dutos de setores circulares.

$\Theta$	$Nu_{\infty}$	$Nu_{méd}$ ( $Z=10^{-3}$ )	$Nu_{méd}$ ( $Z=10^{-2}$ )	$Nu_{méd}$ ( $Z=10^{-1}$ )	$Nu_{méd}$ ( $Z=10^0$ )	$L_{th}$
5°	1,451	12,07	5,25	2,49	1,61	0,3122
10°	1,703	13,64	5,97	2,86	1,88	0,1799
15°	1,916	12,26	5,39	2,73	2,02	0,1390
30°	2,365	12,29	5,72	3,03	2,43	0,0743
45°	2,646	12,46	6,01	3,24	2,70	0,0588
90°	3,078	12,63	6,55	3,63	3,13	0,0469
120°	3,200	12,94	6,76	3,77	3,26	0,0476
150°	3,270	13,21	6,89	3,86	3,33	0,0495
180°	3,313	13,47	6,97	3,92	3,37	0,0520
210°	3,343	13,62	7,05	3,97	3,41	0,0547
240°	3,367	13,77	7,10	4,01	3,43	0,0573
270°	3,390	13,89	7,14	4,05	3,46	0,0598
300°	3,414	14,01	7,20	4,08	3,48	0,0620
330°	3,439	14,11	7,24	4,12	3,51	0,0641
350°	3,457	14,17	7,26	4,14	3,53	0,0654
360°	3,466	14,19	7,28	4,16	3,54	0,0660



Tabela 2. Comparação dos resultados obtidos com os disponíveis na literatura para o número de *Nusselt* limite no escoamento em dutos de setores circulares.

$\Theta$	Presente Trabalho	Trupp & Lau [11]	Ben-Ali et al. [12]	Etemad & Bakhtiari [13]	Lin et al. [14]
5°	1,451	-	1,423	-	-
10°	1,703	1,686	1,692	-	-
15°	1,916	1,898	1,901	-	-
30°	2,365	2,342	2,341	2,266	2,383
45°	2,646	2,625	-	-	-
90°	3,079	-	3,060	3,052	-
120°	3,200	3,188	3,191	-	-
150°	3,270	-	3,268	-	-
180°	3,313	3,316	3,316	3,239	-
210°	3,343	-	3,347	-	-
240°	3,367	-	3,370	-	-
270°	3,390	-	3,389	-	-
300°	3,414	-	3,407	-	-
330°	3,439	-	3,427	-	-
350°	3,457	-	3,443	-	-

Para o problema difusivo-convectivo analisado no escoamento laminar interno em dutos de setores circulares, vários trabalhos foram encontrados na literatura [11-14] possibilitando assim, a comparação dos resultados na tabela 2. Desta análise, foi verificado uma boa concordância entre resultados apresentados e os disponíveis na literatura, principalmente com os obtidos numericamente pelo Método de Diferenças Finitas apresentados em Trupp & Lau [11].

#### 4. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi proposta a composição de duas ferramentas matemáticas, a Transformação Conforme e a Técnica da Transformada Integral Generalizada, na solução de uma classe de problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em domínios de geometrias não-convencionais. Para tal, foram analisados os parâmetros térmicos do escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos *Newtonianos* no interior de dutos de setores circulares submetidos às condições de contorno de *Dirichlet* (temperatura prescrita na parede) e perfil de temperatura de entrada uniforme. Diante da necessidade da implantação de um sistema de coordenadas que facilitasse o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno do problema em questão, foi empregada uma Transformação Conforme capaz de gerar o domínio analisado. Este procedimento simplificou significativamente o tratamento dos operadores *Laplacianos* no novo sistema de coordenada. A Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG foi empregada na equação da energia visando a remoção das derivadas espaciais de segunda ordem, transformando assim, a equação que representa o fenômeno em um problema de estrutura mais simples, que pode ser resolvido analítica ou numericamente. Para o problema estudado, a aplicação da TTIG gerou sistemas equações diferenciais ordinárias – EDO acoplados para o potencial transformado que foram resolvidos numericamente com a utilização da rotina *DIVPAG* da biblioteca *IMSL Fortran*. Parâmetros físicos de interesse foram, então, determinados para diversas configurações geométricas dos dutos de setores circulares. Destaca-se, que o tempo máximo de processamento gasto no cômputo dos parâmetros interesse é pequeno, cerca de 30 segundos em um computador pessoal comum (processador de 3,6 GHz com 16 GB de memória RAM). Diante do exposto pode ser concluído que o emprego da TTIG e da Transformação Conforme foram eficientes para a obtenção de solução formal de uma classe problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em domínios de geometrias não-convencionais que, *a priori*, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

## REFERÊNCIAS

- [1] Maia, C.R.M., “Solução de Problemas Difusivos e Difusivo-convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada”, Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil (2003)
- [2] Cotta, R.M., Knupp, D.C., Navieira-Cotta, C.P., Sphaier, L.A., Quaresma, J.N.N., “Unified Integral Transforms Algorithm for Solving Multidimensional Nonlinear Convection-Diffusion Problems”, *Numerical Heat Transfer, Part A, Applications*, 63, 840-866 (2013)
- [3] Cotta, R.M., Knupp, D.C., Navieira-Cotta, C.P., Sphaier, L.A., Quaresma, J.N.N., “The Unified Integral Transforms (UNIT) Algorithm with Total and Partial Transformation”, *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, 6, 507-524 (2014)
- [4] Cotta, R.M., *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*, Begell House Inc., New York (1998)
- [5] Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., Maia, C.R.M., “Aplicação da Transformada Integral Generalizada e da Transformação Conforme na Solução de um Problema de Convecção Forçada Laminar em Dutos de Setor de Anel Circular”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 32, 261-269 (2016)
- [6] Antonini Alves, T., “Aplicação da Transformada Integral na Solução de uma Classe de Problemas Difusivos e Difusivo-Convectivos em Domínios de Geometria Não-Convencionais”, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, Brasil (2006)
- [7] Churchill, R.V., *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*, McGraw-Hill, São Paulo (1975)
- [8] Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., Maia, C.R.M., “Escoamento Laminar em Dutos de Setor Circular”, *Ciência & Engenharia*, 24, 65-74 (2015)
- [9] Shah, R.K., London, A.L., *Laminar Flow Forced Convection in Ducts. Advances in Heat Transfer*, Supplement 1, Academic Press Inc., New York (1978)
- [10] IMSL Library, Edition 7, GNB Building, 7500 Ballaire Blod, Houston, Texas 77036 (1994)
- [11] Trupp, A.C., Lau, A.C.Y., “Fully Developed Laminar Heat Transfer in Circular Sector Ducts with Isothermal Walls”, *Journal of Heat Transfer*, 106, 467-469 (1984)
- [12] Ben-Ali, T.M., Soliman, H.M., Zariffah, E.K., “Further Results for Laminar Heat Transfer in Annular Sector and Circular Sector Ducts”, *Journal of Heat Transfer*, 111, 1090-1093 (1989)
- [13] Etemad, S.G., Bakhtiari, F., “General Equations for Fully Developed Fluid Flow and Heat Transfer Characteristics in Complex Geometries”, *International Communication of Heat and Mass Transfer*, 26, 229-238 (1999)
- [14] Lin, M.J., Wang, Q.W., Tao, W.Q., “Developing Laminar Flow and Heat Transfer in Annular-Sector Ducts”, *Heat Transfer Engineering*, 21, 53-61 (2000)

## HYBRID ANALYTICAL-NUMERICAL SOLUTION FOR THERMAL PROBLEMS INSIDE CIRCULAR SECTOR DUCTS

**Abstract** – In this work, the forced convection heat transfer was calculated for hydrodynamically fully developed and thermally non-developed *Newtonian* laminar flow with uniform temperature entrance profile inside circular sector ducts under boundary condition of constant surface temperature (*Dirichlet* condition). In order to facilitate the analytical treatment and the application of the boundary conditions, a Conformal Transform was employed to change the domain into a more suitable coordinate system. Thereafter, Generalized Integral Transform Technique – GITT was applied on the energy equation to obtain the temperature field. Numerical results were obtained for bulk mean temperature, local and average *Nusselt* number, and thermal entry length considering several geometric configurations. These results were compared, as much as possible, to those available in the literature and they presented a good agreement.

**Keywords** – Forced Convection, Integral Transform, Conformal Transform, Geometry of Circular Sector.