



## UN ESTUDIO COMPARATIVO SOBRE LOS MODELOS UTILIZADOS PARA LA PREDICCIÓN DE VIBRACIONES POR CONTACTO DINÁMICO EN SUPERFICIES RUGOSAS

ÁLVARO SÁNCHEZ-RODRÍGUEZ<sup>1</sup>, JOSÉ SALVADOR ECHEVERRÍA-VILLAGÓMEZ<sup>2</sup>, FRANCISCO JAVIER GARCÍA RODRÍGUEZ<sup>1</sup>, ROBERTO SALAS ZUÑIGA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Celaya

Departamento de Ingeniería Mecánica

Av. Tecnológico s/n y Antonio García Cubas, C.P. 38010, Celaya, Guanajuato, México

<sup>2</sup>Centro Nacional de Metrología

Área Metrología Física

KM 4.5 Carretera a los Cués, C.P. 76900, Santiago de Querétaro, Querétaro, México

<sup>3</sup>Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial (CIDESI)

Av. Playa Pie de la Cuesta N° 702, Desarrollo S. Pablo C.P. 76130, Santiago de Querétaro, Qro., México

*(Recibido 27 de diciembre de 2008, para publicación 27 de febrero de 2009)*

**Resumen** – En los últimos años, se han propuesto varios criterios que permiten predecir vibraciones por contacto dinámico en superficies rugosas, basados en diferentes suposiciones y modelos mecánicos. El objetivo de este estudio es clasificar los trabajos más relevantes desarrollados en campo y analizar sus principales características: parámetros dinámicos de amortiguamiento, grados de libertad, tipo de fricción, modelo de rugosidad, tipo de carga, etc. El método de solución y otras condiciones relevantes también son considerados. Con ello, se propone un modelo general que incluye la mayoría de las características de los modelos utilizados.

**Palabras clave** – Ruido, vibración, amortiguamiento, resorte, rigidez.

### 1. INTRODUCCIÓN

El ruido, la vibración y el desgaste debido a la fricción están asociados con el contacto de los cuerpos. Por lo que es importante entender la dinámica del sistema de contacto con fricción, y determinar los componentes dinámicos responsables de estos problemas, en las máquinas y algunos dispositivos mecánicos. La fuerza de fricción es la fuerza tangencial que se opone al movimiento relativo de dos superficies las cuales son presionadas una con la otra debido a una fuerza normal.

En casos como: bandas de transmisión, frenos, embragues, juntas; la fricción podría ser deseable, en otros como: engranes, rodamientos, juntas homocinéticas, sellos; la fricción no es deseable. Varios sistemas mecánicos están generalmente compuestos de estructuras, las cuales están en contacto seco o lubricado a través de las superficies. Ellas pueden estar sujetas a carga estable o dinámica (normal, tangencial o ambas) y operar bajo cargas transitorias, oscilatorias u otras; en todas posibles direcciones de deslizamiento.

La naturaleza empírica de los modelos de fricción puede causar dificultades adicionales con la simulación dinámica. El modelo más empleado es la fricción con un coeficiente constante [1]. El análisis de fricción podría ser más real si el coeficiente de Coulomb es función del tiempo y más aún de la frecuencia.

Las fuerzas normal y tangencial son consideradas como estables, y el contacto cuerpo a cuerpo son modelados por resortes y amortiguadores; éstas son dos de las fuentes más importantes disipadoras de energía en los sistemas mecánicos, que son considerados lineal en algunos casos y no lineal en otros casos.

Es importante entender como el área real de contacto, material y propiedades topográficas de la superficie contribuyen a las fuerzas de fricción. Varios modelos estadísticos de contacto de multiasperidades,

han sido desarrollados para determinar la fuerza de contacto normal, muchas de las cuales están relacionadas de alguna manera, con los primeros trabajos de Greenwood y Williamson [3].

Algunos modelos intentan estimar el coeficiente dinámico de fricción, basado en las suposiciones de Tabor [4]. Sus tres elementos básicos pueden ser fuertemente afectados por varios factores tales como: la presencia de capas de óxido, características elásticas, elastoplásticas y plásticas de las asperezas y material, las fuerzas normal y tangencial internas y externas, la fuerza de adhesión, desplazamientos, velocidades y aceleraciones de deslizamiento y las variaciones de temperaturas.

Por el lado de la medición de ruido y vibración en el contacto de los cuerpos, se ha realizado mediante estudios en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia, en densidad de potencia espectral, función de transferencia, transformada rápida de Fourier, análisis espectral de la fricción por medio de gráficas de tiempo-frecuencia, realizadas para la caracterización dinámica de las relaciones de contacto.

## 2. REVISIÓN DE MODELOS RECIENTES

En esta sección se presenta el análisis bibliográfico de los trabajos en campo que han sido desarrollados durante los últimos años. Varios de los trabajos fueron analizados y siete de los modelos relevantes seleccionados, autores y grupos son sucintamente descritos a continuación:

*Modelo I. Trabajo de Soom y Chen* [5]: “La simulación de rugosidad superficial aleatoria, induce vibraciones en los contactos de Hertz durante el deslizamiento estable”.

Presenta la respuesta a la frecuencia del contacto no lubricado, al inducir vibraciones aleatorias de contacto normal por medio de excitación de las irregularidades de la superficie en la zona de contacto de Hertz, al deslizar un cuerpo sobre una superficie de izquierda a derecha a velocidad constante.

Las irregularidades de entrada son modeladas como un proceso aleatorio en el tiempo, con contenido espectral especificado en el número de onda espacial y el dominio de la frecuencia, estudiadas mediante la técnica de simulación digital. Este utiliza un software generador de número aleatorio, basado en el generador congruencial lineal. Proporciona una secuencia aleatoria con distribución Gaussiana y densidad de potencia espectral blanco. La rugosidad efectiva depende del tamaño y forma de la zona de contacto.

La ecuación de movimiento es obtenida de un sistema masa, resorte amortiguador, por lo que se suman la fuerza de amortiguamiento, la fuerza del resorte y el peso del cuerpo. La rigidez de contacto de Hertz es modelada directamente de una aproximación bilineal, y se considera un coeficiente de amortiguamiento lineal.

Se obtiene el espectro de vibración del contacto y la carga del contacto cuadrado medio mediante las simulaciones. Se presenta el procedimiento de simulación en el dominio del tiempo, y se realizan las transformaciones de las vibraciones de contacto, a datos en el dominio de la frecuencia.

El modelo físico es mostrado en la Fig. 1 y consiste de una masa  $m$  montada en una superficie de contacto a través de una rigidez de Hertz  $K$  y amortiguamiento lineal  $C$ . El movimiento es de izquierda a derecha a una velocidad constante. La rigidez efectiva de la superficie  $Y_i$  es obtenida durante el deslizamiento de contacto.

La ecuación de movimiento (1) durante el contacto es obtenido al adicionar la fuerza de amortiguamiento, la fuerza del resorte y el peso los cuales actúan sobre la masa como:

$$m\ddot{y} = C(\dot{y}_i - \dot{y}) + K(y_i - y + z_o)^{1.5} - mg \quad (1)$$

Los resultados obtenidos son la respuesta a la frecuencia del contacto de superficies de Hertz, para una rigidez bilineal y de Hertz siendo mejor la segunda, variando valores de coeficiente de amortiguamiento pequeños, velocidad de deslizamiento considerables y rugosidad, en el rango de frecuencias de 0 a 2000 Hz. Las mediciones experimentales concuerdan con las simulaciones.

*Modelo II. El modelo de Hess y Soom* [6]: “Las vibraciones normales y la fricción bajo cargas armónicas” Parte I: Contactos de Hertz.

Presenta un estudio de las vibraciones no lineales en contacto de Hertz por la técnica de perturbación conocida de múltiples escalas. Las vibraciones son excitadas por la componente dinámica de la carga normal aplicada externamente. El sistema con contacto de Hertz es modelado como un sistema masa-resorte-amortiguador.

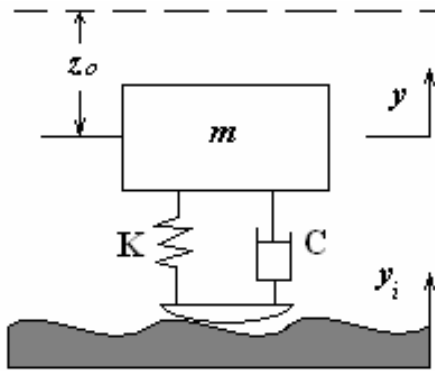


Fig. 1. Modelo físico de contacto [5].

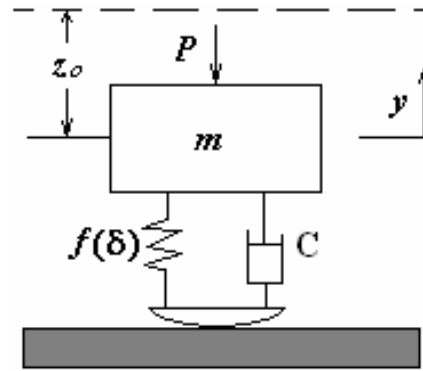


Fig. 2. Modelo de contacto dinámico [6].

A diferencia del trabajo de Soom y Chen, la región es modelada como un resorte no lineal en paralelo con amortiguamiento viscoso, como lo realizó Tolstoi *et al.* [14], ellos determinaron la rigidez empíricamente. Las mediciones y simulaciones muestran resultados semejantes, y encuentran que la fricción disminuye debido a la vibración normal en un 30%.

Igual que Nayak [15], se modeló el sistema dinámico considerando contacto de Hertz, como un sistema masa-resorte-amortiguador no lineal, el cual resolvió con una aproximación de primer orden usando el método de balanceo armónico, que posteriormente Nayfeh y Mook [16], obtuvieron mediante la técnica de perturbación conocida como método de múltiples escalas, que es considerado también en el trabajo de Hess y Soom [6].

El trabajo estudia la dependencia paramétrica del contacto en movimiento normal. Las soluciones del contacto son obtenidas para deflexiones promedio e instantáneas, sin considerar superficies rugosas como en otros trabajos, los contactos son considerados como lisos.

Como resultado de la rigidez de Hertz no lineal, la deflexión de contacto normal promedio durante la oscilación es más pequeña que la deflexión estática bajo la misma carga promedio. Esto muestra que puede ser resultado de una reducción del área promedio de contacto, por implicación de la fuerza de fricción en presencia de una carga dinámica pequeña. Los componentes dinámicos de las cargas de contacto pueden ser responsables de la generación de ruido, vibración, desgaste y fatiga por contacto en máquinas y otros dispositivos mecánicos.

El modelo se muestra en la Fig. 2. Éste consiste de una masa  $m$  de deslizamiento esférico, montada sobre una superficie plana y lisa a través de un resorte no lineal  $f(\delta)$  y un amortiguamiento viscoso  $C$ . Esto supone que la fuerza de fricción es proporcional al área, basado de teoría de fricción por adhesión, las deflexiones debido al peso y la fuerza de excitación son en dirección vertical, el contacto es una esfera y una superficie plana.

La ecuación de movimiento (2) durante el contacto se obtiene de la suma de fuerzas en la masa es:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} - f(\delta) = -Po(1 + \alpha \cos \Omega t) - mg \quad \text{para } \delta > 0 \quad (2)$$

donde  $f(\delta)$  es la fuerza de restauración de rigidez no lineal.

Se obtiene respuesta a la frecuencia del contacto esférico sobre una superficie plana y lisa, para diferentes amplitudes de aceleración, desplazamiento carga, diferentes valores de coeficiente de amortiguamiento y masa, a frecuencias que van de 3000 a 7000 Hz. La amplitud de frecuencia pico se incrementa con el incremento de la masa.

El análisis muestra que la compresión de contacto medio para contactos de Hertz, disminuye con aplicación de cargas armónicas y que la fricción promedio máxima se reduce en un 10%, en presencia de cargas dinámicas sin pérdida de contacto.

*Modelo III, El trabajo de Hess and Soom [7]:* “Las vibraciones normales y la fricción bajo cargas armónicas” Parte II: Contactos planos rugosos.

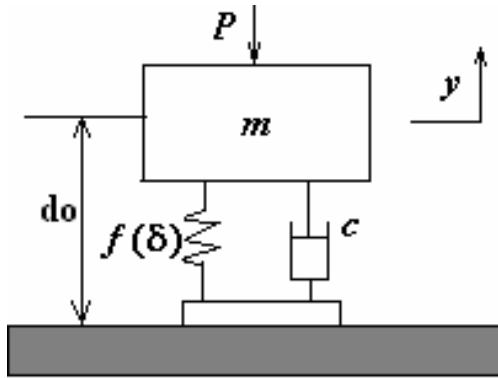


Fig. 3. Modelo dinámico [7].

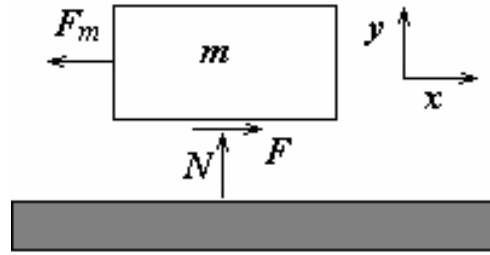


Fig. 4. Dispositivo de medición y modelo físico del sistema [8].

Este trabajo estudia las vibraciones de contacto normal no lineal, excitadas por aplicación de carga normal dinámica, en la región de contacto formada entre superficies rugosas. El problema es de nuevo estudiado por el método de múltiples escalas.

El modelo de Hess y Soom, considera el contacto de dos superficies rugosas y elásticas descritas por el modelo de GW, donde contempla las mismas distribuciones de la altura de las asperidades, exponencial y Gaussiana. Mientras que Thomas [15], Majumdar y Bhushan [16], consideraron modelos estadísticos más complejos, que no garantizan las propuestas actuales.

La región de contacto tiene comportamiento de un resorte no lineal, en paralelo con un amortiguamiento viscoso, y soporta una masa rígida, por tanto, se modela por un sistema masa resorte amortiguador no lineal, como se muestra en la Fig. 3. La superficie rugosa esta considerada como un cuerpo móvil de masa  $m$ , en contacto con una superficie lisa a través de una rigidez no lineal y un amortiguamiento viscoso.

Considerando distribución exponencial de la altura de las asperidades las ecuaciones son:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} - K_2 e^{-(q+h_0)} = -P_o(1 + \alpha \cos \Omega t) - mg \quad (3)$$

y considerando una distribución Gaussiana de las alturas de las asperidades la ecuación es:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} - K_3 F_{3/2}(h_o) = -P_o(1 + \alpha \cos \Omega t) - mg \quad (4)$$

Se obtiene lo mismo que en el caso anterior, la respuesta a la frecuencia del contacto esférico sobre una superficie plana y lisa, para diferentes amplitudes de desplazamiento y aceleración: relaciones de carga, diferentes valores de coeficiente de amortiguamiento y masa, a frecuencias de 3000 a 7000 Hz. La amplitud de frecuencia pico se incrementa con el incremento de la masa.

Para superficies rugosas, la fricción promedio puede reducirse hasta un 30%, en presencia de cargas dinámicas sin pérdida de contacto; y el incremento de la separación media puede tomar lugar, debido al comportamiento duro/suave de la compresión de contacto no lineal.

*Modelo IV El trabajo de Kupchenko y Hess [8]: “Medición de la respuesta a la frecuencia de mecánica del contacto”.*

El trabajo, presenta un modelo matemático para simular el comportamiento de la rugosidad en mecánica del contacto, con el propósito de observar los efectos de vibración, también realiza la medición de respuesta a la frecuencia de la fricción del contacto de superficies planas en seco y lubricado, sujetas a anchos de banda de vibración normal aleatoria controlada y diferentes velocidades y aceleraciones de deslizamiento.

Tolstoi [17], Godfrey [18] y Sakamoto [19] hicieron análisis de efectos de vibración en mecánica de contacto en el dominio del tiempo, y solo enfocaron al estudio de los efectos de vibración a cuerpos que deslizan en superficies sin lubricación, mientras que el trabajo de Kupchenko y Hess, presenta el mismo estudio en el dominio de la frecuencia para cuerpos que deslizan con y sin lubricación.

Kupchenko y Hess determinan el coeficiente de rozamiento dinámico, mediante la relación de las fuerzas de inercia tangencial  $m\ddot{x}_m(f)$  más la fuerza de fricción  $F_m(f)$  entre la fuerza de inercia normal  $m\ddot{y}_m(f)$ . Se excita la superficie con un Shaker, y se mide la respuesta a la frecuencia de la rugosidad en el contacto de las piezas, mientras el cuerpo desliza a una velocidad constante sobre la superficie.

El dispositivo experimental consiste de una masa montada sobre una superficie, se aplica una fuerza de excitación sobre el cuerpo y se considera que se genera una fuerza normal sobre las superficies de contacto. Colocan dos acelerómetros en las direcciones normal y tangencial, que miden las vibraciones en esas direcciones y un sensor de fuerza para obtener el coeficiente de fricción cinética de la respuesta del sistema, Fig. 4.

Sustituyendo las componentes dinámicas medidas experimentalmente, de fuerza de fricción y fuerza normal en el coeficiente de fricción dinámica determinado por Coulomb, la expresión que se obtiene es la siguiente:

$$\mu(f) = \frac{F_d(f)}{N_d(f)} = \frac{F_m(f) + m\ddot{x}_m(f)}{m\ddot{y}_m(f)} \quad (5)$$

donde  $\ddot{x}_m$  y  $\ddot{y}_m$  son la medición de la aceleración tangencial y normal respectivamente. Los resultados obtenidos del coeficiente de fricción, son para frecuencias de 0 a 2000Hz, variando las excitaciones a diferentes amplitudes de deslizamiento, velocidad y aceleración.

*Modelo V. El trabajo de Sherif and Abu Omar* [9]: “Propiedades de interfase debido al micro deslizamiento de la medición de las vibración”.

El trabajo presenta un método para medir la rigidez de contacto y el amortiguamiento por fricción en seco, al interactuar los planos de las superficies de un sistema mecánico, compuesto de dos subestructuras. El método se basa en la medición de la razón de desplazamiento del contacto, de las dos subestructuras como una función de la frecuencia, debido a ligeros impulsos de excitación aplicados en un punto de algunas de las dos subestructuras.

Los datos para determinar la carga tangencial se basaron en los estudios realizados por Mindlin, se compararon con las mediciones experimentales para el contacto normal y tangencial estático en superficies planas, obtenidas por Levina [20], Kirsanova [21] y Burdekin [22], así como los datos teóricos y experimentales obtenidos por Cretegnny [23].

Las propiedades de la interfase (rigidez de contacto tangencial y factor de amortiguamiento), son determinadas por medio de la medición de la amplitud y la frecuencia pico del micro deslizamiento en el dominio del tiempo. El micro deslizamiento ocurre debido a que la estructura elástica es excitada por carga armónica, teniendo pequeñas amplitudes que exhiben movimientos oscilatorios.

El modelo físico se muestra en la Fig. 5, un sistema masa-resorte-amortiguador está en contacto con otro sistema masa resorte, que considera la rigidez normal y tangencial. La rigidez tangencial, es la resultante de la rigidez de contacto producida por la deformación elástica de las asperezas, y la relación normal de la rigidez debido a la ausencia del micro deslizamiento.

El análisis teórico está basado en un modelo de un sistema de dos grados de libertad, con acoplamiento elástico. Las diferentes ecuaciones para el movimiento libre del sistema de subestructuras pueden escribirse en forma de matriz como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + \bar{k} & -\bar{k} \\ -\bar{k} & k_2 + \bar{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos,  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$ ,  $x_1$  y  $x_2$  son las aceleraciones y desplazamientos de los cuerpos,  $k_1$ ,  $k_2$  son las rigideces de contacto superficie-cuerpo y  $\bar{k}$  la rigidez de contacto cuerpo-cuerpo.

La respuesta a la frecuencia teórica, se obtiene variando valores de la rigidez tangencial y factor de amortiguamiento, para magnitud y fase en el rango de frecuencias de 0 a 1500 Hz; y para el caso experimental se varía la carga normal aplicada sobre los cuerpos en contacto.

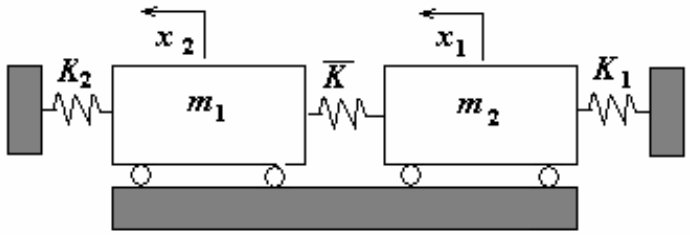


Fig. 5. Contacto de subestructuras [9].

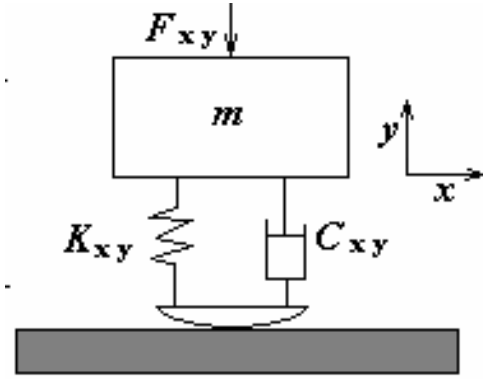


Fig. 6. Sistema dinámico en dos dimensiones [10].

*Modelo VI El trabajo de Fitsum A. Tariku y Robert J. Rogers [10]: “Mejora de los modelos de fricción dinámica para simular el pegado y deslizado del movimiento en una y dos dimensiones”.*

Presenta dos modelos de fricción. Un modelo está basado en el método de balanceo de fuerzas, y el otro en un sistema masa-resorte-amortiguador durante el pegado. Los modelos consideran un sistema masa-resorte-amortiguador con excitación y fuerza de contacto, que varían con el tiempo para ambos movimientos de pegado deslizado (*stick-slip*), en una y dos dimensiones sobre superficies planas.

A diferencia de los modelos anteriores, éste contempla la fricción dinámica como un movimiento de pegado y deslizado a diferentes velocidades, en una y dos dimensiones. El modelo también se considera como un sistema masa-resorte-amortiguador, en dirección normal y tangencial, donde el comportamiento es no lineal y se aplica una carga de excitación que varía en función del tiempo.

De manera parecida a Tariku y Rogers, Antunes *et al.* [25] propusieron un modelo tipo masa-resorte-amortiguador, que considera un resorte y un amortiguador en dirección tangencial durante el pegado.

Los resultados obtenidos de varias pruebas, muestran que el algoritmo de fuerza balanceada proporciona errores más bajos en la velocidad de pegado, comparados con el método original y el nuevo algoritmo propuesto resorte amortiguador, no exhibe enclavamiento al inicio del pegado.

Las distribuciones de Weibull de los errores de velocidad de pegado, presente en los errores máximos pueden predecirse a priori. Por simplicidad, las fuerzas de excitación tangencial son consideradas armónicas, y la fuerza normal como una combinación de una fuerza constante más una fuerza armónica.

La Fig. 6 muestra el modelo físico de Tariku y Rogers en una y dos dimensiones, con cargas, rigidez y amortiguamiento en direcciones  $X$  y  $Y$  de la superficie.

Ecuaciones (7) y (8) representan el movimiento del modelo físico en dos dimensiones.

$$M\ddot{X} + \hat{C}\dot{X} + \hat{K}X = P_{ox} \cos \omega_{ex}t + P_{ex} \quad (7)$$

$$M\ddot{Y} + \hat{C}\dot{Y} + \hat{K}Y = P_{oy} \cos \omega_{ey}t + P_{ey} \quad (8)$$

donde  $\hat{K} = K + K_f$  y  $\hat{C} = C + C_f$ .

Se obtiene la respuesta a la frecuencia de la fricción dinámica, considerando el movimiento como pegado y deslizado, para uno y dos dimensiones para diferentes velocidades de deslizamiento. Este trabajo presenta mejoras significativas para algoritmos de pegado y deslizado realizados con anterioridad, con los modelos de fricción considerados de fuerza balance y resorte amortiguador.

Finalmente se encontró que el modelo de fricción resorte amortiguador, es más efectivo en la simulación de sistemas mecánicos que tienen comportamiento de pegado y deslizado durante el contacto.

*Modelo VII- El trabajo presentado por Xi Shi y Andreas A. Polycarpou [27]: “Un modelo de fricción dinámica para superficies planas y rugosas no lubricadas”.*

Como en los modelos anteriores, Shi y Polycarpou modelan el comportamiento de la fricción, obteniendo el coeficiente de fricción estático y dinámico en el dominio del tiempo para superficies de ingeniería reales planas, rugosas y no lubricadas; determinado por la fuerza de fricción en la interfase del contacto

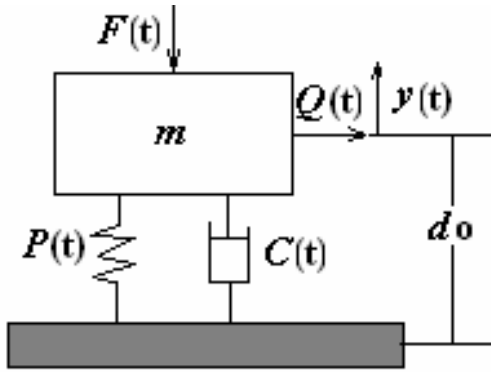


Fig. 7. Modelo físico de contacto de dos superficies [11].

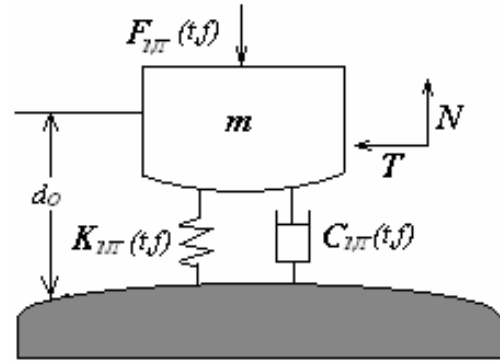


Fig. 8. Propuesta de modelo general.

entre la fuerza normal externa; que es la suma de la fuerza de contacto normal menos la fuerza de adhesión para el caso estático.

Para el caso dinámico, el coeficiente de fricción está determinado por la fuerza tangencial entre la suma de las fuerzas dinámicas interfaciales; compuesta por la fuerza normal de contacto, la fuerza de adhesión y los efectos de inercia y amortiguamiento, y son función de la separación normal en la interfase. El modelo es considerado como un sistema masa resorte amortiguador de un grado de libertad.

La excitación debido a las interacciones de las asperezas (rugosidad), se considera despreciable por la aplicación de carga excitación externa que es mucho mayor. La fuerza de contacto normal es considerada como un resorte no lineal, y el efecto dinámico del sistema es como un elemento de amortiguamiento viscoso. La fuerza de adhesión también se considera despreciable para este modelo.

La rugosidad de la superficie es modelada usando el modelo de contacto de GW, donde se asume que las asperezas son esferas del mismo radio; y la distribución de altura de las asperezas es Gaussiana. Policarpou y Etsion [26] la aproximaron mediante una distribución exponencial.

El modelo predice que en superficies planas rugosas no lubricadas, el valor medio del coeficiente de fricción dinámico permanece aproximadamente constante, cuando la pérdida de contacto se evita y el amortiguamiento interfacial es despreciable, mientras que la pérdida de contacto, causa significativa reducción en la fuerza de fricción dinámica y el coeficiente de fricción dinámica.

Para el caso de contacto con deslizamiento a velocidad constante entre superficies planas, lisas, elásticas, sin lubricación y despreciando los efectos de temperatura; se encontró que los efectos de amortiguamiento y coeficiente de fricción dinámica son despreciables.

La Fig. 7 muestra un bloque de masa  $m$  con rugosidad superficial en contacto con una superficie rugosa. El contacto estático involucra solo la interfase de contacto con relación fija entre la fuerza externa y la fuerza de fricción. El contacto dinámico incluye ambas fuerzas de interfase y dinámicas del deslizamiento del sistema.  $F(t)$  y  $Q(t)$ , que varían con el tiempo como una función absoluta y relativa de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del deslizamiento de los cuerpos.

El coeficiente de fricción dinámica está definido como la relación de la fuerza de fricción instantánea y la fuerza dinámica normal interfacial mostrada en la Ec. (9).

$$\mu_k(t) = \frac{Q(t)}{P_d(t)} = \frac{Q(t)}{F(t) + m\ddot{y}(t)} = \frac{Q(t)}{P(t) - F_s(t) - c\dot{y}(t)} \quad (9)$$

Para calcular el coeficiente de fricción dinámica  $\mu_k(t)$ , es preciso considerar el sistema dinámicamente. El contacto de las asperezas está considerado como un resorte no lineal, y la fuerza de contacto es calculada del modelo de contacto de las asperezas. Se presentan dos ecuaciones diferentes de movimiento, una durante el contacto, (10) y otra cuando se pierde el contacto, (11).

$$m\ddot{y} + c\dot{y} - P + mg + F_o(1 + \alpha \cos \Omega t) = 0 \quad (10)$$

$$m\ddot{y} + mg + F_o(1 + \alpha \cos \Omega t) = 0 \quad (11)$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones dinámicas determinan desplazamiento  $y(t)$ , velocidad  $\dot{y}(t)$  y aceleración  $\ddot{y}(t)$  normal de la masa del bloque. Los resultados muestran la respuesta del contacto mediante el coeficiente de fricción dinámica, que es función de las fuerzas normal  $P(t)$  y tangencial  $Q(t)$  de contacto en el dominio del tiempo, para diferentes valores de coeficiente de amortiguamiento  $c$ , fuerza externa y frecuencia natural  $\Omega$ .

### 3. MATRIZ DE REPRESENTACIÓN DE LOS MODELOS

La mayoría de los estudios de vibraciones generadas por el contacto son teóricos, como se muestra en la Tabla 1, excepto el caso Kupchenko y Hess [8] que presentan un estudio experimental y Sherif y Abu Omar [9] cuyo estudio es teórico experimental. El modelo planteado, es en general, un sistema masa-resorte-amortiguador que se resuelve como tal, mientras que Kupchenko y Hess [8], presentan una ecuación empírica basada en los datos experimentales de amplitudes de vibraciones en aceleración en direcciones  $x$  y  $y$ ; y la medición de la fuerza tangencial.

El modelo de Sherif y Abu Omar [9] tiene dos grados de libertad, mientras que Tariku y Rogers [10] es de uno, dos y tres grados de libertad; los demás son de un grado de libertad y en una dimensión. El régimen de lubricación en la mayoría es en seco, solo Kupchenko y Hess [8] consideraron seco y lubricado.

La fuerza de excitación es armónica en la mayoría de los modelos, en el modelo de Soom y Chen [5] se genera auto excitación por las irregularidades de la superficie y en el de Kupchenko y Hess [8] se realiza mediante un excitador. Aunque hay deslizamiento en la superficie, la respuesta a la frecuencia del contacto se obtiene en dirección normal en superficies planas para todos los modelos.

La rigidez de las superficies, representa el equivalente de la rigidez de las asperezas y es no lineal, esto se ha obtenido experimentalmente, el valor del coeficiente de amortiguamiento se supone en base a la experiencia y pruebas experimentales. Algunos contemplan estos valores en dirección normal y otros lo consideran en dirección normal y tangencial.

Como resultados de los diferentes métodos de simulación, se obtiene la respuesta a la frecuencia del contacto, la frecuencia pico y el espectro de vibración en el dominio de tiempo. Shi y Polycarpou [26], obtienen la amplitud en desplazamiento, la carga normal y tangencial en el dominio del tiempo y por consecuencia el coeficiente de rozamiento en el dominio del tiempo y es aproximadamente un valor constante, la adhesión en estos casos es despreciable.

Los últimos trabajos han realizado el estudio de vibración por contacto en superficie plana y seca, con distribución de altura de las asperezas Gaussiana y exponencial, basados en estudios realizados por Greenwood y Williamson [3], donde las asperezas son consideradas esféricas en la punta y de radio constante, como se vio en capítulos anteriores.

El propósito de esta matriz, es identificar parámetros, variables, métodos de modelación y solución de la vibración inducida por el contacto. Visualizar los alcances y limitaciones que se tienen para las aplicaciones reales y detectar las oportunidades de desarrollo, para conceptualizar un modelo general.

Los modelos están identificados en la parte superior de la Tabla 1 y en la primera columna se identifican las características de los modelos.

### 4. VALORACIÓN DE LOS MODELOS

En el Modelo Soom y Cheng [5], la excitación es debido a las irregularidades de la superficie, a diferencia de los demás modelos que consideran una fuerza de excitación externa. Esto limita el estudio de componentes mecánicos que están sometidos a carga exterior en su mayoría, sin embargo, es un buen comienzo de análisis para vibraciones inducidas por el contacto.

Hess y Soom [7], consideran la rigidez como no lineal en uno de sus artículos, y en el otro artículo consideran la fuerza debido a la rigidez no lineal, como una fuerza generada debido a la deformación de las asperezas, donde la altura de las asperezas tiene distribución gaussiana o exponencial. El valor del



Tabla 1. Matriz de comparación de los modelos.

Caract \ modelo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Tipo de análisis	Teórico	Teórico	Teórico	Experimental	Teórico-Exp.	Teórico	Teórico
Masa $m_1$	5.2N	0.5,1,2 Kg	0.5,1,2 Kg	0.5-50Kg	$m_1, m_2$	1Kg	0.5Kg
Rigidez $K$	Hz-Bilineal	No lineal $f(\delta)$	$f(\delta)=f(h)$	No	$K_t=1,1,10$	$K_t$ y $K_n$	$P=f(d,K)$
Amortiguamiento $C$	$\zeta=0.1, .02, .03$	$\zeta, .1, .01, .02, 0.4$ $\alpha=.05, .04, .02$ .025, .0125	$\zeta=0.01$ $\alpha=.05$	No	$\zeta=0.1$	$\zeta=0.025$	$\zeta, .0, .01, .05$ $\alpha=.01, .05, .1$
GDL	1	1	1	1	2	1,2 o 3	1
Dimensión	1	1	1	2	1	1,2 o 3	1
Deslizamiento	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si
Régimen lubricación	Seco	Seco	Seco	Seco-Lubricado	Seco	Seco	Seco
Material	Acero carb-Acero suave	Acero	Acero Duro-Acero suave	Acero1045	Acero	Acero	Acero
Rugosidad	0-0.5 $\mu$ m		0.041-0.013	0.5-1.5 $\mu$ m	0.3-0.3 $\mu$ m	$\mu_s=0.4\mu_k=0.2$ 3	
Topografía	Aleatorio Gaussiana	Superficie plana	Exponencial Gaussiana	RaB <sub>1B</sub> , RaB <sub>2B</sub>	RaB <sub>1B</sub> , RaB <sub>2B</sub>	Ninguna	Exponencial mod. Gaussiana
Rango frecuencia	0-2000Hz	3000-7000	2400-4200	0-2000Hz	0-1500		
Vel. desliza	4.2-38 cm/s			4,20 mm/s		0.1mm/s	
Tipo de Carga dinámica	0.09-0.77N	$P_0=5,10,20N$ $P(1+\alpha\cos\omega t)$	$P_0=5N$ $P(1+\alpha\cos\omega t)$	Shaker	Impulso 0.02N 89, 103,113N	9.8N 5N $P(1+\alpha\cos\omega t)$	50N $P(1+\alpha\cos\omega t)$
Radio deslizar	16mm	0.01m					
Frec. Reson. N	950 Hz						
Excitación $g$				.3, .6, .9 g			
Rango de material	Elástico	Elástico	Elástico	Elástico	Elástico	Elástico	Elástico
Met. Sol.	Técnica. Simula Digital	Múltiples escalas	Múltiples escalas	Acelerómetros y medidores fuerza	Ec. MAS	Ec. MAS	Ec. MAS
Resol. Obten.	Respuesta frec. contacto frecuencia pico	Respuesta frec. contacto frecuencia pico	Respuesta frec. contacto frecuencia pico	Respuesta frec. contacto	Respuesta frec. contacto frecuencia pico	Espectro de vibración en el dominio del tiempo	Coefficiente de rozamiento dinámico dominio del tiempo
Parámetros medidos	Amplitud en aceleración	Amplitud en desplazamiento	Amplitud en desplazamiento	Amplitud en magnitud	Amplitud en magnitud y fase	Amplitud en desplazamiento velocidad y aceleración Fuerza de fricción	Desplazamiento Fuerza contacto $P$ Fuerza fricción $Q$ Coef. Fricción $\mu_k$
Variación de parámetros	$\zeta, A, f, \alpha$	$m, \omega, \zeta, \alpha$	$m, \omega, \zeta, \alpha, t$	$f, a, v$	$F, Kt, N$	$T$	$\zeta, \alpha, t$

coeficiente de amortiguamiento lo determinan mediante el factor de amortiguamiento, el cual es proporcionado en base a la experiencia.

Kupchenko y Hess [8] determinan la respuesta a la frecuencia del contacto experimentalmente, haciendo mediciones de amplitud de vibración en direcciones  $x$  y  $y$ , los datos son diferentes a los que se presentaban en otros artículos. Los análisis experimentales que realizan son en seco y lubricado, a diferencia de los demás, y determinan el coeficiente de fricción dinámico del sistema.

El trabajo de Sherif y Abu Omar [9], analiza el contacto como un sistema de dos grados de libertad a diferencia de los demás, considerando dos masas en cantiliver y excitando con un martillo de impactos. Los resultados teóricos coinciden con los experimentales y contemplan implícitamente el amortiguamiento del sistema. Determinan la frecuencia pico del contacto del sistema, tomando en cuenta la rigidez normal y tangencial.

El Modelo de Tariku y Rogers [10], considera el deslizamiento con pegado y deslizado (*stick-slip*), y el espectro de vibración por contacto se analiza en una y dos dimensiones a diferencia de los demás, con amplitudes en desplazamiento, velocidad y aceleración en dirección normal, por lo que se contempla la rigidez y amortiguamiento normal y tangencial. La rigidez como un valor que varía linealmente, y el amortiguamiento como un valor supuesto en base a la experiencia, no considera la rugosidad de las superficies.

De los trabajos más completos es el de Xi Shi y Polycarpou [26], que considera superficies planas y rugosas, con distribución de altura de las asperidades exponencial, determina la fuerza normal, tangencial y el coeficiente de rozamiento cinético, que varían en función del tiempo, basados en los estudios realizados por GW [3] y CEB [11], la velocidad esta considerada implícitamente y el coeficiente de amortiguamiento se supone un valor en base a la experiencia, partiendo del factor de amortiguamiento.

## 5. PROPUESTA DE MODELO GENERAL

Todos modelos realizan su análisis de vibraciones inducidas por el contacto en el rango elástico, pudiera muy bien complementarse con lo que obtuvieron Chan *et al.* [12] en el rango elastoplástico, y más aún con lo que obtuvieron Kogut y Etsión [13], para las transiciones consideradas de elástico a elastoplástico y a plástico.

Es suficiente hacer el análisis en dos dimensiones, con dos grados en dirección normal y tangencial, con respuesta en ambas direcciones y frecuencia pico, buscando obtener el coeficiente de rozamiento cinético en el dominio del tiempo y la frecuencia y obtener amplitudes de vibración en desplazamiento, velocidad y aceleración.

Tomar en cuenta superficies rugosas, donde la distribución de altura de las asperidades sea Gausiana y para simplificar el análisis, considerar la distribución exponencial modificada de Polycarpou u otras. La rigidez por consecuencia estaría implícita en el modelo de rugosidad, y el coeficiente de amortiguamiento tendría que determinarse de manera experimental.

La fuerza de excitación externa, se propone sea en ambas direcciones para determinar los efectos en dirección normal y tangencial, y realizar los análisis para diferentes geometrías que se presentan en la realidad, como en el caso de rodamientos, engranes, juntas homocinéticas, etc. También considerar diferente régimen de lubricación y recubrimiento, aparte del ya estudiado en seco.

La ecuación (12) representa un modelo general que considera los efectos en dirección normal y tangencial y donde los valores de posición, velocidad y aceleración pueden estar expresadas en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

$$M_{NT}a(t, f) + C_{NT}v(t, f) + K_{NT}d(t, f) = F_{NT}(t, f) \quad (12)$$

La Fig. 8 muestra alguna de estas consideraciones, las variables mostradas en negrita se expresan en vectores.

El ruido y la vibración se presentan debido a la interacción de las asperidades antes y después de la fractura, y se tienen deformaciones, esfuerzos y desgaste a nivel nano (asperidades) y macro (cuerpo).

Lo más complejo es el estudio del comportamiento del contacto en la fractura, de algunas de las asperidades al exceder su límite plástico, y el desgaste progresivo debido al deslizamiento de un cuerpo sobre el otro, por la generación del tercer cuerpo (debris), porque involucra la mecánica de la fractura.

Los estudios realizados fueron sobre material de acero, la propuesta contempla trabajar con materiales diferentes al acero, combinar diferentes materiales como se da en el caso de cojinetes, chumaceras y bujes. Todo mediante simulaciones por elemento finito y pruebas experimentales.

## 6. CONCLUSIONES

Se presentó una comparación de los métodos de análisis teórico y experimental, para la caracterización y la determinación dinámica de las propiedades de contacto estático y dinámico en superficies rugosas; para obtener finalmente una propuesta de un modelo general.

El modelo general contempla parámetros como: altura de las asperidades (con distribución exponencial modificada ó Gausiana), área y carga de contacto, distancia de separación de las superficies, rigidez y amortiguamiento normal y tangencial equivalente, movimiento en uno y dos dimensiones en superficies planas y curvas, seco y lubricado con contacto (en estado elástico, elastoplástico y puramente plástico), entre diferentes materiales

Algunas otras propuestas de análisis, fueron:

1.- Diferentes geometrías de contacto como: esferas, arcos, góticas, elípticas, etc., 2.- El efecto de la rugosidad obtenido por diferentes procesos de manufacturas (con distribución diferente de las alturas de las asperidades y ondulación), 3.- El efecto del gradiente de dureza o la dureza misma, 4.- El efecto de la variación de la temperatura, 5.- Algunos recubrimientos metálicos o no metálicos, 6.- El efecto del debris (tercer cuerpo) acumulado.

Para estudiar casos particulares de ruido y la vibración que se genera por el contacto en elementos mecánicos como: juntas homocinéticas tipo Hooke Rzeppa, en rodamientos y engranes, etc.

## REFERENCIAS

- [1] Coulumb, C.A., "Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et à la roideur des cordages," *Mémoires de Math. Phys.*, **X**, 161-342 (1785)
- [2] Hertz, H.R., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* by Love, A.E.H., fourth edition, Cambridge University Press, 193-198 (1927)
- [3] Greenwood, J.A., Williamson, J.B.P., "Contact of Nominally Flat Surfaces" *Proceedings of the Royal Society of London, Series. A, Mathematical and Physical Sciences*, **295**, 300-319 (1966)
- [4] Tabor, D., "Friction-The Present State of our Understanding", *Journal of Lubricating Technology*, **103**, 169-179 (1981)
- [5] Soom, A., Chen, J.W., "Simulation of random surface roughness- induced contact Vibrations at Hertzian contacts during steady sliding", *Journal of Tribology*, **108**(1), 123-127 (1986)
- [6] Hess, D.P., Soom, A., "Normal Vibrations and Friction Under Harmonic Loads: Part I Hertzian Contacts", *Journal of Tribology*, **113**(1), 80-86 (1991)
- [7] Hess, D.P., Soom, A., "Normal Vibrations and Friction Under Harmonic Loads: Part II: Rough Planar Contacts", *Journal of Tribology*, **113**(1), 87-92 (1991)
- [8] Kupchenko, S.S., Hess, D.P., "Mechanical Contact Frequency Response Measurements", *Journal of Tribology*, **122**(4), 828-833 (2000)
- [9] Sherif, H.A., Abu Omar, T.M., "Interface Propierties Due to Microslip From Vibration Measurement", *Journal of Tribology*, **123**(1), 230-233 (2001)
- [10] Tariku, F.A., Rogers, R.J., "Improved Dynamic Friction Models for Simulations of One-Dimensional and Two Dimensional Stick-Slip Motion", *Journal of Tribology*, **123**(4), 661-669 (2001)
- [11] Chang, W.R., Etsion, I., Bogy, D.B., "An Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces", *Journal of Tribology*, **109**, 257-263 (1987)
- [12] Kogut, L., Etsion, I., "A Static Friction Model for Elastic-Plastic Contacting Rough Surfaces", *Journal of Tribology*, **126**(1), 34-40 (2004)
- [13] Tolstói, D.M., Borisova, G.A., Grigorova, S.R., "Friction Reduction by Perpendicular Oscillation," *Soviet Physics-Doklady*, **17**, 907-909 (1973)
- [14] Nayak, P.R., "Contact Vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, **22**(3), 297-322 (1972)
- [15] Thomas, T.R., *Rough Surfaces*, Longman, New York (1982)
- [16] Nayfeh, A.H., Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York (1979)

- [17] Majumdar, A., Bhushan, B., "Role of Fractal Geometry in Roughness Characterization and Contact Mechanics of Surfaces", *Journal of Tribology*, **112**(2), 205-216 (1990)
- [18] Tolstoi, D.M., "Significance of the Normal Degree of Freedom and Natural Normal Vibrations in Contact Friction", *Wear*, **10**(3), 199-213 (1967)
- [19] Godfrey, D., "Vibration Reduces Metal to Metal Contact and Causes an Apparent Reduction in Friction", *ASLE Transactions*, **10**, 183-192 (1967)
- [20] Sakamoto, T., "Normal Displacement and Dynamic Friction Characteristics in a Stick-Slip Process", *Tribology International*, **20**, 25-31 (1987)
- [21] Levina, Z.M., "Research on the Static Stiffness of Joints in Machine Tools", *Proceedings 8<sup>th</sup> International MTDR Conference*, 737-758 (1967)
- [22] Kirsanova, V.N., "The Shear Compliance of Flat Joints", *Machines and Tooling*, **38**(7), 30-34 (1967)
- [23] Burdekin, M., Back, N., Cowley, A., "Experimental Study of Normal and Shear Characteristics of Machined Surfaces in Contact", *Journal Mechanical Engineering Science*, **20**, 129-132 (1978)
- [24] Cretegy, J.F., "Etude Théorique et Expérimentale des Raideurs de Contact", DDI Thesis, ISMCM, Saint-Ouen, France (1985)
- [25] Antunes, J., Axisa, F., Beaufils, B., Guilbaud, B., "Coulomb Friction Modelling in Numerical Simulations of Vibrations and Wear Work Rate of Tube Bundles", *Journal of Fluids and Structures*, **4**(3), 287-304 (1990)
- [26] Polycarpou, A.A., Etsion, I., "Analytical Approximations in Modeling Contacting Rough Surfaces", *Journal of Tribology*, **121**(2), 234-239 (1999)
- [27] Shi, X., Polycarpou, A.A., "A Dynamic Friction Model for Unlubricated Rough Planar Surfaces", *Journal of Tribology*, **125**(4), 788-796 (2003)

## **A COMPARATIVE STUDY OF MODELS USED FOR PREDICTION OF VIBRATIONS BY DYNAMIC CONTACT IN ROUGH SURFACES**

**Abstract** – In the last years, several criteria have been proposed to predict vibrations by dynamic contact in rough surfaces, based on different suppositions and mechanical models. The objective of this study is to classify the most excellent works developed in field and to analyze its main characteristics: dynamic parameters of damping, degrees of freedom, type of friction, model of ruggedness, type of load, etc. The method of solution and other relevant conditions are also considered. With it, a general model is proposed that it includes most of the characteristics of the models used.

**Keywords** – Sound, Vibration, Damping, Spring, Stiffness.