



## IDENTIFICACIÓN Y AJUSTE DE LOS PARÁMETROS MODALES DE PLACA

SILMARA CASSOLA, JOÃO ANTONIO PEREIRA, AMARILDO TABONE  
PASCHOALINI

UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil, 56 – 15.385.000 – Ilha Solteira, SP, Brasil

(Recibido 20 de julio de 2006, para publicación 15 de marzo de 2008)

**Resumen** – Este trabajo trata sobre el estudio del comportamiento dinámico de estructura de losa de concreto. Estructuras bastante leves y esbeltas están cada vez más presentes en la construcción civil, y son muy susceptibles a los efectos de vibraciones causadas por los propios usuarios. En este caso, el aislamiento es bastante complejo, y los niveles de vibraciones deben ser controlados por las propias características de la estructura, el cual torna el conocimiento de sus propiedades dinámicas en una condición fundamental para el desarrollo de proyectos que ofrezcan no apenas seguridad, como también confort a los usuarios. Este trabajo describe la aplicación de una técnica de ajuste de modelado, elaborado por el método de elementos finitos, para el caso de placas.

**Palabras clave** – Técnica de ajuste de modelo, elementos finitos, placas.

### 1. INTRODUCCIÓN

El uso de técnicas de postensionamiento, concretos de alta resistencia y técnicas elaboradas de análisis estructural, han permitido la construcción de losas bastante esbeltas, respondiendo a las condiciones de resistencia impuestas por las Normas Técnicas. Sin embargo, el uso de pisos más esbeltos lleva a una preocupación inmediata con los efectos de vibraciones, pues estas estructuras presentan poco amortiguamiento y bajas frecuencias naturales, y pueden ser fácilmente excitadas por los propios usuarios. El aislamiento es bastante complejo, una vez que las personas son la fuente y sensores de la vibración. En este caso, los niveles de vibraciones deben ser controlados por las propias características de la estructura que tornan imprescindible el conocimiento de sus parámetros dinámicos (frecuencias naturales, modos propios, factor de amortiguamiento), visto que los efectos de vibraciones en construcciones tienen un efecto psicológico muy acentuado en las personas. Cuando el ser humano es expuesto a vibraciones, presenta reacciones subjetivas que van desde la simple percepción y malestar, hasta la aprensión y dolor ([1]).

De acuerdo con Stephenson *et al.* [2], existe en el mundo entero un gran interés con respecto al conocimiento de la respuesta de pisos al impacto causado por el uso cotidiano de las personas, tal como un simple caminar. Este asunto es particularmente relevante cuando son consideradas estructuras esbeltas, y las investigaciones buscan un mayor entendimiento respecto al comportamiento de este tipo de estructura, y de que manera sus características de vibración pueden ser relacionadas con el confort humano, de tal forma que se eviten las frecuencias que pueden causar malestar, aunque no sea necesario todo el tiempo.

La elaboración de modelos analíticos de estructuras de pisos de losas de concreto, visan conocer su comportamiento dinámico a través de la simulación de diferentes condiciones de operación y carga, sin que se tenga que construir un modelo real para cada condición, el cual es bastante costoso y complejo. Sin embargo, el modelado dinámico de estructuras de ingeniería civil por elementos finitos, todavía requiere de cuidados especiales y de varias hipótesis y simplificaciones, usualmente adoptadas en este tipo de

análisis, llevando a resultados muy discrepantes con relación a las situaciones reales. Esto significa que el modelo analítico puede no representar adecuadamente la estructura real. Por tanto, existe la necesidad de desarrollar modelos más elaborados, y eventualmente, validar el modelo de elementos finitos de la estructura con la finalidad de obtenerse una solución más realista, principalmente cuando se desea definir un modelo de predicción confiable y representativo ([3]). Las técnicas de ajuste de modelo han producido resultados bastante satisfactorios en este área.

El proceso de ajuste de modelos busca corregir las imperfecciones del modelo analítico, obtenido generalmente por elementos finitos, minimizando la diferencia de los datos calculados con relación a los datos medidos en el modelo real. El principal objetivo es definir un modelo analítico de elementos finitos representativo y fiable del modelo experimental.

Este artículo describe la implementación de un programa de ajuste de modelo utilizando Funciones de Respuesta en Frecuencia –FRF(s)– para análisis por elementos finitos isoparamétricos cuadriláteros cuadráticos de la familia Lagrangiana del comportamiento de las estructuras tipo placa mediante la integración numérica consistente. Técnicas de correlación y comparación de modelos son utilizadas para identificar la discrepancia entre los modelos y posteriormente, corregir el modelo de elementos finitos con base en los datos experimentales.

La propuesta es ensayada con datos simulados de una losa de concreto. Con la finalidad de definir una condición más próxima de la condición real del test, los datos utilizados fueron contaminados con ruido gaussiano, distribución normal con media cero y varianza unitaria

## 2. TÉCNICA DE AJUSTE DE MODELO

Las técnicas de ajuste de modelo han sido usadas para la obtención de un modelo analítico lo más próximo posible del modelo experimental. Varios autores han trabajado en este área durante las últimas décadas. Wang *et al.* [4], Cantieni *et al.* [5], Reynolds *et al.* [6], Reynolds *et al.* [7], Papadimitriou *et al.* [8], Pavic *et al.* [9], son algunos de los estudios realizados abordando técnicas de ajuste de modelo en los problemas de vibración en ingeniería civil.

Basado en el sistema físico, como por ejemplo la estructura de una losa, es derivado el modelo experimental, por medio del análisis modal experimental (AME), y el modelo analítico, por el método de los elementos finitos (MEF), basado en estos modelos, son obtenidos los parámetros modales (frecuencias naturales, amortiguamiento modal y modos propios) experimentales y los parámetros modales analíticos, respectivamente. Comparándose estos parámetros, por medio de técnicas de correlación de parámetros, se puede verificar si los modelos son correlacionados o no. Si los modelos son correlacionados, se tiene un modelo analítico representativo del sistema físico, y todos los estudios efectuados a través de este modelo, presentarán resultados compatibles con la realidad. Por otro lado, si los modelos no son correlacionados, la utilización del modelo analítico para el estudio del comportamiento del sistema, puede llevar a la obtención de resultados irreales. En este caso, el uso de técnicas de ajuste de modelo puede llevar a una mejor representación del modelo analítico, y consecuentemente, a resultados más reales con relación al comportamiento del sistema. Se asume que el modelo experimental es el correcto y se procede a la corrección de los parámetros del modelo analítico con base en los datos experimentales. Dependiendo de la estrategia matemática utilizada en la formulación del problema y del tipo de parámetros utilizados en el ajuste, los métodos son clasificados en diferentes categorías ([10-13]). En este trabajo, el problema de ajuste será formulado con base en las Funciones de Respuesta en Frecuencia –FRF(s) medidas (14-15)], y las variables de ajuste pueden ser seleccionadas dentro de los parámetros físicos y/o geométricos del modelo.

La discrepancia entre los modelos es evaluada con base en un balance de fuerza, y la diferencia entre los datos analíticos y experimentales es descrita como una función residuo. El residuo obtenido en este caso es definido en función de los parámetros del modelo analítico (matriz de rigidez dinámica  $[Z^A(\{p\})]$ ) y de los datos experimentales (FRF(s)), conforme muestra esquemáticamente la ecuación (1). Para una perfecta correlación entre los modelos, los valores de  $\{\Delta p\}$  son nulos, sin embargo, en la práctica esto no ocurre ya que los datos experimentales no están perfectamente correlacionados con los datos analíticos.

La solución para el problema es estimada en este caso, mediante el cálculo de corrección de los  $p$ -parámetros del modelo, el cual minimiza la discrepancia entre ambos modelos.

$$\{\varepsilon\} = f\left([Z^A(p_1 + \Delta p_1, \dots, p_n + \Delta p_n)], \{H^x(\omega_1)\}\right) \cong \{0\} \quad (1)$$

La ecuación del balance de fuerza es definida por la diferencia de la fuerza, actuando en el modelo experimental y la correspondiente fuerza necesaria para producir una respuesta del modelo analítico igual a la respuesta experimental. La ecuación 2 muestra de forma simplificada, después de la linearización con relación a los parámetros de ajuste, el residuo con relación a los parámetros medidos y a los parámetros calculados por elementos finitos ([14,16]).

$$\{\varepsilon(\omega_k)\} = [Z_k(\{p_0\})]\{H_k\}_j + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial [Z_k(\{p\})]}{\partial p_i} \Delta p_i \{H_k\}_j - \{1\}_j \quad (2)$$

Un conjunto de ecuaciones de ajuste es definido basado en la selección de  $n$ -puntos de frecuencia ( $\omega_i$ ), y la solución del problema consiste en encontrar  $m$  cambios en los parámetros analíticos que minimicen la diferencia entre los modelos. Los  $p$ -parámetros pueden representar cualquier propiedad física o geométrica del modelo, ellos pueden ser un parámetro de un elemento, en este caso de los elementos ajustados independientemente, o un parámetro de un grupo de elementos, cuando algunos elementos son ajustados proporcionalmente.

En general, los criterios adoptados para comparar los modelos llevan a un conjunto de ecuaciones no lineales en relación a los parámetros de ajuste seleccionados. Dependiendo del tipo de parámetros seleccionados, la solución de las ecuaciones se torna muy compleja o puede no existir. La linearización de estas ecuaciones, para la mayoría de los sistemas físicos, es una suposición válida en el rango de frecuencias de interés para el análisis de vibración. Una solución aproximada para el problema se obtiene por medio de la linearización de la expresión (2) en los  $p$ -parámetros, conduciendo a un sistema de ecuaciones lineales, como muestra la expresión (3):

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\Delta p\} - \{B\} \quad (3)$$

en la cual los elementos de la matriz de sensibilidad  $[S]$  y del vector de diferencia  $\{B\}$  son conocidos. Ellos se obtienen basados en la matriz de rigidez dinámica del modelo analítico y en las funciones de respuesta en frecuencia medidas en la estructura para  $n$ -puntos de frecuencia seleccionados, o sea, los  $\omega_i$ 's. Los elementos del vector  $\{\Delta p\}$  son incógnitas a ser estimadas. La solución del sistema de ecuaciones linearizadas suministra un modelo analítico corregido. Si la discrepancia entre los modelos no fuese suficientemente pequeña, el proceso es iterativamente repetido.

A continuación es discutida la aplicación de la propuesta para un ejemplo simulado.

### 3. APLICACIÓN DE LA PROPUESTA PARA LA ESTRUCTURA DE PLACA

El programa computacional de elementos finitos para el análisis dinámico de placas implementado, considera elementos isoparamétricos, cuadrilaterales, cuadráticos de la familia Lagrangeana (9 nodos) con integración numérica consistente, esto significa,  $3 \times 3$  ( $m=9$ ) puntos de integración en la superficie media, ya de acuerdo con Paschoalini [17] el elemento de la familia Lagrangeana presenta mejor desempeño que el elemento de la familia Serendipity en el análisis dinámico.

Los datos de entrada son las dimensiones de la placa, sus propiedades geométricas (espesor) y las propiedades del material (módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson y densidad), condiciones de contorno e incidencias de nodos. Los datos que pueden ser corregidos en el proceso de ajuste son las propiedades geométricas y las propiedades del material.

Las dimensiones laterales de la placa estudiada son 5.00 m x 3.50 m, y coinciden con las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. La estructura es modelada por elementos finitos, cuyo modelo es definido para una malla  $5 \times 5$  (25 elementos), 121 nodos (5 gl(s) por nodo), siendo 40 nodos totalmente restringidos, o sea, todos los lados están engastados, y por tanto, la estructura posee 405 grados de libertad. El modelo experimental, en este caso, fue definido basado en el modelo inicial de elementos finitos introduciendo

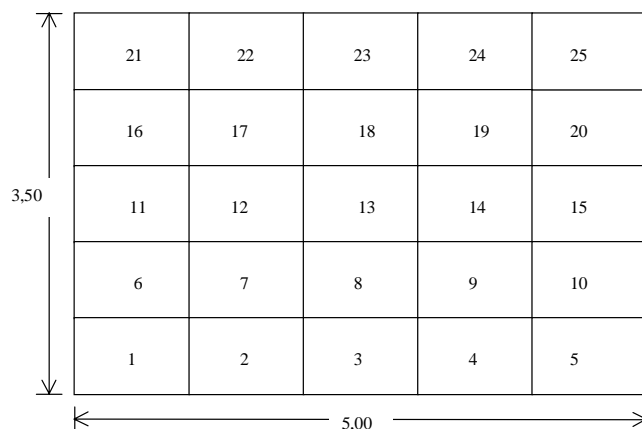


Fig. 1. Elementos de la placa.

Tabla 1. Comparación de las FRF(s) de los modelos experimentales y analíticos.

Modo experimental	Modo analítico	$F_x$ (Hz)	$F_a$ (Hz)	$D_f$ (%)	MAC (%)
1	1	6.24	6.57	5.422	99.9
2	2	10.02	10.10	0.797	99.7
3	3	15.18	15.59	2.717	95.5
4	4	16.78	16.83	0.296	94.3
5	5	18.60	18.78	0.967	98.9
6	6	25.04	25.09	0.221	98.1

pequeñas variaciones, de forma tal, que los elementos poseen pequeñas diferencias de espesor, o sea, el espesor varía entre 0.018 y 0.022 m, representando una pequeña irregularidad en el piso. La Fig. 1 muestra las dimensiones de la placa y la malla de elementos finitos.

Los datos experimentales se obtienen asumiendo que apenas un número reducido de grados de libertad y modos propios son disponibles en el modelo experimental. Fueron utilizadas apenas las FRF(s) relacionadas con los desplazamientos en la dirección  $z$ , esto representa considerar apenas el 20% de los grados de libertad del modelo analítico de la estructura. Las FRF(s) son definidas en un rango de frecuencia de 5 Hz a 26 Hz, para una excitación aplicada en la dirección  $z$  (perpendicular a la superficie de la placa) como indicado. Las FRF(s) fueron contaminadas por ruido gaussiano con la finalidad de definir una condición más próxima de la condición real del ensayo.

El modelo analítico que es comparado con el modelo experimental es definido considerando que todos los elementos poseen el mismo espesor, 0.020 m. Es introducida una variación significativa en una propiedad de la estructura, que consiste en aumentar 45% el espesor del elemento 23. Esto trae un aumento en las frecuencias naturales del modelo analítico con relación al modelo experimental, y diferencias en los modos de vibrar.

La fase de correlación de los datos presupone una base de comparación compatible para los modelos, donde los ngl(s) analíticos y experimentales deben ser geoméricamente y numéricamente correspondientes. Como los modelos son derivados del mismo modelo inicial de elementos finitos, la compatibilidad geométrica (topología) de los modelos es perfecta, y la diferencia entre el número de grados de libertad entre los modelos es corregida a través de la reducción del modelo analítico (método de reducción dinámica). Una vez que se define la compatibilidad de los modelos, las respuestas y parámetros modales son comparados visando definir la correlación de los mismos.

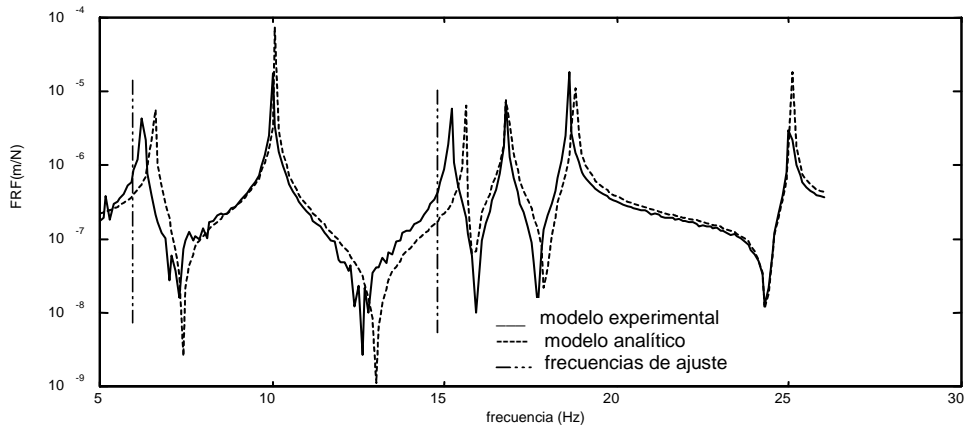


Fig. 2. Superposición de las FRF(s) medidas en el centro del elemento 1.

Tabla 2. Comparación de las FRF(s) de los modelos experimentales y analíticos ajustados.

Modo experimental	Modo analítico	$F_x$ (Hz)	$F_a$ (Hz)	$D_f$ (%)	MAC (%)
1	1	6.24	6.24	-0.002	100.0
2	2	10.02	10.03	0.155	100.0
3	3	15.18	15.18	0.005	99.8
4	4	16.78	16.79	0.071	100.0
5	5	18.60	18.60	0.003	99.8
6	6	25.04	25.05	0.048	99.8

La Tabla 1 y la Fig. 2 muestran la discrepancia entre los modelos. El primero y el tercer modo presentan las mayores diferencias de frecuencia. El primer modo presenta una gran diferencia de frecuencia, 5.422%, pero el valor - MAC, es superior al 98%, lo que significa que en el primer modo de vibrar, los modelos no fueron afectados significativamente. Lo contrario puede ser observado en el cuarto modo, el cual presenta pequeña diferencia de frecuencia y el menor valor de MAC, es de 94.3%. Otras técnicas de comparación y correlación fueron utilizadas, mostrando la discrepancia entre los modelos, sin embargo, en virtud de las limitaciones de espacio, los resultados no son presentados.

La Fig. 2 muestra la superposición de las FRF(s) para el punto 13 (centro del elemento 1) excitación y medida en la dirección  $z$ . La figura muestra también el efecto del ruido introducido en los datos “experimentales”, como puede ser observado, la FRF experimental (trazo continuo) presenta pequeñas oscilaciones de amplitud, lo que ocurre con frecuencia en mediciones.

A continuación pasamos para el proceso de ajuste, visando corregir la discrepancia entre los modelos. Para el proceso de ajuste, fue escogido el parámetro de espesor, para todos los elementos, pues este es un parámetro bastante susceptible a los errores de modelado. Las frecuencias de ajuste fueron seleccionadas gráficamente, en regiones de la curva de receptancia, medida próxima de las frecuencias naturales, y por debajo de los valores de ésta (Fig. 2), lo que evita variaciones bruscas entre las receptancias durante las iteraciones, que llevarían a problemas numéricos durante el proceso de ajuste.

La Tabla 2 muestra los resultados de la correlación entre el modelo analítico ajustado y el modelo experimental, y la Fig. 3 muestra el gráfico de la variación de los parámetros corregidos. Los valores de los espesores del modelo analítico, inicialmente igual a 0.020 sufren aumento o reducción de 5% a 10%, o sea, en un rango de 0.018 a 0.022.

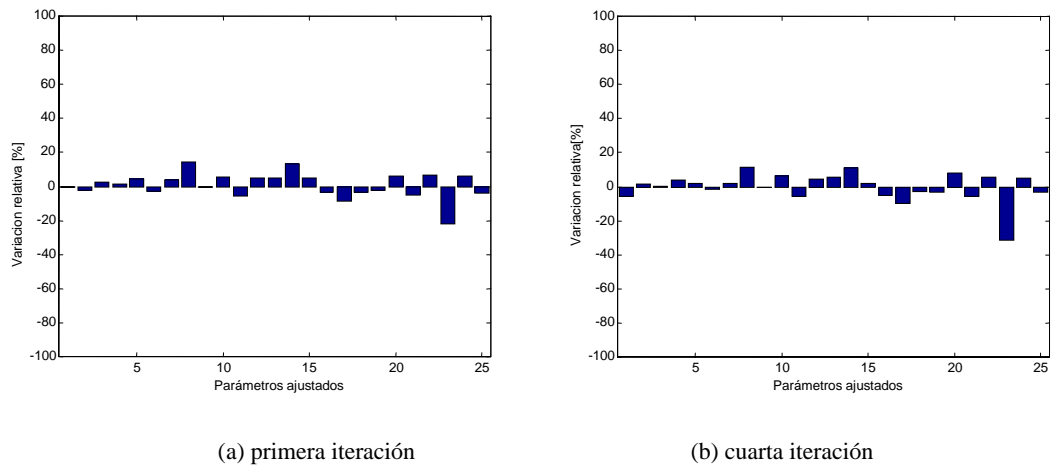


Fig. 3. Evolución de la variación de los parámetros.

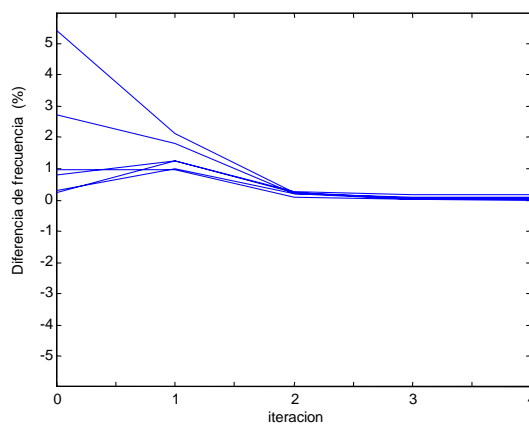


Fig. 4. Diferencia de las frecuencias naturales de los modelos experimentales y analíticos.

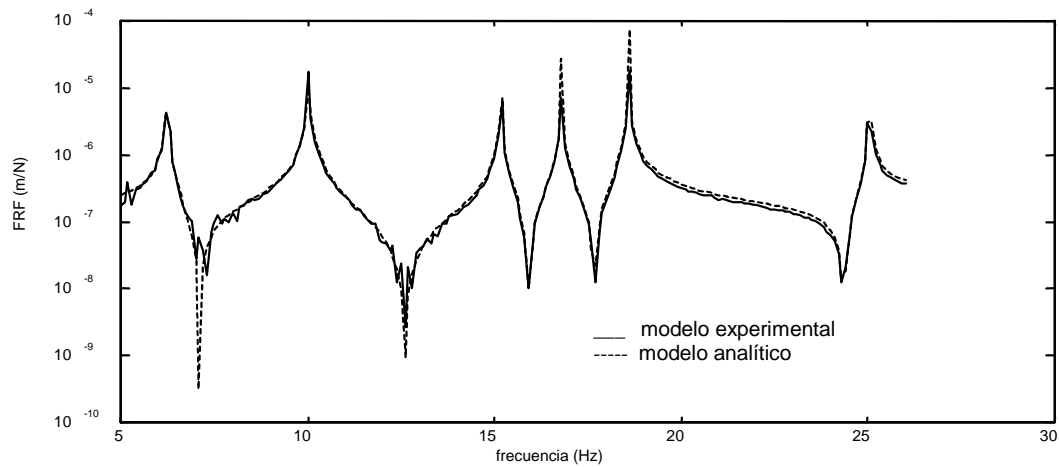


Fig. 5. Superposición de las FRF(s) medidas en el centro del elemento 1.

El parámetro con la perturbación significativa es claramente localizado y correctamente estimado después de algunas iteraciones.

Con cuatro iteraciones, la diferencia de frecuencia entre los modelos experimentales y analíticos es prácticamente nula, como muestran la Fig. 4 y la Fig. 5, y los modos se presentan perfectamente correlacionados (Tabla 2).

#### 4. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha discutido el proceso de ajuste de modelos utilizando directamente las FRF(s) del modelo para estructura del tipo placa. El modelo de elementos finitos se ha ajustado basado en datos experimentales de análisis modal, considerando la importancia de definir un modelo analítico representativo cuando se desea estudiar las características dinámicas de un sistema, especialmente cuando el objetivo es predecir su comportamiento dinámico. La introducción de ruido en los datos “experimentales” simulados permitió general datos más concordables con aquellos obtenidos en un experimento, permitiendo evaluar la metodología para condiciones más próximas a las condiciones de ensayo. Los resultados se mostraron satisfactorios. La próxima etapa del trabajo será utilizar datos experimentales obtenidos en laboratorio para validar la metodología.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Fundación de Apoyo a la Pesquisa del Estado de São Paulo – FAPESP por el apoyo financiero para el desarrollo de este trabajo.

#### REFERENCIAS

- [1] Comité Euro – International du béton – Bulletin d’Information n° 209 – Vibration Problems in Structures – CEB n° 209/1991 – Viena (1991)
- [2] Stephenson, A.C., Humphreys, A.W., “Quantification of Steel Floor Vibration and its Relationship to Human Comfort”, *Journal of Constructional Steel Research*, **46**(1), 106-107 (1998)
- [3] Cassola, S., Pereira, J.A., “Caracterização dos Parâmetros Dinâmicos de Estruturas Metálicas do Tipo Steel Joist”, *Proceedings of the XV COBEM* (1999)
- [4] Wang, M.L., Heo, G., Satpathi, D., “Dynamic Characterization of a Long Span Bridge: a Finite Element Based Approach”, *Proceedings Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **16**, 503-512 (1997)
- [5] Cantieni, R., Pietrzko, S., Deger, Y., “Modal Investigation of an Office Building Floor”, *Proceedings of the XVI International Modal Analysis Conference IMAC*, **3243**, 1172-1178 (1998)
- [6] Reynolds P., Pavic, A., Waldron, P., “Modal Testing, FE Analysis and FE Model Correlation of a 600 tonne post-tensioned Concrete Floor”, *Proceedings of the XXIII International Seminar on Modal Analysis*, **3**, 1129-1136 (1998)
- [7] Reynolds, P., Pavic, A., Waldron, P., “Modal Testing of a 150-tonne Concrete Slab Incorporating a False Floor System”, *Proceedings of the XVI International Modal Analysis Conference IMAC*, **3243**(1), 1574-1580 (1998)
- [8] Papadimitriou, C., Levine-West, M., Milman, M., “Application of a Finite Element Model Updating Methodology on the IPEX-II Structure”, *Proceedings of the XVI International Modal Analysis Conference IMAC*, **3243**, 952-958 (1998)
- [9] Pavic, A., Reynolds, P., “Experimental Assessment of Vibration Serviceability of Existing Office Floors under Human-Induced Excitation”, *Experimental Techniques*, **5**, 41-45 (1999)
- [10] Mottershead, J.E., Friswell, M.I., “Model Updating in Structural Dynamics: a Survey”, *Journal of Sound and Vibration*, **167**(2), 347-375 (1993)
- [11] Lin, R.M., Ewins, D.J., “Analytical Model Improvement Using Frequency Response Functions”, *Mechanical System and Signal Processing*, **8**(4), 437-458 (1994)

- [12] Natke, H.G., Cottin, N., Oeljeklaus, M., “Some Recent Advances in Model Updating”, *Proceedings of DETC’97, ASME Design Engineering Technical Conferences, 16<sup>th</sup> Biennial Conference on Mechanics Vib. and Noise*: paper DETC97/VIB-4142 (1997)
- [13] Mottershead, J.E., Friswell, M.I., “Editorial”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **12**(1), 1-6 (1998)
- [14] Larsson, P.O., Sas, P., “Model Updating Based on Forced Vibration Testing Using Numerically Stable Formulations”, *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference IMAC*, **2**, 968-974 (1992)
- [15] Pereira, J.A., “Structural Damage Detection Methodology Using a Model Updating Procedure Based on Frequency Response Functions - FRF(s)”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil (1996)
- [16] Pereira, J.A., Heylen, W., Lammens, S., Sas, P., “Model Updating and Failure Detection Based on Experimental FRF’s: Case Study on a Space Frame Structure”, *Proceedings of the 19<sup>th</sup> ISMA*, 669-681 (1994)
- [17] Paschoalini, A.T., “Estudo Comparativo do Comportamento Dinâmico do Elemento Isoparamétrico de Placas das Famílias Serendipity e Lagrangeana”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil (1995)

### **IDENTIFICATION OF MODAL PARAMETERS OF PLATE**

**Abstract** – This work presents the study of dynamic behaviour of concrete slab. Structures quite light and slender are becoming more and more used in the civil construction, and they are very vulnerable to the effects of vibrations caused by the own users. In this case, the isolation of the vibration is quite complex, and the levels of vibration should be controlled by the own characteristics of the structure, therefore, the knowledge of their dynamic properties is a fundamental condition for the development of design that offers security and comfort to users. This paper describes the application of a finite element model updating for the case of plates.

**Keywords** – Model updating, Finite Element Method, Plates.