



## DETERMINACION ANALITICA DE LA MORFOLOGIA DE LOS DIENTES DEL ENGRANE BIPARAMÉTRICO

BORIS F. VORONIN, JESÚS A. ÁLVAREZ SÁNCHEZ, JOSÉ ANTONIO GÓMEZ  
REYNA

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara,  
División de Ingenierías, Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Av. Revolución 1500, Guadalajara, Jalisco, México, C.P. 44430

*(Recibido 4 de septiembre de 2006, para publicación 17 de julio de 2007)*

**Resumen** – En el material presentado se muestra una solución a tres problemas teóricos de engranajes de dos grados de libertad: obtención de la ecuación de la línea de contacto del engrane biparamétrico, determinación de la ecuación de la superficie exterior del engrane biparamétrico, determinación del espesor de los dientes del engrane biparamétrico. Se muestra la definición de un tipo de interferencia en la superficie de cresta de los dientes de engranes biparamétricos que se manifiesta en agudeza de éstos. Se presentan los resultados del cálculo del espesor de los dientes en la superficie de cresta de un engrane biparamétrico. El material está presentado con indicación y terminología correspondiente a las Normas ISO.

**Palabras clave** – Teoría de engranajes, engranajes espaciales, interferencia en los engranes biparamétricos.

### 1. INTRODUCCIÓN

En varios trabajos [1-4] se representan los análisis teóricos y aplicaciones prácticas de los engranajes de dos grados de libertad, conocidos como biparamétricos.

Éstos (véase la Fig. 1) están compuestos de un engrane cilíndrico y otro biparamétrico y están designados a transmitir el movimiento de rotación de una flecha a otra con una variación del ángulo de intersección de sus ejes en un rango grande, teóricamente de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

En estos trabajos se muestran resultados de análisis de la cinemática de los engranajes compuestos de un engrane biparamétrico y otro cilíndrico cuyos parámetros son distintos del engrane generador [2], también se representa un método de determinación de un tipo de interferencia en la raíz del diente del engrane biparamétrico, denominado socavación [4]. Ésta aparece en el proceso de maquinado y perjudica el engrane. Y en los trabajos [5, 6] se representa el mismo método empleado para los engranes espaciales de un grado de libertad.

Sin embargo la socavación no es el único peligro que puede tener el engranaje. Existe otro tipo de interferencia cuando ambas superficies del diente, la izquierda y la derecha, se intersecan a una altura menor que la altura necesaria. Esto se manifiesta en el diente agudo, lo que lo debilita en la cresta y en el engranaje con el otro engrane puede disminuir la razón de contacto.

El diente agudo se puede especificar midiendo el espesor de los dientes en el diámetro de cresta. Aquí se muestra un método para el cálculo del espesor de los dientes a la altura de un radio arbitrario  $r_x$  y en la superficie exterior del engrane biparamétrico. La igualdad a cero del espesor del diente en la superficie exterior o un signo negativo de su magnitud manifiesta interferencia en la cresta.

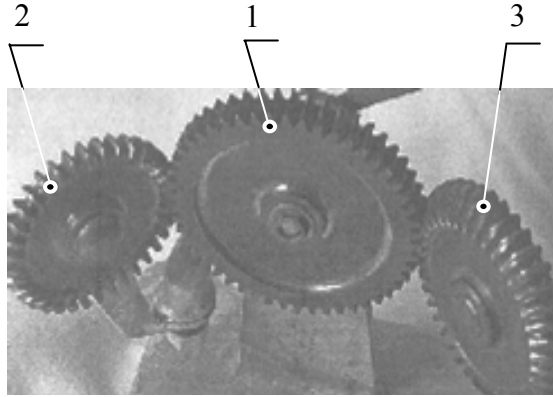


Fig. 1. Modelo físico del engranaje del engrane cilíndrico 1 con dos engranes biparamétricos: con el 2 realiza la variación del ángulo de intersección de los ejes en el rango hasta  $90^\circ$ , y con el 3 hasta  $60^\circ$ .

## 2. INTRODUCCIÓN EN LA TEORÍA GENERAL DE LOS ENGRANAJES BIPARAMÉTRICOS

### 2.1. La ecuación de la línea de contacto de engranaje

La primera tarea que se necesita resolver en la teoría de engranajes es la determinación de la ecuación de la normal común en la que se realiza el contacto de dos superficies conjugadas. Los engranajes biparamétricos pertenecen a los espaciales, por eso la determinación de éstos se basa en el teorema general sobre la relación de transmisión instantánea presentada en el trabajo [7].

El teorema citado establece, que si  $M_1$  y  $M_2$  son los puntos de intersección de la normal común  $n-n$  con los planos paralelos  $P_1$  y  $P_2$  que pasan a través de los ejes de los engranes, entonces las velocidades de estos puntos son iguales y la relación de transmisión instantánea en el engranaje es inversamente proporcional a la razón de los radios vectores de estos puntos.

El teorema se ilustra en la Fig. 2 donde las superficies  $F_1$  y  $F_2$  son conjugadas, pertenecen a los eslabones 1 y 2 y giran alrededor de los ejes  $O_1O_1$  y  $O_2O_2$  con velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , respectivamente. Las superficies están en contacto en el punto  $K$  a través del cual está trazada la normal común  $n-n$ . Ésta en los puntos  $M_1$  y  $M_2$  interseca los planos  $P_1$  y  $P_2$  que son paralelos y pasan a través de los ejes  $O_1O_1$  y  $O_2O_2$ , respectivamente.

Las velocidades de los puntos  $K_1$  y  $K_2$  son los productos vectoriales de los vectores de las velocidades angulares  $\bar{\omega}_1$  y  $\bar{\omega}_2$  por los radios vectores  $\bar{r}_{K1}$  y  $\bar{r}_{K2}$ . Su expresión matemática es:  $\bar{v}_{K1} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{K1}$  y  $\bar{v}_{K2} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{K2}$ .

Según el teorema general de engranajes, en el punto de contacto, el vector de la velocidad relativa de las superficies conjugadas es perpendicular a la normal común  $n-n$ , lo que se expresa como:  $\bar{n} \times (\bar{v}_{K2} - \bar{v}_{K1}) = 0$  [8]. Por consiguiente, las proyecciones de las velocidades  $v_{K1}$  y  $v_{K2}$  sobre la normal común son iguales  $v_{K1} = v_{K2}$ . Ya que los puntos  $M_1$  y  $M_2$  se ubican sobre la misma normal y pertenecen a los mismos engranes, las proyecciones de los vectores velocidad de éstos sobre la normal  $n-n$  son iguales a los del movimiento de los puntos  $K_1$  y  $K_2$ . Debido a que los planos  $P_1$  y  $P_2$ , donde se ubican los puntos  $M_1$  y  $M_2$ , son paralelos, los vectores velocidad de éstos también son paralelos, tienen el mismo sentido y son iguales en magnitud, es decir:  $\bar{v}_{M2} = \bar{v}_{M1}$ . Teniendo en cuenta que  $v_{M1} = \omega_1 r_1$  y  $v_{M2} = -\omega_2 r_2$ , (en el engranaje externo las velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tienen sentido opuesto), se tiene:

$$\omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2 \text{ y la relación de transmisión resulta como: } u_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

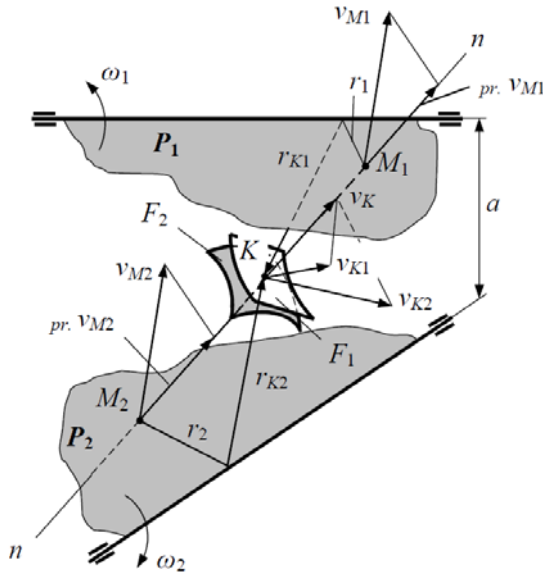


Fig. 2. Diagrama que ilustra la interacción de las superficies conjugadas \$F\_1\$ y \$F\_2\$ en el punto de contacto \$K\$ y el modo de obtención de las velocidades de los puntos \$M\_1\$ y \$M\_2\$ de cruce de la normal común \$n-n\$ con los planos paralelos \$P\_1\$ y \$P\_2\$.

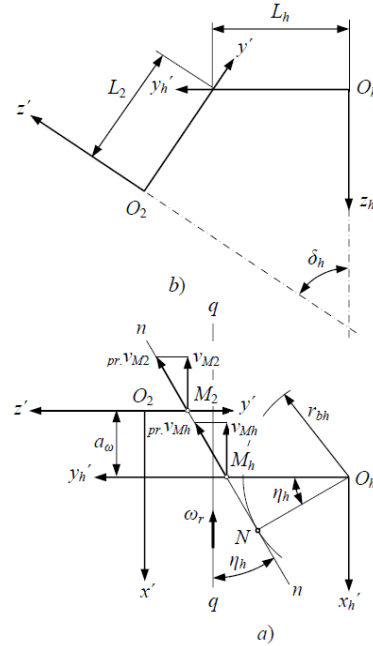


Fig. 3. Diagrama que ilustra el uso del teorema sobre la relación de transmisión instantánea para la obtención del ángulo de engranaje para los engranajes biparamétricos.

El valor del teorema consiste en que en los engranajes espaciales, los que no se reducen al teorema de Willis sobre la relación de transmisión instantánea para los mecanismos planos, siempre se pueden encontrar dos planos paralelos que atraviesen los ejes de los eslabones que engranan y con estos determinar la normal común y la relación de transmisión instantánea. El uso del teorema para el problema planteado se describe a continuación.

En la Fig. 3 en las proyecciones \$a\$ y \$b\$ mutuamente ortogonales están representados los sistemas de coordenadas \$S\_h'(x\_h', y\_h', z\_h')\$, que es inmóvil al engrane generador, y \$S'(x', y', z')\$, que es inmóvil al engrane biparamétrico. Ambos sistemas están a distancias \$L\_h\$ y \$L\_2\$ desde el eje \$q-q\$ alrededor del cual gira el sistema \$S'\$ con respecto al \$S\_h'\$ con la velocidad angular  $\omega_r = \frac{d\delta_h}{dt}$ . Los sistemas de coordenadas están dispuestos de modo que los planos \$(y\_h', z\_h')\$ y \$(y', z')\$ sean perpendiculares al eje \$q-q\$ y estén a una distancia \$a\_\omega\$ uno de otro.

Para encontrar la ecuación de la normal común hay que determinar el plano de su ubicación ya que ésta, en general, puede estar en el plano \$(x\_h', y\_h')\$ o en cualquier otro paralelo a éste.

Para la determinación de la ubicación del plano de ubicación de la normal \$n-n\$ se pueden emplear métodos matemáticos [3], pero aquí se empleará, como el más claro, un método gráfico utilizado en el trabajo [2].

Si se supone que la línea de contacto se ubica en el plano paralelo al \$(x\_h', y\_h')\$, situado a una distancia \$z^0\$ de la misma (Fig. 4), entonces, el punto de contacto \$K\$, con el movimiento del eslabón 2 alrededor del eje \$q-q\$, tiene una velocidad  $\bar{U}^{K_2} = \bar{\omega}_r \times \bar{r}_K$ . Al descomponer  $\bar{U}^{K_2}$  en componentes  $\bar{U}_y^{K_2}$ , paralela al eje \$y\_h'\$ y  $\bar{U}_z^{K_2}$  paralela al \$z\_h'\$, se puede llegar a la siguiente conclusión.

La componente  $\bar{U}_z^{K_2}$  es perpendicular al plano \$d-d\$, en que se ubica la normal común \$n-n\$, por consiguiente es perpendicular a la misma y su producto vectorial es igual a cero:  $\bar{n} \times \bar{U}_z^{K_2} = 0$ . Esto significa que la componente indicada no ejerce ninguna influencia sobre el movimiento relativo de los eslabones.

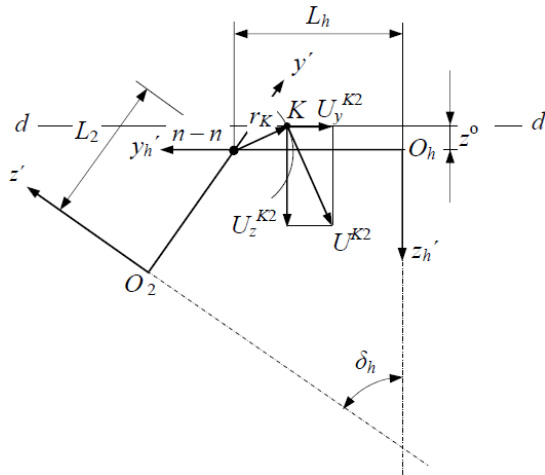


Fig. 4. Diagrama que ilustra que la suposición sobre la disposición del punto de contacto  $K$  y de la normal común  $n-n$  en el proceso de interacción del engrane generador con el biparamétrico fuera del plano  $(x'_h, y'_h)$  es errónea.

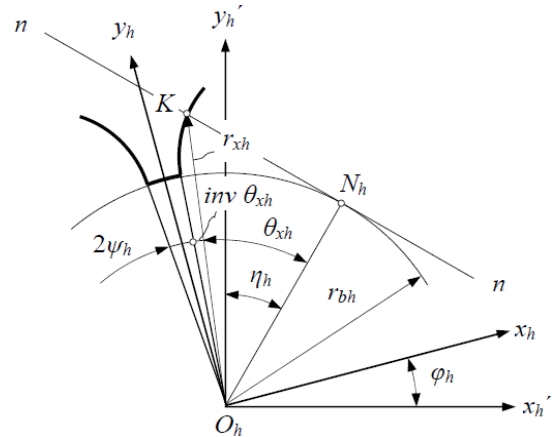


Fig. 5. Diagrama que muestra correlación entre los parámetros de la evolvente y el movimiento de éste junto con el sistema de coordenadas móvil  $S_h$  respecto al inmóvil  $S'_h$ .

La componente  $\vec{U}_y^{K_2}$  se ubica en el mismo plano  $d-d$ . Ya que la línea de contacto  $n-n$  forma un ángulo de  $\eta_h$  respecto al eje  $q-q$  (véase la figura 3b), resulta que la componente  $\vec{U}_y^{K_2}$  no es perpendicular a la normal. Por consiguiente, el producto vectorial de éstos no es igual a cero:  $\vec{n} \times \vec{U}_y^{K_2} \neq 0$ .

Si la suposición anterior fuera correcta, entonces esto indicaría que la herramienta de corte tiene movimiento lineal respecto al eslabón 2 en la dirección del eje  $y'_h$ , es decir, la herramienta se aleja o se acerca al engrane biparamétrico, lo que contradice las condiciones del proceso de tallado.

Las condiciones de tallado dicta el diseño de la máquina para que deba ser hecho el engranaje. En la mayoría de los casos se necesita hacer engranaje con la distancia entre los centros fija. Para el caso de la formación del engrane biparamétrico se necesita el engrane con el eje de oscilación  $q-q$  fijo al eje de rotación de éste. Por eso las distancias  $L_2$  y  $L_h$  son fijas. De estos razonamientos resulta que el movimiento relativo en la dirección transversal de los eslabones no se realiza y la componente  $\vec{U}_y^{K_2}$  en realidad es igual a cero, por consiguiente:  $\vec{n} \times \vec{U}^{K_2} = 0$ . Igualdad  $\vec{n} \times \vec{U}^{K_2} = 0$  significa que el vector  $\vec{U}^{K_2}$  es perpendicular al plano  $(x'_h, y'_h)$ , es decir, la normal común  $n-n$ , para el caso cuando el engrane biparamétrico está en contacto con la herramienta de corte, se ubica en el plano  $(x'_h, y'_h)$ , y la distancia  $z^0$  es igual a cero ( $z^0=0$ ).

Para la formación de los dientes de engranes se puede utilizar cualquier curva: circunferencia, cicloide, evolvente, etc. Teniendo en cuenta que en la industria el perfil más usado es el de evolvente, éste se toma para la formación del perfil de los dientes del engrane biparamétrico. En calidad de la herramienta de corte se toma piñón cortador.

Para las investigaciones teóricas se usa un engrane generador. Se trata de un engranaje imaginario, con un perfil idéntico al del piñón cortador. Para la obtención de la ecuación del perfil, se trabaja con los sistemas de coordenadas  $S_h$  y  $S'_h$  antes descritos y en el sistema  $S_h$  se dispone el perfil del engrane generador (Fig. 5). Su ecuación en el sistema de coordenadas  $S'_h$  será:

$$\begin{aligned} x'_h &= \frac{r_{bh}}{\cos \alpha_{xh}} \sin(\alpha_{xh} + \psi_h) \\ y'_h &= \frac{r_{bh}}{\cos \alpha_{xh}} \cos \alpha(\theta_{xh} + \psi_h) \\ z'_h &= z \end{aligned} \quad (1)$$

en que  $r_{bh}$  es el radio de círculo básico del engrane generador;  $\alpha_{xh}$  es el ángulo de presión en el punto de perfil del diente en la altura del radio vector  $\bar{r}_{xh}$ ;  $\psi_h$  es el ángulo central que corresponde a la mitad del ángulo entre los dientes en el círculo básico del engrane generador.

Si se da un giro al engrane generador junto con el sistema de coordenadas  $S_h$  respecto al sistema  $S'_h$  en el ángulo  $\varphi_h$  el punto de cruce  $K$  de la evolvente con la normal  $n-n$  va a deslizarse sobre la evolvente y sobre la normal, con este va a cambiar el ángulo  $\alpha_{xh}$  y el radio vector  $\bar{r}_{xh}$ . De la Fig. 5 se puede obtener la relación entre el ángulo  $\alpha_{xh}$  y el  $\varphi_h$ . Esta se representa como:

$$\alpha_{xh} = \varphi_h + \eta_h - \text{inv } \alpha_{xh} - \psi_h$$

donde  $\text{inv } \alpha_{xh}$  es la función de involuta en el punto con radio vector  $\bar{r}_{xh}$ ,  $\text{inv } \alpha_{xh} = \tan \alpha_{xh} - \alpha_{xh}$ , y  $\eta_h$  es el ángulo que determina la orientación de la normal  $n-n$  en el sistema de coordenadas  $S'_h$ .

El proceso de obtención de los datos que de manera única definen la ubicación de la normal común  $n-n$  es el siguiente.

En el sistema de coordenadas  $S'_h$  se coloca la normal  $n-n$  tangente al círculo básico bajo el ángulo  $\eta_h$  cuyo valor se desconoce (véase la Fig. 3). Luego en el mismo sistema de coordenadas se colocan dos planos paralelos ( $y'_h, z'_h$ ) y ( $y', z'$ ) del modo que la normal los interseca en los puntos  $M_h$  y  $M_2$ , respectivamente. Al emplear el teorema general sobre la relación de transmisión instantánea se puede obtener la correlación siguiente:

$$\bar{v}_{Mh} = \bar{v}_{M2} \quad (2)$$

Según la Fig. 3, el radio vector  $R_{Mh}$  del punto  $M_h$  del engrane generador es igual a:

$$R_{Mh} = \frac{r_{bh}}{\cos \eta_h}, \quad (3)$$

y el radio vector  $R_{M2}$  del punto  $M_2$ , del engrane biparamétrico, es:

$$R_{M2} = L_2 + (L_h - R_{Mh} - a_\omega \tan \eta_h) \cos \delta_h. \quad (4)$$

Al multiplicar (3) por  $\omega_h$  y (4) por  $\omega_2 = \omega_h u_{2h}$ , donde  $u_{2h}$  es el valor absoluto de la relación de transmisión del engranaje:  $u_{2h} = \frac{\omega_2}{\omega_h} = \frac{z_h}{z_2}$  (aquí  $z_h$  y  $z_2$  son los números de dientes del engrane generador y del biparamétrico, respectivamente) se obtienen las velocidades de los puntos  $M_h$  y  $M_2$ . Para el punto  $M_h$  ésta será:

$$v_{Mh} = \frac{r_{bh}}{\cos \eta_h} \omega_h; \quad (5)$$

y para el  $M_2$ :

$$v_{M2} = [L_2 + (L_h - R_{Mh} - a_\omega \tan \eta_h) \cos \delta_h] u_{2h} \omega_h. \quad (6)$$

Al sustituir (5) y (6) en (2), y tomar para los engranes simétricos  $a_\omega = 0$  se obtiene:

$$\cos \eta_h = \frac{r_{bh}(1 - u_{2h} \cos \delta_h)}{u_{2h}(L_2 + L_h \cos \delta_h)}. \quad (7)$$

La ecuación (7) es la de la normal común que determina las condiciones del engranaje.

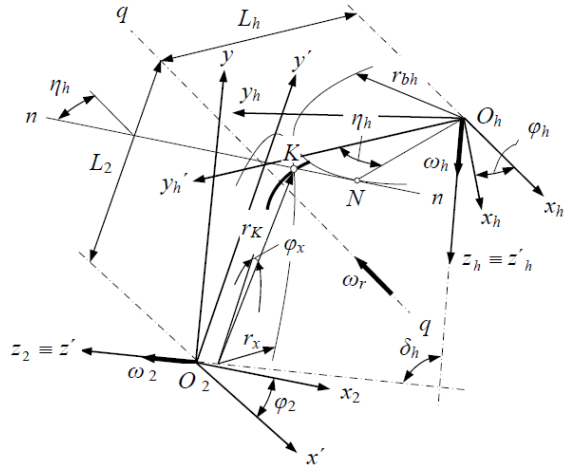


Fig. 6. Representación gráfica del método de la obtención del espesor de los dientes del engrane biparamétrico mediante el cilindro auxiliar de radio  $r_x$ .

### 3. DETERMINACIÓN DEL ESPESOR DE LOS DIENTES DEL ENGRANE BIPARAMÉTRICO

#### 3.1. Determinación del espesor de los dientes en la altura de radio $r_x$

Ahora se puede proceder a la determinación del espesor de los dientes del engrane biparamétrico. Para éste se toma el perfil derecho del diente del engrane generador (véase la figura 5).

En la Fig. 6 se presenta la disposición de los sistemas de coordenadas  $S'$  y  $S_h'$ , antes descritos, a los cuales se adicionan: el sistema  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ , que es el del engrane biparamétrico unido rígidamente con éste, y  $S_h(x_h, y_h, z_h)$ , unido rígidamente con el engrane generador. El sistema  $S_2$  gira alrededor del eje  $z'$  del sistema de coordenadas  $S'$  con velocidad angular  $\omega_2$  y el  $S_h$  gira respecto al sistema  $S_h'$  alrededor del eje  $z_h'$  con velocidad angular  $\omega_h$ . Las velocidades angulares se relacionan mediante:

$$u_{h2} = \frac{1}{u_{2h}} = \frac{\omega_h}{\omega_2} \tag{8}$$

El espesor del diente en el radio arbitrario  $r_x$  se puede determinar de diferentes modos: partiendo de la ecuación de la superficie que se genera determinar la coordenada  $x_2$  del punto que se ubica el radio  $r_x$ , donde la coordenada  $x_2$  es igual a la mitad de la cuerda del espesor del diente, o mediante cortes de la misma superficie, entre otras posibilidades. Todos estos métodos exigen la obtención de la ecuación de la superficie lateral del diente del engrane biparamétrico.

Aquí se presenta un método que formalmente no exige la composición de la ecuación de la superficie lateral del diente del engrane que se genera.

La idea consiste en lo siguiente. La superficie lateral del diente del engrane biparamétrico es de doble curvatura y no se reduce al plano; por eso adicionalmente se construye el cilindro auxiliar de radio  $r_x$  cuyo eje será coincidente con el  $z'$  y se define el punto  $K$  de cruce del cilindro con la normal común  $n-n$ . Teniendo en cuenta que todos los puntos de contacto del engrane generador y del biparamétrico están en ésta, el punto  $K$  se considera el de contacto de las superficies conjugadas. Si se gira el engrane generador hasta el cruce de evolvente con el punto  $K$  se define la posición angular de éste. Ya que el engrane generador está unido con el biparamétrico mediante la relación de transmisión (8) se define el ángulo entre el plano  $(y_2, z_2)$  y el radio vector  $\bar{r}_K$  del punto  $K$ , lo que determina la mitad del espesor angular del diente en el mismo punto.

Luego se determina la distancia desde el punto  $K$  hasta el plano  $(y_2, z_2)$  lo que determina la mitad del espesor del diente en el radio  $r_x$ .

Comúnmente la normal  $n-n$  atraviesa el cilindro en dos puntos. Para definir el cual de éstos hay que tomar como el de contacto del engranaje biparamétrico con el generador, se necesita analizar la orientación de la normal respecto al sistema de coordenadas  $S'$ . Al examinar la Fig. 6, se puede llegar a la conclusión de que, en calidad de punto de contacto se puede tomar solamente el que esté ubicado a la menor distancia desde el punto  $N$ , que es el de tangencia de la  $n-n$  con el círculo básico. Este punto también tendrá la menor distancia desde el plano  $(y_2, z_2)$ . Por consiguiente, la tarea consiste en la determinación de las coordenadas de éste punto.

La ecuación del cilindro auxiliar en el sistema de coordenadas  $S'$  se escribirá en forma:

$$\begin{aligned}x'_x &= r_x \operatorname{sen} \varphi_x \\y'_x &= r_x \cos \varphi_x \\z'_x &= z_x\end{aligned}\quad (9)$$

y la ecuación de la normal común  $n-n$  en el mismo sistema de coordenadas  $S'$  se presentará como:

$$\begin{aligned}x'_{n-n} &= r_{bh} (\operatorname{sen} \eta_h - \cos \eta_h \tan \theta_{xh}) \\y'_{n-n} &= r_{bh} (\cos \eta_h + \operatorname{sen} \eta_h \tan \theta_{xh}) \cos \delta_h + (L_2 + L_h \cos \delta_h) \\z'_{n-n} &= r_{bh} (\cos \eta_h + \operatorname{sen} \eta_h \tan \theta_{xh}) \operatorname{sen} \delta_h - L_h \operatorname{sen} \delta_h\end{aligned}\quad (10)$$

El punto de cruce de la normal con la superficie del cilindro se presenta en forma:

$$\begin{aligned}x'_x &= x'_{n-n} \\y'_x &= y'_{n-n} \\z'_x &= z'_{n-n}\end{aligned}\quad (11)$$

Al sustituir (9) y (10) en (11) se tiene:

$$\operatorname{sen} \varphi_K = \frac{D \tan \eta_h \cos \delta_h + \sqrt{r_x^2 E - D^2}}{r_x E}\quad (12)$$

Indicaciones, tomados en la formula (12), son los siguientes:  $\varphi_K$  es el ángulo entre el radio vector  $r_K$  del punto de cruce  $K$  y el plano  $(y', z')$  en el sistema de coordenadas  $S'$  (véase la Fig. 6),

$$D = \frac{r_{bh} \cos \delta_h}{\cos \eta_h} - L_2 - L_h \cos \delta_h \quad E = 1 + \tan^2 \eta_h \cos^2 \delta_h.$$

Al sustituir en la ecuación (12) se determina  $\varphi_K$  y luego se determina el ángulo entre el radio vector  $r_K$  y el plano  $(y_2, z_2)$  como:

$$\tau_K = \varphi_K + \varphi_2\quad (13)$$

donde:  $\varphi_2 = u_{2h} \varphi_h$ .

El espesor del diente en el arco de radio  $r_x$  se calcula como:

$$s_x = 2r_x \tau_K\quad (14)$$

y la cuerda, que une dos puntos contrarios del diente como:

$$s_x = 2r_x \operatorname{sen} \tau_K$$

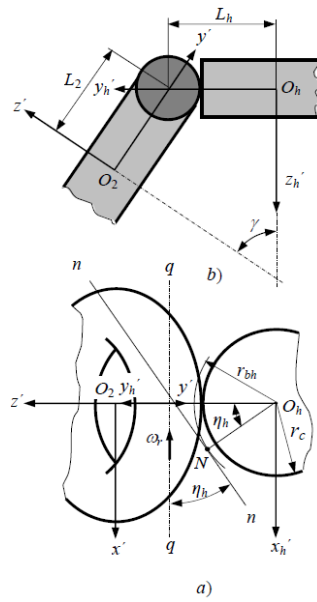


Fig. 7. Esquema para la descripción de la superficie exterior del engrane biparamétrico.

### 3.2. Determinación del espesor de los dientes en la superficie exterior del engrane

La determinación del espesor de los dientes en la altura de radio  $r_x$  se necesita para el control de calidad y para el cálculo de la holgura en el engranaje; pero en la etapa de la síntesis, para evitar el diente agudo hay que determinar el espesor en la superficie exterior. La superficie exterior del engrane biparamétrico puede ser obtenida mediante un cilindro generador cuyo eje coincide con el eje  $z_h$  del engrane generador (véase la Fig. 7). Su radio se toma como:

$$r_c = r_h - h_{a2}m + x_h m$$

donde:

$m$  es el módulo de engranaje;

$r_h = \frac{mz_h}{2}$  es el radio de referencia del engrane generador;

$h_{a2}$  es el factor de altura de cabeza del diente del engrane biparamétrico;

$x_h$  es el coeficiente de desplazamiento del engrane generador respecto al biparamétrico (coeficiente de corrección).

La ecuación de esta superficie se obtiene mediante el empleo del método cinemático [8], según el cual:

$$\bar{r}_2^e = M_{2h'} \cdot \bar{r}_c \quad (15)$$

$$\bar{e}' \cdot \bar{V}^{(2h)} = 0 \quad (16)$$

$$\bar{e}' \cdot \bar{U}^{(2h)} = 0 \quad (17)$$

donde

$M_{2h'}$  es la matriz de transferencia al sistema de coordenadas  $S_2$  del  $S_{h'}$ ,

$\bar{e}'$  es el vector unitario de la normal a la superficie del cilindro generador de la superficie exterior del engrane biparamétrico;



$\bar{V}^{(2h)}$  es el vector velocidad relativa en el punto de contacto de las superficies conjugadas con  $\gamma = \text{constante}$  (aquí  $\gamma$  es el ángulo de intersección de los ejes del cilindro generador y de la superficie generada);

$\bar{U}^{(2h)}$  es el vector velocidad relativa en el punto de contacto con  $\varphi = \text{constante}$  (aquí  $\varphi$  es el ángulo de giro del cilindro).

La ecuación del cilindro de radio  $r_c$  en el sistema de coordenadas  $S_h'$  tendrá la forma:

$$\begin{aligned}x_c' &= r_c \cos \varphi \\y_c' &= r_c \sen \varphi \\z_c' &= z\end{aligned}\quad (18)$$

y la ecuación del vector unitario normal tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned}e_{xh}' &= \cos \varphi \\e_{yh}' &= \sen \varphi \\e_{zh}' &= 0\end{aligned}\quad (19)$$

Las ecuaciones de las velocidades presentadas en el mismo sistema de coordenadas  $S_h'$  con  $\gamma = \text{constante}$  son:

$$\begin{aligned}V_x^{(2h)} &= -y_c'(1 + u_{2h} \cos \gamma)\omega_h - z_c'u_{2h}\omega_h \cos \gamma + u_{2h}(L_2 + L_h \cos \gamma)\omega_h \\V_y^{(2h)} &= x_c'(1 + u_{2h} \cos \gamma)\omega_h \\V_z^{(2h)} &= x_c'u_{2h} \sen \gamma\end{aligned}\quad (20)$$

y con  $\varphi = \text{constante}$  son:

$$\begin{aligned}U_x^{(2h)} &= 0 \\U_y^{(2h)} &= -z_c'\omega_r \\U_z^{(2h)} &= (y_c' - L_h)\omega_r\end{aligned}\quad (21)$$

Al tomar  $\omega_h=1 \text{ rad/s}$  y  $\omega_r=1 \text{ rad/s}$  y sustituir (19) y (20) en (16) y (17) también (21) en (17) se obtiene:

$$(L_2 + L_h \cos \gamma)\cos \varphi = 0\quad (22)$$

y

$$z = 0\quad (23)$$

De las ecuaciones (22) y (23) resulta, que todos los puntos de contacto del cilindro con la superficie exterior del engrane se ubican en el eje  $y'_h$  a distancia  $r_c$  desde el eje  $z'_h$ . La ecuación de la superficie exterior puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned}x_2^e &= (L_2 + L_h \cos \gamma - r_c \cos \gamma)\sen \varphi_2 \\y_2^e &= (L_2 + L_h \cos \gamma - r_c \cos \gamma)\cos \varphi_2 \\z_2^e &= -(L_h - r_c)\sen \gamma\end{aligned}\quad (24)$$

En las ecuaciones (24) se observa que la superficie exterior del engrane biparamétrico es la de un toroide.

Entonces, para determinar la magnitud del espesor de los dientes en la superficie de la cresta, primeramente se define el punto de cruce de la normal común  $n-n$  con la superficie del toroide mediante:

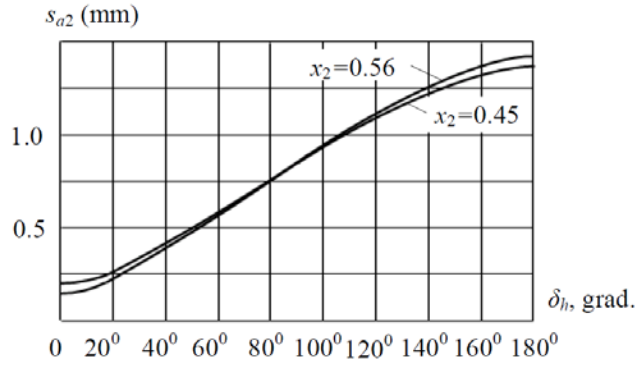


Fig. 8. Variación del espesor de los dientes del engrane biparamétrico con el cambio del ángulo de intersección de los ejes del engrane generador con el mismo.



Fig. 9. El engrane biparamétrico hecho para un manipulador.

$$x'_{n-n} = x_2^e$$

$$y'_{n-n} = y_2^e$$

$$z'_{n-n} = z_2^e$$

y luego se solucionan las ecuaciones (12), (13) y (14).

En la Fig. 8 se muestran los resultados del cálculo del espesor en la cresta de los dientes del engrane biparamétrico generado con los parámetros siguientes:

- módulo del engrane  $m = 1.5\text{mm}$ ,
- ángulo de perfil de la cremallera de referencia  $\alpha=30^\circ$ ,
- número de dientes del engrane biparamétrico  $z_2=20$ ,
- factor de altura de cabeza del engrane biparamétrico  $h_{a2}=1$ ,
- número de dientes del engrane generador  $z_h=12$ .

En la gráfica se aprecia que con el coeficiente de corrección  $x_2=0.45$  y  $x_2=0.56$  se evita la interferencia en todo el rango posible de valores del ángulo de intersección de los ejes:  $0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$ .

En la Fig. 9 se muestra el engrane realizado con los parámetros siguientes: módulo del engrane  $m=1.5\text{mm}$ , ángulo del perfil de la cremallera de referencia  $\alpha=30^\circ$ , número de dientes del engrane biparamétrico  $z_2=20$ , coeficiente de altura de cabeza de los dientes del engrane biparamétrico  $h_{a2}=1$ , número de dientes del engrane generador  $z_h=12$ , coeficiente de corrección del engrane biparamétrico  $x_2=0.56$ . La parte aguda de los dientes del engrane biparamétrico en la superficie cilíndrica, que se nota en la Fig. 9, no contradice a los cálculos presentados ya que está fuera del rango de la variación del ángulo de intersección de los ejes y fuera de la superficie de cresta de los dientes.

El engrane descrito fue empleado en un mecanismo de manipulador para realizar trabajos en un ambiente radioactivo y químicamente agresivo [2]. En este mecanismo el engranaje está compuesto del engrane biparamétrico presentado en la Fig. 9 y el cilíndrico cuyos parámetros son los siguientes: módulo de los dientes  $m=1.5\text{mm}$ , ángulo del perfil de la cremallera de referencia  $\alpha=30^\circ$ , número de dientes  $z_1=20$ , factor de altura de cabeza de los dientes  $h_{a1}=1$ , coeficiente de corrección  $x_h=0.0$ . El engranaje indicado tiene la relación de transmisión igual a uno:  $u_{12} = \frac{z_2}{z_1} = 1$  y fue hecho para ejecutar la variación del ángulo

de intersección de los ejes de las flechas en el rango desde  $180^\circ$  (los ejes de engranajes coinciden) hasta  $75^\circ$ . El engranaje debe realizar este movimiento con la carga máxima igual a 1 Nm.

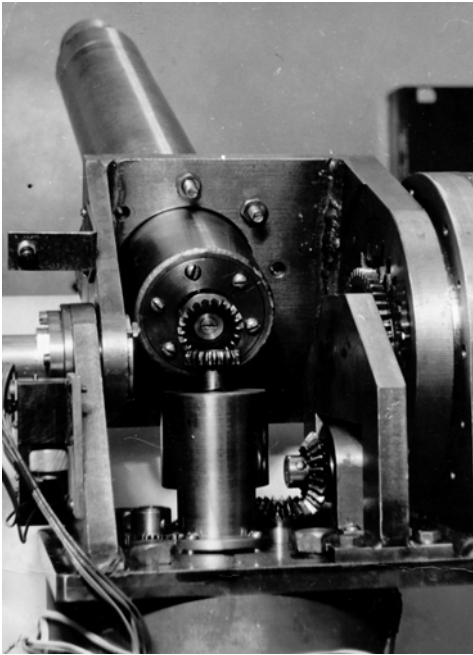


Fig. 10. Banco de pruebas para el ensayo de engranaje biparamétrico de un manipulador.

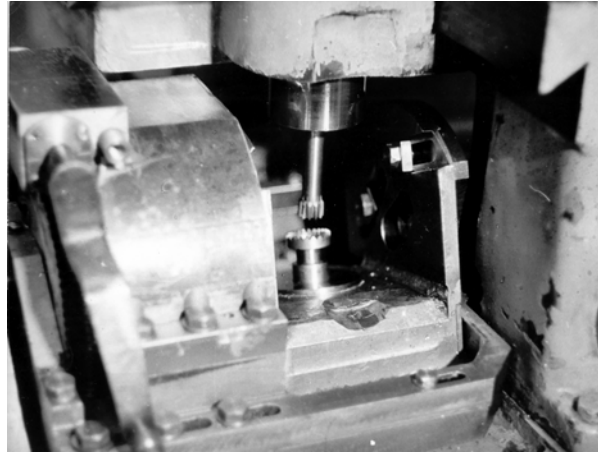


Fig. 11. Tallado del engranaje biparamétrico con el uso de una talladora de engranes.

En la Fig. 10 está representado el dispositivo para el ensayo a la fatiga del dicho engranaje. Las flechas, cargadas con el torque de 1 Nm, repiten el movimiento del brazo del manipulador. El dispositivo realiza el movimiento oscilatorio de una flecha respecto a otra y al mismo tiempo el movimiento giratorio uniforme de éstas. Con este dispositivo se determina longevidad del engranaje.

En la Fig. 11 se muestra el proceso de tallado del engrane biparamétrico con el piñón cortador antes mencionado. El piñón cortador tiene el movimiento de corte lineal alternativo y el movimiento, junto con el engrane, de generación.

El movimiento de generación consta de dos movimientos independientes: uno giratorio del engrane que se genera y del piñón cortador respecto a sus ejes con velocidades angulares correspondientes a la relación de transmisión y el otro debido a la variación del ángulo de intersección. El trabajo se inicia desde la posición con el ángulo de intersección de los ejes igual a  $180^{\circ}$  (los ejes del engrane y del piñón cortador son paralelos, con este se trabaja la parte interna de la corona dentada). Luego, al dar un giro al engrane que se genera respecto a su eje, se variaba discretamente el ángulo de intersección de los ejes. Así, fueron obtenidos todos los dientes del engrane biparamétrico hasta la obtención el rango completo del ángulo de intersección de los ejes. Por consiguiente no es posible lograr una superficie curva perfecta, sino formada con pequeños segmentos de rectas. Pero, ya que el paso discreto fue pequeño los bordes también fueron muy pequeños por lo que la exactitud fue satisfactoria.

#### 4. CONCLUSIONES

Fue comprobado que en el engranaje de generación (acoplamiento del engrane generador con el generado) la línea de contacto está en el plano que pasa a través del eje  $q-q$  perpendicularmente al eje de rotación del engrane generador.

Se obtuvo la ecuación de la línea de contacto y las ecuaciones para la determinación de los puntos de cruce de la misma con cilindro auxiliar de radio  $r_x$ .

Se obtuvo la ecuación de la superficie exterior del engranaje biparamétrico y el método para la determinación de los puntos de cruce de la misma con la línea de contacto.

Fue elaborado un método para la determinación del espesor de los dientes del engrane biparamétrico tanto en el radio arbitrario  $r_x$  como en la superficie exterior del engrane.

Las mediciones del espesor de los dientes del engrane 1 representado en la figura 9 demostraron la coincidencia completa con los resultados de los cálculos de éste lo que confirma la validez del método matemático presentado.

El procedimiento matemático empleado en este artículo puede ser utilizado no solamente para el cálculo de engranes con la variación del ángulo de intersección de los ejes en un rango grande sino también para el cálculo del perfil de los dientes de engranes cilíndricos con dientes hechos en forma de barril para engranajes de contacto localizado.

Estos engranajes también se consideran biparamétricos, pero con la variación del ángulo de intersección de los ejes en el rango muy pequeño.

El material aquí presentado pudiera ayudar a los ingenieros diseñadores de las máquinas para determinar la magnitud óptima de la altura del arco del perfil de los dientes en la dirección longitudinal relacionándola con la deformación del sistema mecánico y condiciones de ensamble en vez de elegirla arbitrariamente.

La aplicación más conocida de éste sería para el cálculo del perfil de los dientes del engrane cilíndrico para los acoplamientos dentados.

## REFERENCIAS

- [1] Voronin, B.F., “Investigación geométrica de engranajes especiales de equipo tecnológico de microelectrónica”, Tesis Doctoral, Instituto de Técnica Electrónica de Moscú, Moscú (1974)
- [2] Voronin, B.F., “Sobre la cinemática de engranajes de dos grados de libertad” *Ingeniería Mecánica. Tecnología y Desarrollo*, **1**(4), 144-150 (2004)
- [3] Voronin, B.F., “Essential aspects of the Analysis of Biparametric Gear Drives”, *Memorias del X Congreso Anual de SOMIM, Una década de Impulso a la Ingeniería Mecánica en México*, Querétaro, México, 9-17 (2004)
- [4] Voronin, B.F., Sanchez Jiménez y otros autores, “Socavación en los engranajes de dos grados de libertad”, *Memorias de la III Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica COMEC*, Universidad Central de Las Villas, Cuba, 1-8 (2004)
- [5] Liu, C.C., Tsay, C.B., “Tooth Undercutting of Beveloid Gears”, *ASME Journal of Mechanical Design*, **123**(4), 571-572 (2001)
- [6] Chen, N., “Edges of Regression and Limit Normal Point of Conjugate Surfaces”, *ASME Journal of Mechanical Design*, **122**(4), 422-423 (2000)
- [7] Korostelev, L.V., *La razón de velocidades instantánea en los engranajes espaciales. Teoría de Transmisiones en las Máquinas*, Mashinostroenie, Moscú, Rusia. (1970)
- [8] Litvin, F.L., *Gear Geometry and Applied Theory*, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ. (1994)

## APÉNDICE I: NOMENCLATURA

$a_o$  distancia más corta entre los ejes de rotación de los engranes del biparamétrico y del generador

$\bar{e}_h$  y  $\bar{e}_2$  vectores unitarios de las normales a las superficies de los dientes de los engranes de generación y biparamétrico, respectivamente

$\bar{e}'$  vector unitario de la normal a la superficie del cilindro generador que forma la superficie exterior del engrane biparamétrico

$h_{a2}$  factor de altura de cabeza del diente del engrane biparamétrico

$m$  módulo de engranaje

$r_{bh}$  radio del círculo básico de la rueda dentada generadora

$\bar{r}^{(h)}$  y  $\bar{r}^{(2)}$  radio vectores de los puntos ubicados sobre las superficies de los dientes de la rueda generadora y biparamétrica, respectivamente

$u_{h2}$  relación de transmisión en el engranaje del engrane generador con el biparamétrico

$z_h$  y  $z_2$  número de dientes del piñón cortador (del engrane generador) y del biparamétrico, respectivamente

$\bar{U}^{(2h)}$  vector velocidad relativa en el punto de contacto de las superficies conjugadas con los ángulos de giro de la superficie que se genera respecto al cilindro generador  $\varphi = \text{constante}$  y  $\gamma = \text{variable}$

$\bar{V}^{(2h)}$  vector velocidad relativa en el punto de contacto de las superficies conjugadas con los ángulos de giro de la superficie que se genera respecto al cilindro generador  $\varphi = \text{variable}$  y  $\gamma = \text{constante}$

$\delta_h$  ángulo de intersección de los ejes de las ruedas dentadas en el engranaje de generación

$\eta_h$  ángulo de engranaje formado por las ruedas dentadas en el engranaje de generación

$\alpha$  ángulo del perfil de la cremallera de referencia

$x_h$  coeficiente de desplazamiento radial del engrane generador respecto al biparamétrico, también llamado coeficiente de corrección

$\varphi_h$  y  $\varphi_2$  coordenadas angulares del engrane generador y del biparamétrico en los sistemas de coordenadas inmóviles correspondientes

$\omega_h$  y  $\omega_2$  velocidades angulares de los engranes generador y biparamétrico, respectivamente

$\omega_r$  velocidad angular del engrane biparamétrico en el movimiento alrededor del eje  $q-q$  con respecto al engrane generador

## ANALYTICAL DETERMINATION OF THE MORPHOLOGY OF THE TEETH OF THE BIPARAMETRIC GEAR

**Abstract** – A solution of three theoretical problems of gear drives of two degrees of freedom is shown: calculus of the contact line equation of biparametric gear drives, calculus of the external surface equation of the biparametric gear drives, calculus of the tooth thickness of biparametric gear drives. The definition of a type of interference in the surface of the tooth crest, which yields in tooth sharpness, is given. The results of calculating the tooth thickness in the addendum of biparametric gear drives are presented. The material is entered with indication and terminology corresponding to the Norms ISO.

**Keywords** – Theory of gears, Spatial gears, Interference in the biparametric gears.



