



## REGIÓN POSIBLE PARA EL ESPACIO DE TRABAJO DE UN MANIPULADOR GENÉRICO DE TRES PARES DE REVOLUCIÓN

NESTOR EDUARDO NAVA RODRÍGUEZ, MARCO CECCARELLI

LARM: Laboratorio de Robótica y Mecatrónica  
Departamento de Mecánica, Estructura, Ambiente y Territorio  
Universidad de Cassino  
Via Di Biasio 43 – 03043 Cassino(Fr), Italia

*(Recibido 26 de julio de 2005, para publicación 1 de julio de 2006)*

**Resumen** – En este artículo se presenta un procedimiento para derivar de forma analítica la región posible para la región accesible de un manipulador de tres pares de revolución. La región posible es el espacio dentro del cual se puede obtener una región accesible de un manipulador en función de los vínculos de alcance asignados. Esta región posible ha sido obtenida de manera analítica y geométrica, interceptando cada una de las regiones posibles delimitadas por las expresiones de los coeficientes estructurales del manipulador, las cuales son deducidas a partir de la expresión analítica de la envolvente de un toro. Se incluye un ejemplo ilustrativo para un manipulador genérico de tres pares de revolución con una configuración específica de las dimensiones de las barras, donde se muestra la región posible para su región accesible..

**Palabras clave** – Robótica, Cinemática de robots, manipuladores, espacio de trabajo.

### 1. INTRODUCCIÓN

El espacio de trabajo constituye una característica fundamental de los robots, sea para el diseño como para el uso en aplicaciones adecuadamente justificadas. El objetivo de este artículo ha sido canalizado principalmente en obtener la región posible para el espacio de trabajo de un manipulador genérico de tres pares de revolución, como extensión del procedimiento presentado en [1] para el caso de manipuladores de dos pares de revolución. La región posible puede definirse como la región del espacio cuyos puntos son posibles para el espacio de trabajo de un manipulador, ya que cumplen las condiciones que determinan dicha región posible. El espacio de trabajo de un robot manipulador se define como la región del espacio compuesta por todos los puntos que pueden ser alcanzados por el elemento terminal de un manipulador. Utilizando dicha región posible se pueden obtener manipuladores 3R con un espacio de trabajo deseado para aplicaciones específicas dentro de la región posible. Por esta razón, como parte del proceso de diseño y optimización de un robot manipulador, se han considerado principalmente las características del espacio de trabajo que se desea obtener, como es ilustrado en [2-4]. Debido a la importancia de las características del espacio de trabajo de un robot, se han desarrollado diferentes estudios analíticos de dichas características en robots seriales de dos pares rotacionales, [5-6], tres pares rotacionales, [7-12], n-pares rotacionales, [13], y también manipuladores paralelos, [4,14-16].

Se muestra un procedimiento analítico para determinar dicha región posible, que consiste en manipular de manera algebraica la ecuación de la envoltura de un toro, en busca de obtener expresiones analíticas de los coeficientes estructurales del manipulador de tres pares de revolución. La naturaleza algebraica de la formulación propuesta puede ser también usada para el análisis de manipuladores seriales con más de tres pares de revolución, usando una extensión apropiada de la fórmula de la envolvente del toro para la obtención de su región accesible, como es propuesto en [13].

## 2. UNA FORMULACIÓN PARA DETERMINAR LA REGIÓN POSIBLE PARA EL ESPACIO DE TRABAJO

Se desea determinar la región posible para el espacio de trabajo del manipulador con tres pares de rotación de la Fig. 1, cuyos parámetros de Hartenberg y Denavit son  $a_1, a_2, a_3, d_2, d_3, \alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

Específicamente, los parámetros  $a_1, a_2$  y  $a_3$ , constituyen las distancias a lo largo de las normales comunes entre los ejes  $Z_1$  y  $Z_2$ , los ejes  $Z_2$  y  $Z_3$ , el eje  $Z_3$  y el punto de referencia  $H$  del elemento terminal del manipulador; los valores de  $d_2$  y  $d_3$  son las magnitudes a lo largo de los ejes  $Z_2$  y  $Z_3$ ; los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  constituyen los ángulos de desfase entre los ejes  $Z_1$  y  $Z_2$  y los ejes  $Z_2$  y  $Z_3$ , del robot manipulador de la Fig. 1, respectivamente. Los ángulos  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ , son los ángulos de rotación de los tres pares de revolución, medidos entre los ejes  $X$  y  $X_1$ , los ejes  $X_1$  y  $X_2$ , los ejes  $X_2$  y  $X_3$ , respectivamente. Es importante notar que el valor del parámetro  $d_1$  es irrelevante al momento de determinar el espacio de trabajo del robot manipulador, debido a que el aporte de este parámetro es el de subir y bajar dicho espacio de trabajo.

La obtención del espacio de trabajo del robot manipulador de la Fig. 1 se puede realizar a través del empleo de una formulación algebraica del contorno externo del toro, previamente obtenida en [1, 5, 7, 8, 10, 13]. El proceso de generación del toro, [18], consiste en el giro de una superficie toroidal alrededor del primer eje del robot  $Z_1$ , coincidente con el eje  $Z$  del sistema de referencia fijo, Fig. 1. La superficie toroidal se genera rotando alrededor del eje  $Z_2$  la circunferencia que se obtiene al rotar el punto  $H$  del elemento terminal alrededor del eje  $Z_3$ , como ha sido ilustrado en [19].

Después de algunas manipulaciones de naturaleza algebraica de las ecuaciones de la envoltura de un toro, se pueden obtener expresiones de los alcances radial  $r$  y axial  $z$  de los puntos de la frontera del espacio de trabajo en la forma [1],

$$r = \left[ A - z^2 + \frac{(Cz + D)G + F}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$z = \frac{-FG \pm \left[ -E^2(F^2 - B(E^2 + G^2)) \right]^{\frac{1}{2}}}{(E^2 + G^2)C} - \frac{D}{C} \quad (2)$$

en donde  $A, B, C, D, E, F$  y  $G$  han sido denominados como los coeficientes estructurales, los cuales son función de los parámetros de diseño de la estructura y están definidos por medio de las expresiones

$$A = a_1^2 + r_2^2 + (z_2 + d_2)^2$$

$$B = 4a_1^2 r_2^2$$

$$C = 2 \frac{a_1}{\text{sen } \alpha_1}$$

$$D = -2a_1(z_2 + d_2) \frac{\cos \alpha_1}{\text{sen } \alpha_1}$$

$$r_2 = \left[ (a_3 \cos \theta_3 + a_2)^2 + (a_3 \text{sen } \theta_3 \cos \alpha_2 + d_3 \text{sen } \alpha_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$z_2 = d_3 \cos \alpha_2 - a_3 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \alpha_2$$

$$E = -2a_3(d_2 \text{sen } \alpha_2 \cos \theta_3 + a_2 \text{sen } \theta_3)$$

$$F = 4a_1^2 a_3 (a_3 \text{sen } \alpha_2^2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 + a_2 \text{sen } \theta_3 - d_3 \text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_2 \cos \theta_3)$$

$$G = 2a_1 a_3 \frac{\cos \alpha_1}{\text{sen } \alpha_1} \text{sen } \alpha_2 \cos \theta_3.$$

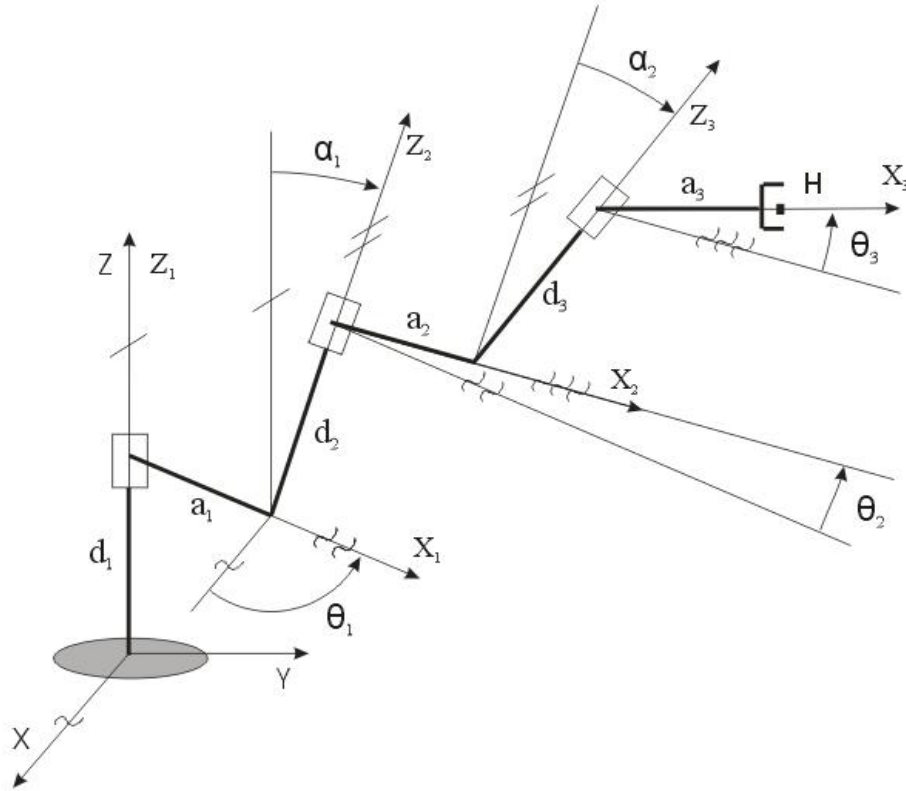


Fig. 1. Modelo cinemático de un brazo manipulador genérico de tres pares de revolución definido por los parámetros de Hartenberg y Denavit.

Los parámetros  $r_2$  y  $z_2$  de (3) representan los alcances radiales y axiales del punto  $H$  cuando se toma en consideración la superficie toroidal generada únicamente por los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .

Reagrupando las expresiones (1) y (2) de la frontera del espacio de trabajo, se pueden obtener dos nuevas expresiones de los alcances radial  $r$  y axial  $z$  que permitan una mejor manipulación de los parámetros contenidos en ellas, de la forma

$$z = -\frac{FG - Q + DT}{TC} \quad (4)$$

$$r^2 = \frac{-(-AT^2C^2E + EF^2G^2 - 2EFGQ + 2EFGDT + EQ^2 - 2EQDT + ED^2T^2 + TC^2FG^2)}{T^2C^2E} + \frac{(TC^2GQ + T^2C^2F)}{T^2C^2E} \quad (5)$$

donde los nuevos coeficientes  $T$  y  $Q$  pueden expresarse como

$$T = (E^2 + G^2) \quad (6)$$

$$Q = [-E^2(F^2 - B(E^2 + G^2))]^{1/2}$$

Con el uso de las ecuaciones (4) y (5) y conociendo las coordenadas  $r_i$  y  $z_i$  de los cuatro puntos característicos  $P^*$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  de la frontera del espacio de trabajo del manipulador genérico de tres pares de revolución, es posible construir un sistema de ecuaciones lineales en función de las variables  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,

$E$ ,  $F$  y  $G$ , que son las incógnitas del problema. Explicitando este sistema de ecuaciones lineales, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 r_{P^*}^2 &= A + v_1 F + v_2 \\
 z_{P^*} &= v_3 B^2 + v_4 D + v_5 G \\
 r_{P_2}^2 &= A + v_6 G + v_7 \\
 z_{P_2} &= v_3 B^2 + v_4 D + v_8 F \\
 r_{P_3}^2 &= A + v_9 B^2 + v_{10} \\
 z_{P_3} &= v_4 D + v_{11} \\
 r_{P_4}^2 &= A + v_{12} C + v_{13} D + v_{14} \\
 z_{P_4} &= v_4 D + v_{15} E + v_5 G.
 \end{aligned} \tag{7}$$

siendo  $r_{P^*}$ ,  $z_{P^*}$ ;  $r_{P_2}$ ,  $z_{P_2}$ ;  $r_{P_3}$ ,  $z_{P_3}$ ;  $r_{P_4}$ ,  $z_{P_4}$  las coordenadas radiales y axiales de los puntos  $P^*$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ .

Las expresiones (4) y (5) han sido obtenidas al compactar las Ecs. (1) y (2), con la finalidad de realizar el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\mathbf{I} \mathbf{O} = \mathbf{m} \tag{8}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= [A \ B^2 \ C \ D \ E \ F \ G \ 1]^T \\
 \mathbf{m} &= [r_{P^*}^2 \ z_{P^*} \ r_{P_2}^2 \ z_{P_2} \ r_{P_3}^2 \ z_{P_3} \ r_{P_4}^2 \ z_{P_4}]^T \\
 \mathbf{O} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & v_2 \\ 0 & v_3 & 0 & v_4 & 0 & 0 & v_5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_6 & v_7 \\ 0 & v_3 & 0 & v_4 & 0 & v_8 & 0 & 0 \\ 1 & v_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{10} \\ 0 & 0 & 0 & v_4 & 0 & 0 & 0 & v_{11} \\ 1 & 0 & v_{12} & v_{13} & 0 & 0 & 0 & v_{14} \\ 0 & 0 & 0 & v_4 & v_{15} & 0 & v_5 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9}$$

En particular puede observarse que en la Ec. (9) el vector  $\mathbf{m}$  es el vector de las coordenadas de los 4 puntos asignados de la frontera del espacio de trabajo del manipulador; el vector  $\mathbf{I}$  es el vector de incógnitas de los coeficientes estructurales  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $G$  de la Ec. (3) y la matriz  $\mathbf{O}$  es la matriz de constantes asignadas de la Ec. (7) cuyas expresiones han sido ilustradas en el Apéndice 1. Es importante destacar que el ultimo termino del vector  $\mathbf{I}$  es 1, debido a que constituye el termino independiente del sistema de ecuaciones lineales (7) que hace cuadrada la matriz  $\mathbf{O}$ .

El sistema de ecuaciones lineales (7) está constituido por 8 ecuaciones, de las cuales cuatro de ellas dependen del alcance radial  $r$  de los puntos de la frontera de la región accesible del manipulador de tres pares de revolución y constituyen diversas formas de escribir la Ec. (5). Es posible escribir la Ec. (5) de cuatro formas diferentes escogiendo los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $G$ , unos como variables y otros como constantes. Un ejemplo de ello, es la primera ecuación del sistema de ecuaciones (7) en donde los parámetros escogidos como variables son  $A$  y  $F$ , y los demás parámetros pueden ser escogidos como constantes. Las restantes cuatro ecuaciones del sistema de ecuaciones (7), dependientes del alcance axial de los puntos de la frontera de la región accesible del manipulador, constituyen cuatro diversas formas de escribir la Ec. (4). El sistema de ecuaciones lineales (7) ha sido construido de esta forma con la finalidad de desarrollar el sistema de ecuaciones en forma matricial (8).

El vector de incógnitas  $\mathbf{I}$  puede obtenerse invirtiendo la Ec. (8) como

$$\mathbf{l} = \mathbf{m} \mathbf{O}^{-1} \quad (10)$$

Extrayendo del vector  $\mathbf{l}$  cada una de las expresiones de  $A$ ,  $B^2$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $G$ , reagrupando y manipulando estas expresiones, es posible obtener los valores de los coeficientes estructurales en función de los parámetros  $j_f$ ,  $j_{ij}$  y  $u_{ij}$  de la forma

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{u_{88}}(r_{p^*}^2 j_{81} u_{18} - r_{p^*}^2 j_{11} u_{88} + j_{82} u_{18} z_{p^*} + j_{83} u_{18} r_{p2}^2 + z_{p2} j_{84} u_{18} - z_{p2} j_{14} u_{88} + r_{p3}^2 j_{85} u_{18} + \\ &\quad - r_{p3}^2 j_{15} u_{88} + z_{p3} j_{86} u_{18} - z_{p3} j_{16} u_{88} - u_{18} z_{p4}) \\ B^2 &= \frac{1}{u_{88}}(-j_{81} u_{28} r_{p^*}^2 - z_{p^*} j_{82} u_{28} + z_{p^*} j_{22} u_{88} - r_{p2}^2 j_{83} u_{28} + r_{p2}^2 j_{23} u_{88} - j_{84} u_{28} z_{p2} - r_{p3}^2 j_{85} u_{28} + \\ &\quad + r_{p3}^2 j_{25} u_{88} - z_{p3} j_{86} u_{28} + z_{p3} j_{26} u_{88} + u_{28} z_{p4}) \\ C &= \frac{1}{u_{88}}(-r_{p^*}^2 j_{81} u_{38} + r_{p^*}^2 j_{31} u_{88} - z_{p^*} j_{82} u_{38} + z_{p^*} j_{32} u_{88} - r_{p2}^2 j_{83} u_{38} + r_{p2}^2 j_{33} u_{88} - z_{p2} j_{84} u_{38} + \\ &\quad + z_{p2} j_{34} u_{88} - r_{p3}^2 j_{85} u_{38} + r_{p3}^2 j_{35} u_{88} - z_{p3} j_{86} u_{38} + z_{p3} j_{36} u_{88} + j_{37} r_{p4}^2 u_{88} + u_{38} z_{p4}) \\ D &= -\frac{1}{u_{88}}(r_{p^*}^2 j_{81} u_{48} - r_{p^*}^2 j_{41} u_{88} + j_{82} u_{48} z_{p^*} + j_{83} u_{48} r_{p2}^2 + z_{p2} j_{84} u_{48} - z_{p2} u_{88} + r_{p3}^2 j_{85} u_{48} + \\ &\quad - r_{p3}^2 j_{45} u_{88} + z_{p3} j_{86} u_{48} - z_{p3} j_{46} u_{88} - u_{48} z_{p4}) \\ E &= \frac{1}{u_{88}}(-r_{p^*}^2 j_{81} u_{58} + r_{p^*}^2 j_{51} u_{88} - z_{p^*} j_{82} u_{58} + z_{p^*} j_{52} u_{88} - r_{p2}^2 j_{83} u_{58} + r_{p2}^2 j_{53} u_{88} - \\ &\quad - z_{p2} j_{84} u_{58} + z_{p2} j_{54} u_{88} - r_{p3}^2 j_{85} u_{58} + r_{p3}^2 j_{55} u_{88} - z_{p3} j_{86} u_{58} + z_{p3} j_{56} u_{88} + z_{p4} u_{58} + z_{p4} j_{58} u_{88}) \\ F &= -\frac{1}{u_{88}}(r_{p^*}^2 j_{81} u_{68} - r_{p^*}^2 j_{61} u_{88} + j_{82} u_{68} z_{p^*} + j_{83} u_{68} r_{p2}^2 + z_{p2} j_{84} u_{68} - z_{p2} j_{64} u_{88} + \\ &\quad + r_{p3}^2 j_{85} u_{68} - r_{p3}^2 j_{65} u_{88} + z_{p3} j_{86} u_{68} - z_{p3} j_{66} u_{88} - u_{68} z_{p4}) \\ G &= \frac{1}{u_{88}}(-j_{81} j_f r_{p^*}^2 - z_{p^*} j_{82} j_f + z_{p^*} j_{72} u_{88} - r_{p2}^2 j_{83} j_f + r_{p2}^2 j_{73} u_{88} - j_{84} j_f z_{p2} - r_{p3}^2 j_{85} j_f + r_{p3}^2 j_{75} u_{88} \\ &\quad - z_{p3} j_{86} j_f + z_{p3} j_{76} u_{88} + j_f z_{p4}). \end{aligned} \quad (11)$$

Las expresiones de los parámetros  $j_f$ ,  $j_{ij}$  y  $u_{ij}$  están incluidas en el Apéndice 2. Cabe destacar que los valores de los parámetros  $p_{ij}$  son dependientes de los parámetros  $j_f$ ,  $j_{ij}$  y  $u_{ij}$ , y por esta razón ha sido posible obtener los valores de los coeficientes estructurales de las Ecs. (11) en función de estos últimos y de los alcances radial y axial de los cuatro puntos asignados contenidos en la frontera de la región accesible del robot manipulador genérico de tres pares revolución de la Fig. 1.

### 3. REGIÓN POSIBLE PARA EL REGION ACCESIBLE

La expresión analítica de la superficie toroidal tiene cuatro coeficientes estructurales, y por esta razón la formulación para determinar una superficie toroidal específica necesita cuatro puntos conocidos de la envoltura, como se ilustra en [1]. La expresión analítica de la envoltura de un toro tiene siete coeficientes estructurales, como es mostrado en las Ecs. (1) y (2). Sin embargo debido a la naturaleza algebraica de la formulación propuesta, para determinar un toro específico igualmente son necesarios cuatro puntos conocidos de la frontera de la región accesible del manipulador genérico de tres pares de revolución, que hacen posible obtener ocho ecuaciones: cuatro ecuaciones del alcance radial  $r$ , mostradas en (1) y cuatro ecuaciones del alcance axial  $z$ , mostradas en (2), que permiten determinar las expresiones de los siete coeficientes estructurales  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $G$ , siguiendo el análisis ilustrado con las Ecs. (1) a (11).

De esta forma, las constantes de las expresiones analíticas en (11) que definen la región posible para la región accesible del manipulador genérico de tres pares de revolución, pueden ser restringidas a cuatro específicos puntos asignados  $P^*$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ , de los cuales  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  pueden ser asignados y el cuarto punto  $P^*$  se obtiene con la intersección de las curvas que constituyen las fronteras de la región posible  $F_W$  para la región accesible de un manipulador genérico de tres pares de revolución. El cuarto punto  $P^*$  puede utilizarse como variable para identificar áreas de la región posible que cumplan con las restricciones básicas para los coeficientes estructurales según las siguientes definiciones:

- El coeficiente estructural  $A$  debe ser positivo y por ello la subregión posible  $R_A$  para la región accesible puede ser definida como

$$R_A = \{(r_{p^*}, z_{p^*}) : A > 0\} \quad (12)$$

- El coeficiente estructural  $B$  debe tener un valor real y por ello la subregión posible  $R_B$  para la región accesible puede ser definida como

$$R_B = \{(r_{p^*}, z_{p^*}) : B^2 \geq 0\} \quad (13)$$

- El coeficiente estructural  $C$  no puede ser cero y por ello la subregión posible  $R_C$  para la región accesible puede ser definida

$$R_C = \{(r_{p^*}, z_{p^*}) : C \neq 0\} \quad (14)$$

- El coeficiente estructural  $D$  debe ser negativo y por ello la subregión posible  $R_D$  para la región accesible puede ser definida como

$$R_D = \{(r_{p^*}, z_{p^*}) : D \leq 0\} \quad (15)$$

- El coeficiente estructural  $E$  no puede ser cero y por ello la subregión posible  $R_E$  para la región accesible puede ser definida

$$R_E = \{(r_{p^*}, z_{p^*}) : E \neq 0\} \quad (16)$$

- El coeficiente estructural  $F$  debe ser positivo y por ello la subregión posible  $R_F$  para la región accesible puede ser definida como

$$R_F = \{(r_{p^*}, z_{p^*}) : F \geq 0\} \quad (17)$$

- El coeficiente estructural  $G$  debe ser negativo y por ello la subregión posible  $R_G$  para la región accesible puede ser definida como

$$R_G = \{(r_{p^*}, z_{p^*}) : G \leq 0\} \quad (18)$$

En particular, la anteriormente definida subregión posible  $R_A$  de un manipulador genérico de tres pares de revolución se compone de todos los puntos en donde los valores  $A > 0$  debido a que la expresión del coeficiente estructural  $A$  de la Ec. (3), presenta todos sus coeficientes elevados al cuadrado, lo cual obliga a tener valores de  $A$  siempre positivos. La geometría típica de  $R_A$  se muestra en Fig. 2.

Igualmente, la subregión posible  $R_B$  se compone de todos los puntos en donde los valores de  $B^2 \geq 0$  debido a que la expresión del coeficiente estructural  $B^2$  de las Ecs. (11), siempre arrojará valores de  $B$  reales, por estar éste elevado al cuadrado. La geometría típica de  $R_B$  se muestra en la Fig. 3.

Análogamente, la subregión posible  $R_C$  se compone de todos los puntos en donde se haya  $C \neq 0$  debido a que en la expresión del alcance axial  $z$  de la Ec. (2) el coeficiente estructural  $C$  está ubicado en el denominador. La geometría típica de  $R_C$  se muestra en la Fig. 4.

La subregión posible  $R_D$  se compone de todos los puntos en donde se haya  $D \leq 0$ , debido a la expresión en la Ec. (3). La geometría típica de  $R_D$  se muestra en la Fig. 5.

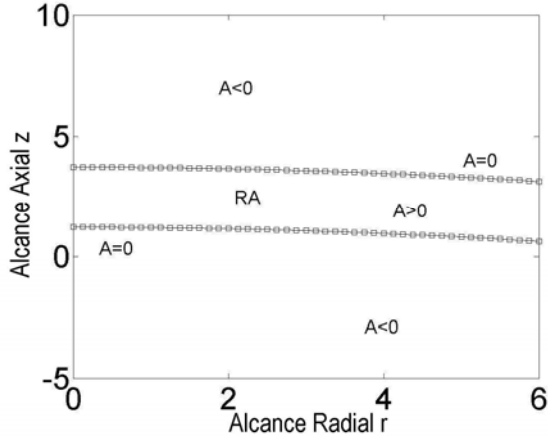


Fig. 2. Geometría típica de la subregión posible  $R_A$  definida por la Ec. (12).

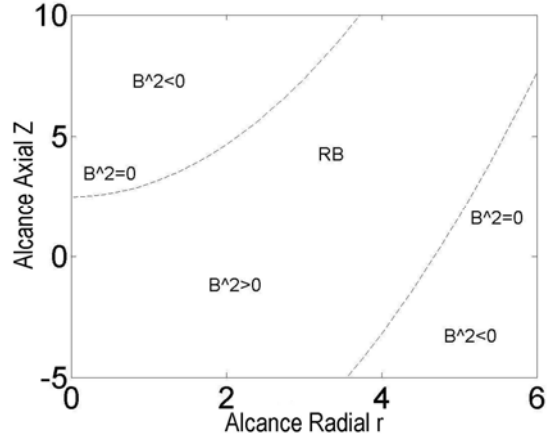


Fig. 3. Geometría típica de la subregión posible  $R_B$  definida por la Ec. (13).

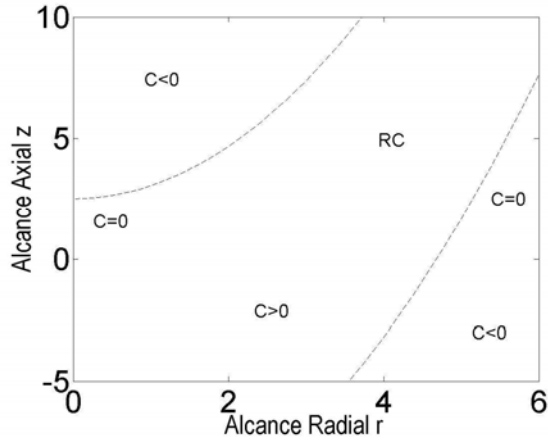


Fig. 4. Geometría típica de la subregión posible  $R_C$  definida por la Ec. (14).

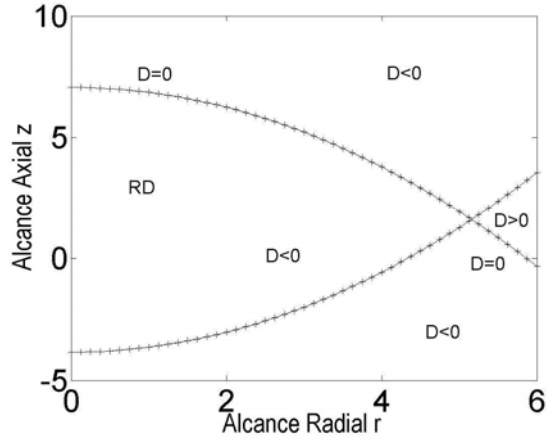


Fig. 5. Geometría típica de la subregión posible  $R_D$  definida por la Ec. (15).

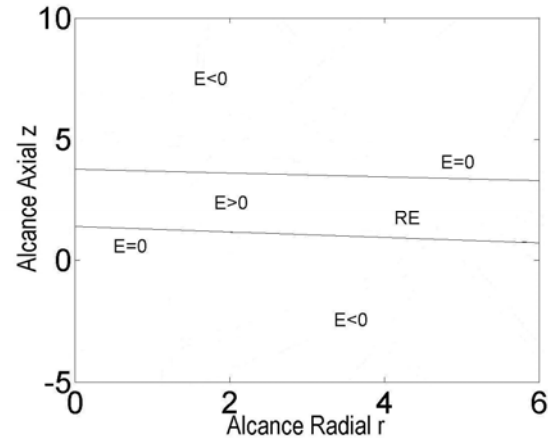


Fig. 6. Geometría típica de la subregión posible  $R_E$  definida por la Ec. (16).

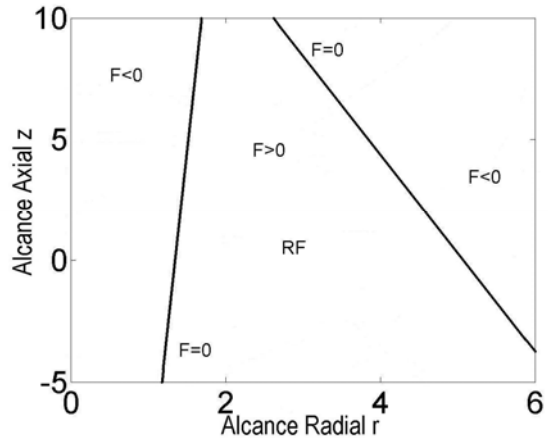


Fig. 7. Geometría típica de la subregión posible  $R_F$  definida por la Ec. (17).

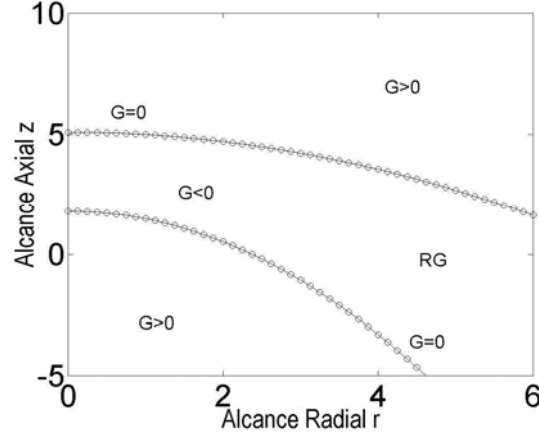


Fig. 8. Geometría típica de la subregión posible  $R_G$  dada por la Ec. (18).

La subregión posible  $R_E$  se compone de todos los puntos en donde se haya  $E \neq 0$  debido a que en la expresión del alcance radial  $r$  de la Ec. (1) el coeficiente estructural  $E$  está ubicado en el denominador. La geometría típica de  $R_E$  se muestra en la Fig. 6.

La subregión posible  $R_F$  se compone de todos los puntos en donde se haya  $F \geq 0$  debido a la expresión en la Ec. (3). La geometría típica de  $R_F$  se muestra en la Fig. 7.

Finalmente, la subregión posible  $R_G$  se compone de todos los puntos en donde se haya  $G \leq 0$  debido a la expresión en la Ec. (3). La geometría típica de  $R_G$  se muestra en la Fig. 8.

Las anteriormente mencionadas subregiones definidas por las Ecs. (12) a (18), pueden ser obtenidas analíticamente usando las Ecs. (11), con la finalidad de determinar las expresiones de las curvas que delimitan las subregiones posibles, a través de las condiciones límites  $A = 0$ ,  $B^2 = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 0$ ,  $E = 0$ ,  $F = 0$  y  $G = 0$ . De esta manera considerando simultáneamente los vínculos de las subregiones, la región posible  $F_W$  puede ser determinada a través de las subregiones posibles como

$$F_W = (R_G \cap R_B) - \{[(R_A - R'_A) \cup (R_E - R'_E) \cup (R_C - R'_C)] \cap [R_D - R'_D]\} \quad (19)$$

con

$$\begin{aligned} R'_A &= R_A - R_F \\ R'_E &= R_E - R_F \\ R'_C &= R_C - R_E \\ R'_D &= R_D - R_F. \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\cap$  es el operador de intersección y  $\cup$  es el operador unión.

Las subregiones posibles  $R_A$ ,  $R_C$ ,  $R_D$  y  $R_E$  al ser analizadas separadamente presentan un comportamiento concordante con sus anteriormente definidas restricciones. Sin embargo, al analizar el comportamiento de estas cuatro regiones en conjunto se ha podido observar que tomando en cuenta las subregiones posibles  $R_E$  y  $R_F$ , ellas cambian las respuestas a sus anteriormente definidas restricciones, por un efecto directo de la subregión  $R_F$  en las subregiones  $R_A$ ,  $R_E$  y  $R_D$ , y de la subregión  $R_E$  en la subregión  $R_C$ . Por esta razón, las regiones  $(R_A - R'_A)$ ,  $(R_E - R'_E)$ ,  $(R_C - R'_C)$  y  $(R_D - R'_D)$ , son definidas como regiones no posibles para el espacio de trabajo del manipulador. Es importante destacar que no toda la región  $(R_D - R'_D)$  no es posible, debido a que la subregión  $R_D$  cambia su comportamiento por efecto de  $R_F$ , pero no por efecto de  $R_G$  y  $R_B$ .

Entonces la región  $[R_D \cap R_G \cap R_B] - [(R_A - R'_A) \cup (R_E - R'_E) \cup (R_C - R'_C)]$  dentro de  $R_D - R'_D$ , es una región posible para el espacio de trabajo de un manipulador genérico con tres pares de revolución.

Analizando el anteriormente formulado procedimiento para determinar la región posible  $F_W$  de un manipulador genérico de tres pares de revolución, esta región es identificada como las áreas dentro de las



cuales el espacio de trabajo en forma de un toro puede ser obtenido dados cuatro puntos asignados de su frontera. De esta forma puede ser diseñado un manipulador tomando como referencia los puntos de su elemento terminal que pasan por dichos cuatro puntos conocidos.

#### 4. EJEMPLO NUMÉRICO

Se incluye un ejemplo numérico para mostrar la validez y fiabilidad del análisis propuesto. Las Figs. 2 a 8 muestran las subregiones posibles para el espacio de trabajo del manipulador genérico de tres pares de revolución de la Fig. 1 compuesta por siete diferentes subregiones  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_D$ ,  $R_E$ ,  $R_F$  y  $R_G$ . Ha sido definida, para el ejemplo numérico, una específica estructura del manipulador cuyos parámetros de Hartenberg y Denavit han sido asignados como:  $a_1 = 1,613u$ ;  $a_2 = 0,549u$ ;  $a_3 = 1,571u$ ;  $d_2 = 3,192u$ ;  $d_3 = 0,316u$ ;  $\alpha_1 = 0,9006u$  y  $\alpha_2 = 1,3361u$ , siendo  $u$  la unidad de longitud y los ángulos expresados en radianes.

Particularmente, en las Figs. 2 a 8 se muestran las curvas  $A = 0$ ,  $B^2 = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 0$ ,  $E = 0$ ,  $F = 0$ ,  $G = 0$ , que contienen las subregiones posibles correspondientes a los coeficientes estructurales que se han utilizados en las definiciones de las Ecs. (12) a (18).

En las Figs. 9 a 12, están señaladas por las zonas grises las subregiones posibles de la región accesible definidas por las Ecs. (20) utilizando las Ecs. (12) a (19).

Cabe destacar que la forma de las curvas  $A = 0$ ,  $B^2 = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 0$ ,  $E = 0$ ,  $F = 0$  y  $G = 0$  es parabólica debido a la expresión cuadrática de las Ecs. (11) en función de  $r_{Pi}$ .

Finalmente en la Fig. 13 se representa el resultado obtenido con la formulación propuesta. Esta figura ha sido determinada a través de las uniones y las intersecciones de las Figs. 2 a 12 según la Ec. (19). En la región posible  $F_w$  para la región accesible, ilustrada en la Fig. 13 con la zona de color gris, los puntos de las curvas límites  $A = 0$ ,  $C = 0$  y  $E = 0$ , no forman parte de la región posible, debido a que los valores de los puntos de las subregiones posibles  $R_A$ ,  $R_C$  y  $R_E$  están definidos como diferentes de cero en las Ecs. (12), (14) y (16), respectivamente.

#### 5. CONCLUSIÓN

En este artículo se ha ilustrado un procedimiento analítico para determinar la región posible para el espacio de trabajo de un manipulador genérico con tres pares de revolución.

Una formulación basada en la ecuación general del toro ha sido usada para derivar las expresiones de los coeficientes estructurales del manipulador. Se han restringido analíticamente las expresiones de los coeficientes estructurales, para definir las subregiones que componen la región posible para el espacio de trabajo de un manipulador. Las subregiones posibles han sido obtenidas definiendo cuatro puntos conocidos de la frontera de la región accesible del manipulador. La finalidad del procedimiento propuesto es obtener una región posible que contenga puntos deseables para una región accesible de un manipulador con tres pares de revolución. Con este procedimiento es posible identificar los manipuladores, utilizando una región posible deseable dentro del espacio de trabajo. Un proceso específico de diseño podría ser el argumento a seguir para futuros desarrollos de la formulación propuesta.

#### 6. REFERENCIAS

- [1] Ceccarelli M., "Designing Two-Revolute Manipulators for Prescribed Feasible Workspace Regions", *ASME Journal of Mechanical Design*, **124**, 427-434 (2002)
- [2] Ceccarelli M., Lanni C., "Síntesis óptima de brazos manipuladores considerando las características de su región accesible", *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, **3**(1) 45-55 (1999)
- [3] Parenti-Castelli V., Di Gregorio R., Bubani F., "Workspace and Optimal Design of a Pure Translation Parallel Manipulator", *Meccanica*, **35**, 203-214 (2000)

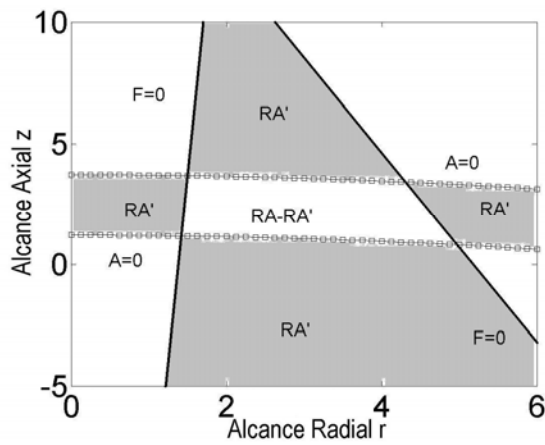


Fig. 9 Geometría típica de la región  $R_A'$  dada por las Ecs. (20).

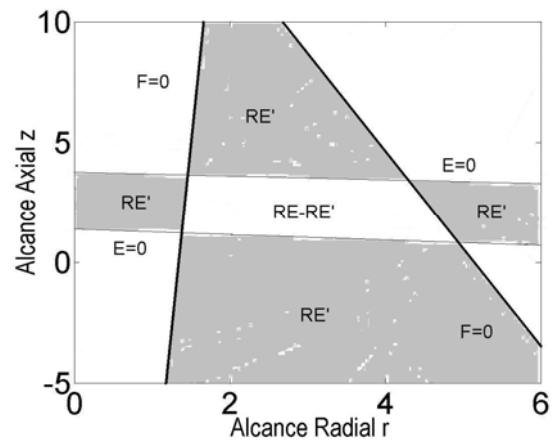


Fig. 10 Geometría típica de la región  $R_E'$  dada por las Ecs. (20).

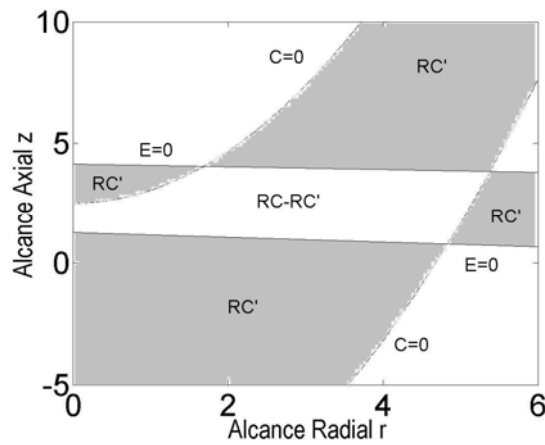


Fig. 11 Geometría típica de la región  $R_C'$  dada por las Ecs. (20).

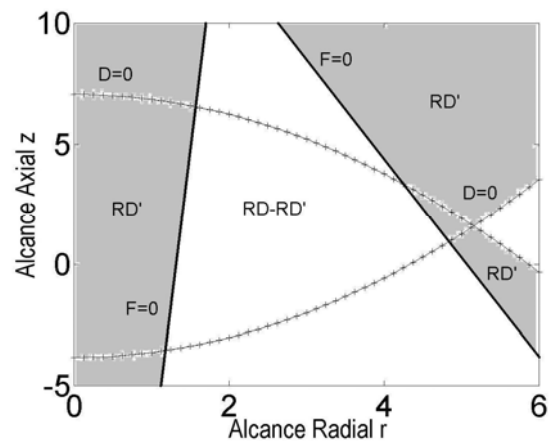


Fig. 12 Geometría típica de la región  $R_D'$  dada por las Ecs. (20).

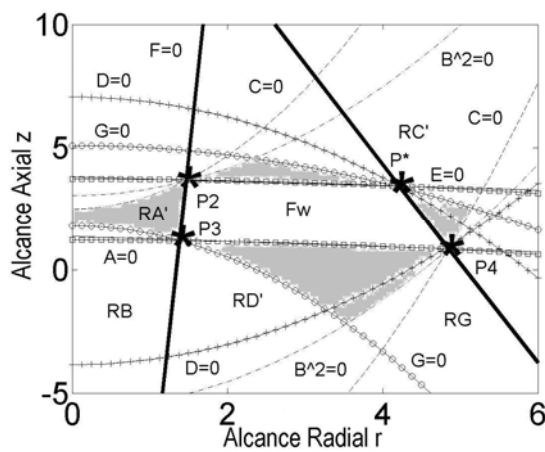


Fig. 13. Geometría típica de la región posible  $F_W$  para la región accesible del manipulador genérico de la Fig. 1, señalada por la zona gris. (línea de cuadros  $A = 0$ ; línea de raya y punto  $B^2 = 0$ ; línea segmentada  $C = 0$ ; línea de +  $D = 0$ ; línea continua

- [4] Hay A. M., Snyman J. A., "The Optimal Synthesis of Parallel Manipulators for Desired Workspaces", *Advances in Robot Kinematics: Theory and Applications*, J. Lenarcic and F. Thomas (Eds), Kluwer, Dordrecht, 337-346 (2002)
- [5] Ceccarelli M., Scaramuzza G., "Analytical Constraints for a Workspace Design of 2R Manipulators", *Computational Kinematics '95*, Merlet J.P and Ravani B. (Eds), Kluwer, Dordrecht, 173-182 (1995)
- [6] Mavroidis C., Alam M., Lee E., "Analytic Geometric Design of Spatial R-R Robot Manipulator", *Proceedings of 26<sup>th</sup> Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Atlanta, paper n. DETC2000/MECH-14068 (2000)
- [7] Ceccarelli M., "A Synthesis Algorithm for Three-Revolute Manipulators by Using an Algebraic Formulation of Workspace Boundary", *ASME Journal of Mechanical Design*, **117**, 298-302 (1995)
- [8] Ottaviano E., Ceccarelli M., Lanni C., "A Characterization of Ring Void in Workspace of Three-Revolute Manipulators", *Proceedings of Xth IFToMM World Congress*, Oulu, **3**, 1039-1044 (1999)
- [9] Wenger Ph., Jouad E., "Comments on "A classification of 3R regional manipulator geometries and singularities", *IFTToMM Journal Mechanism and Machine Theory*, **32**(4) 529-532 (1997)
- [10] Ottaviano E., Husty M., Ceccarelli M., "A cartesian representation for the boundary workspace of 3R manipulators", *Advances in Robot Kinematic*, J. Lenarcic and C. Galletti (Eds), Kluwer, Dordrecht, 247-254 (2004)
- [11] Burdick J. W., "A classification for 3R regional manipulator singularities and geometries", *IFTToMM Journal Mechanism and Machine Theory*, **30**(1), 71-89 (1995)
- [12] Wenger Ph., Baili M., Chablat D., "Workspace classification of 3R orthogonal manipulators", *Advances in Robot Kinematic*, J. Lenarcic and C. Galletti (Eds), Kluwer, Dordrecht, 219-228 (2004)
- [13] Ceccarelli M., "A Formulation for the Workspace Boundary of General N-Revolute Manipulators", *IFTToMM Journal Mechanism and Machine Theory*, **31**, 637-646 (1996)
- [14] Gao F., Liu X., Chen X., "The Relationships Between the Shapes of the Workspaces and the Link lengths of 3-DOF Symmetrical Parallel Manipulators", *IFTToMM Journal Mechanism and Machine Theory*, **36**, 205-220 (2001)
- [15] Wenger Ph., Chablat D., "Workspace and Assembly Modes in Fully-Parallel Manipulators: a Descriptive Study", *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*, Jadran Lenarcic and Manfred L. Husty (Eds), Kluwer, Dordrecht, 117-126 (1998)
- [16] Ceccarelli M., Carbone G., Ottaviano E., "An Optimization Problem Approach for Designing Both Serial and Parallel Manipulators", *Proceedings of the International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics MUSME 2005*, Uberlandia, paper n. 03-MUSME05 (2005)
- [17] Diccionario de la Lengua Española, Real Academia Española, 21<sup>ma</sup> Edición, Madrid (1994)
- [18] Desa S., Roth B., "Mechanics: kinematics and dynamics", *Recent Advances in Robotics*, Beni G. and Hackwood S. (Eds.), J. Wiley & Sons, New York, 71-130 (1985)

## **FEASIBLE REGION FOR THE WORKSPACE OF A GENERAL MANIPULATOR WITH THREE REVOLUTE JOINTS**

**Abstract** – In this paper we have presented a procedure for determining the feasible region for the workspace of a manipulator with three revolute joints. A feasible region is a region within which is possible to obtain a workspace of a manipulator as a function of prescribed reach constraints. The feasible region has been defined through a formulation and geometrical interpretation by using feasible subregions that are identified through the expressions of manipulator structural coefficients. Those coefficients are defined in an algebraic formulation for the boundary surface of a ring workspace. An illustrative examples for a given manipulator is reported to show the geometry of the feasible region for its workspace.

**Keywords** – Robotics, Kinematics of robots, Manipulators, Workspace.

**APÉNDICE 1**

$$v_1 = -\frac{-2FE^2B^2K + 2GEDT + DEN + GCW - W^2}{W^2E}$$

$$v_2 = -\frac{-2B^2KTDE + DT^2 + EB^2KQ - GB^2KCW}{W^2}$$

$$v_3 = \frac{EK}{W}; \quad v_4 = -\frac{T}{W}; \quad v_5 = -\frac{F}{W}$$

$$v_6 = -\frac{-2FE^2B^2K + 2FEDT + FEN - B^2KCWE + FCW}{W^2E}$$

$$v_7 = -\frac{-2B^2KTDE^2 + EDT^2 + E^2B^2KQ - FW^2}{W^2E}$$

$$v_8 = -\frac{G}{W}; \quad v_9 = -\frac{K(-2EFG + EQ - 2EDT - GCW)}{W^2}$$

$$v_{10} = -\frac{EF^2G^2 + 2EFGDT + EDT^2 - FW^2 + FGCW}{W^2E}$$

$$v_{11} = \frac{EKB^2 - FG}{W}; \quad v_{12} = \frac{GB^2KE - FG}{WE}$$

$$v_{13} = \frac{2EB^2KT - 2FGT - T^2}{W^2}$$

$$v_{14} = -\frac{-2FGB^2KE^2 + EF^2G^2 + E^2B^2KQ - FW^2}{W^2E}$$

$$v_{15} = \frac{KB^2}{W}.$$

$$W = T * C; \quad K = -(F^2 / B) - T)^{1/2}; \quad N = F * G.$$

**APÉNDICE 2**

$$j^i = \frac{1}{v_5v_9}(v_6v_{12}v_3 + v_6v_{12}v_3v_2 - v_6v_{12}v_3v_{10} - v_6v_{12}v_3^2 + v_6v_{12}v_{10} - v_6v_{12}v_2 - v_6v_{12}v_{11} +$$

$$+ v_3 + v_3v_2 - v_3v_{10} - v_3^2 + v_{10} - v_2 - v_{11} - v_2v_{12}v_5v_9).$$

$$j_{11} = -v_8v_4; \quad j_{14} = v_4v_1; \quad j_{15} = \frac{1 - v_3 + v_4v_1v_9}{v_9}; \quad j_{16} = -v_4v_1; \quad j_{22} = -v_6v_{12}; \quad j_{23} = v_{12}v_5;$$

$$j_{26} = v_6v_{12}; \quad j_{31} = \frac{2v_1 + v_8v_3}{v_1v_{12}}; \quad j_{32} = -\frac{v_6(v_3v_5 + v_6v_{12} + 1)}{v_5}; \quad j_{33} = v_3v_5 + v_6v_{12} + 1$$

$$j_{34} = -\frac{v_3}{v_{12}}; \quad j_{35} = \frac{(-1 + v_3)(v_6v_{12} + 1)(v_3v_5 + v_6v_{12})}{v_{12}v_5v_9}$$

$$j_{36} = \frac{v_3 v_5 v_6 v_{12} v_2 + v_6^2 v_{12}^2 v_2 + v_3 v_5 v_2 + v_6 v_{12} v_2 - v_3 v_5}{v_{12} v_5 v_2}$$

$$j_{37} = \frac{1}{v_{12}}; \quad j_{41} = -\frac{v_8}{v_1}; \quad j_{45} = \frac{1-v_3}{v_9}; \quad j_{46} = -\frac{-1+v_4}{v_4}; \quad j_{51} = -\frac{v_8 v_4 v_9}{v_1}$$

$$j_{52} = \frac{-v_6 v_{12} v_5 - v_6 v_{12} v_4 v_9 v_{15} + v_6 v_{12} v_5 v_4 v_9 v_{15} - v_5 - v_4 v_9 v_{15} - v_{15} v_5 v_9}{v_5 v_{15}}$$

$$j_{53} = \frac{v_{12} v_5 + v_{12} v_4 v_9 v_{15} - v_{12} v_5 v_4 v_9 v_{15}}{v_{15}}; \quad j_{54} = v_4 v_9$$

$$j_{55} = -\frac{1}{v_{15} v_5 v_9} (v_6 v_{12} v_5 + v_6 v_{12} v_4 v_9 v_{15} - v_6 v_{12} v_5 v_4 v_9 v_{15} + v_5 + v_4 v_9 v_{15} - v_5 v_4 v_9 v_{15} +$$

$$-v_5 v_6 v_{12} v_3 - v_4 v_9 v_{15} v_6 v_{12} v_3 + v_5 v_4 v_9 v_{15} v_6 v_{12} v_3 - v_3 v_5 - v_4 v_9 v_{15} v_3 + v_5 v_4 v_9 v_{15} v_3 +$$

$$-v_3 v_{15} v_5 v_9)$$

$$j_{56} = -\frac{-v_6 v_{12} v_5 - v_6 v_{12} v_4 v_9 v_{15} + v_6 v_{12} v_5 v_4 v_9 v_{15} - v_4 v_9 v_{15} + v_5 v_4 v_9 v_{15} - v_{15} v_5 v_9}{v_5 v_{15}}$$

$$j_{58} = \frac{1}{v_{15}}; \quad j_{61} = \frac{1+v_8 v_4}{v_1}; \quad j_{64} = -v_4; \quad j_{65} = \frac{v_4(-1+v_3)}{v_9}; \quad j_{66} = v_4; \quad j_{72} = \frac{v_6 v_{12} + 1}{v_5}; \quad j_{73} = -v_{12}$$

$$j_{75} = -\frac{(-1+v_3)(v_6 v_{12} + 1)}{v_9 v_5}; \quad j_{76} = -\frac{v_6 v_{12} + 1}{v_5}; \quad j_{81} = \frac{v_8 v_4 v_9 v_{15}}{v_1};$$

$$j_{82} = -\frac{v_9 v_{15}(-v_4 v_6 v_{12} + v_4 v_6 v_{12} v_5 - v_4 - v_5)}{v_5}; \quad j_{83} = v_{12} v_5 v_4 v_9 v_{15} - v_{12} v_4 v_9 v_{15}; \quad j_{84} = -v_4 v_9 v_{15}$$

$$j_{85} = \frac{v_{15}}{v_5} (v_4 v_6 v_{12} - v_4 v_6 v_{12} v_5 + v_4 - v_5 v_4 - v_4 v_6 v_{12} v_3 + v_4 v_5 v_6 v_{12} v_3 - v_4 v_3 + v_4 v_3 v_5 +$$

$$-v_3 v_5)$$

$$j_{86} = \frac{v_9 v_{15}(-v_4 v_6 v_{12} + v_4 v_6 v_{12} v_5 - v_4 + v_5 v_4 - v_5)}{v_5}$$

$$u_{18} = -\frac{1}{v_9} (-v_4 v_1 v_3 - v_4 v_1 v_3 v_2 + v_4 v_1 v_3 v_{10} + v_4 v_1 v_3^2 - v_4 v_1 v_{10} + v_4 v_1 v_2 + v_4 v_1 v_{11} +$$

$$-v_3 v_9 + v_2 v_9 + v_8 v_4 v_9 v_2)$$

$$u_{28} = \frac{v_{12}(-v_6 v_3 - v_6 v_3 v_2 + v_6 v_3 v_{10} + v_6 v_3^2 - v_6 v_{10} + v_6 v_2 + v_6 v_{11} + v_2 v_5 v_9)}{v_9}$$

$$u_{48} = -\frac{1}{v_4 v_1 v_9} (-v_9 v_{11} v_1 + v_8 v_4 v_2 v_9 - v_4 v_1 v_3 - v_4 v_1 v_3 v_2 + v_4 v_1 v_3 v_{10} + v_4 v_1 v_3^2 +$$

$$-v_4 v_1 v_{10} + v_4 v_1 v_2 + v_4 v_1 v_{11})$$

$$u_{68} = \frac{1}{v_1 v_9} (v_2 v_9 + v_8 v_4 v_2 v_9 - v_4 v_1 v_3 - v_4 v_1 v_3 v_2 + v_4 v_1 v_3 v_{10} + v_4 v_1 v_3 v_{10} + v_4 v_1 v_3^2 +$$

$$-v_4 v_1 v_{10} + v_4 v_1 v_2 + v_4 v_1 v_{11})$$

$$\begin{aligned}
u_{38} &= \frac{1}{v_{12}v_5v_9v_1v_4} (-v_4v_1v_3^2v_5 + v_4v_1v_3^3v_5 + v_5v_9v_4v_1 + v_{12}v_5v_9v_1v_4 + v_4v_1v_6v_{12}v_{11} + \\
&- v_4v_1v_3^2v_5v_2 - v_4v_1v_6v_{12}v_{10} + v_4v_1v_6v_{12}v_2 + v_4v_1v_3^2v_5v_{10} - v_4v_1v_6^2v_{12}^2v_3 + v_4v_1v_6v_{12}v_3^2 + \\
&\quad + v_4v_1v_6^2v_{12}^2v_{11} + v_4v_1v_6^2v_{12}^2v_2 + v_4v_1v_3v_5v_2 + v_4v_1v_6^2v_{12}^2v_3^2 + v_4v_1v_3v_5v_{11} + \\
&\quad - v_4v_1v_6v_{12}v_3v_2 + v_4v_1v_6v_{12}v_3v_{10} - v_4v_1v_6v_{12}v_3 - v_4v_1v_3v_5v_{10} - v_4v_1v_3^2v_5v_6v_{12} + \\
&\quad + v_4v_1v_3^3v_5v_6v_{12} - v_4v_1v_6^2v_{12}^2v_3v_2 + v_4v_1v_6^2v_{12}^2v_3v_{10} - v_4v_1v_3^2v_5v_6v_{12}v_2 + \\
&\quad + v_4v_1v_3^2v_5v_6v_{12}v_{10} - v_4v_1v_3v_5v_6v_{12}v_{10} + v_4v_1v_3v_5v_6v_{12}v_2 + v_4v_1v_3v_5v_6v_{12}v_{11} + \\
&\quad + v_4v_1v_3v_5^2v_{12}v_9 + v_4v_1v_6v_{12}^2v_2v_5v_9 - v_4v_1v_6^2v_{12}^2v_{10} + v_5v_9v_{14}v_1v_4 - v_5v_9v_4v_1v_2 + \\
&\quad - v_5v_9v_{11}v_3v_1 + v_5v_9v_8v_3v_4) \\
u_{58} &= -\frac{1}{v_{15}v_5v_9v_1} (-v_1v_4v_9v_{15}v_3 - v_1v_5v_4v_9v_{15}v_{10} + v_1v_5v_4v_9v_{15}v_2 + v_1v_5v_6v_{12}v_{11} + \\
&\quad - v_1v_4v_9v_{15}v_3^2 + v_1v_5v_6v_{12}v_{10} - v_1v_5v_6v_{12}v_2 - v_1v_5v_6v_{12}v_{11} + v_1v_4v_9v_{15}v_3 + \\
&\quad + v_1v_4v_9v_{15}v_{10} - v_1v_4v_9v_{15}v_2 - v_1v_4v_9v_{15}v_{11} - v_1v_2v_{12}v_5^2v_9 - v_5v_9v_3^2v_1v_{15} + \\
&\quad - v_1v_3^2v_5v_6v_{12} + v_1v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3 + v_1v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3v_2 - v_1v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3v_{10} + \\
&\quad - v_1v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3^2 + v_1v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_{10} - v_1v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_2 - v_1v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_{11} + \\
&\quad + v_1v_4v_9v_{15}v_3v_2 - v_1v_4v_9v_{15}v_3v_{10} - v_1v_4v_9^2v_{15}v_2v_{12}v_5 - v_1v_5v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3 + \\
&\quad - v_1v_5v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3v_2 + v_1v_5v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3v_{10} + v_1v_5v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_3^2 + \\
&\quad - v_1v_5v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_{10} + v_1v_5v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_2 + v_1v_5v_4v_9v_{15}v_6v_{12}v_{11} + \\
&\quad - v_1v_5v_4v_9v_{15}v_3v_2 + v_1v_5v_4v_9v_{15}v_3v_{10} + v_1v_5v_4v_9v_{15}v_3^2 - v_1v_3v_5v_{10} + v_1v_3v_5v_2 + \\
&\quad + v_5v_9v_{11}v_1 + v_1v_5^2v_4v_9^2v_{15}v_2v_{12} - v_1v_3v_5v_6v_{12}v_{10} + v_1v_3v_5v_6v_{12}v_2 + v_5v_9^2v_8v_4v_3v_{15} + \\
&\quad - v_5v_9^2v_1v_{11}v_{15} - v_5v_9v_1v_3v_{10}v_{15} + v_5v_9v_3v_{15}v_{12}v_1 - v_1v_5v_{11} - v_1v_3^2v_5 - v_1v_5v_2 + \\
&\quad + v_1v_3v_5 + v_1v_5v_{10} + v_1v_5v_6v_{12}v_3) \\
u_{88} &= \frac{v_{15}}{v_5v_1} (v_4v_1v_3v_2 - v_4v_1v_3v_{10} + v_4v_1v_3 - v_5v_9v_{11}v_1 + v_4v_1v_3^2v_5 - v_4v_1v_3v_5 + \\
&\quad - v_4v_1v_5v_{10} + v_4v_1v_5v_2 + v_4v_1v_5v_{11} + v_5v_3v_{12}v_1 - v_5v_1v_{13}v_{10} - v_4v_1v_2v_{12}v_5v_9 + \\
&\quad + v_4v_1v_6v_{12}v_3v_2 - v_4v_1v_6v_{12}v_3v_{10} + v_4v_1v_6v_{12}v_{10} + v_4v_1v_3^2v_5v_6v_{12} - v_4v_1v_5v_6v_{12}v_3 + \\
&\quad - v_4v_1v_5v_6v_{12}v_{10} + v_4v_1v_5v_6v_{12}v_2 + v_4v_1v_5v_6v_{12}v_{11} + v_4v_1v_2v_{12}v_5^2v_9 + v_4v_1v_3v_5v_6v_{12}v_{10} + \\
&\quad + v_4v_1v_3v_5v_{10} - v_4v_1v_3v_5v_6v_{12}v_2 - v_4v_1v_6v_{12}v_3^2 - v_4v_1v_3v_5v_2 - v_4v_1v_6v_{12}v_2 + v_4v_1v_6v_{12}v_3 + \\
&\quad - v_4v_1v_6v_{12}v_{11} + v_5v_8v_4v_9v_3 - v_1v_3^2v_5 - v_4v_1v_3^2 - v_4v_1v_{11} + v_4v_1v_{10} - v_4v_1v_2).
\end{aligned}$$