



INFLUENCIA DE LA PROFUNDIDAD DE REBAJE EN LA RIGIDEZ, REPARTO DE CARGA Y ERROR DE TRANSMISIÓN DE ENGRANAJES RECTOS CON DESGASTE¹

MIRYAM B. SÁNCHEZ, MIGUEL PLEGUEZUELOS, JOSÉ I. PEDRERO

UNED

Grupo de Investigación de Ingeniería Mecánica
Juan del Rosal 12, 28040 Madrid, España

(Recibido 25 de septiembre de 2023, para publicación 13 de octubre de 2023)

Resumen – En engranajes de transmisión de potencia, la geometría de las superficies en contacto tiene influencia en la rigidez de engrane y el error de transmisión, que a su vez es origen de sobrecarga dinámica, ruido y vibración. Las alteraciones en la geometría de los perfiles, como el rebaje de punta para evitar el impacto de inicio de engrane o el desgaste que inevitablemente se presenta en el contacto deslizante entre superficies friccionantes, tienen por tanto influencia en el comportamiento dinámico de la transmisión. En este trabajo se presenta un estudio de la influencia de la profundidad de rebaje en el error de transmisión de engranajes rectos con desgaste. Se analiza la evolución de la amplitud pico-pico, factor que determina la sobrecarga dinámica inducida, con el número de ciclos de desgaste. El análisis considera profundidades de rebaje mayores y menores que el valor ajustado para la eliminación del impacto de inicio de engrane, así como rebajes simétricos (a la entrada y a la salida del engrane) y asimétricos (sólo a la entrada), aplicado a engranajes estándar y de alto grado de recubrimiento. Se analiza específicamente el caso de rebaje simétrico con longitud de rebaje óptima para mínima amplitud de error de transmisión y se estudia la profundidad de rebaje óptima para amplitud mínima tras determinado número de ciclos de desgaste.

Palabras clave – Engranajes rectos, modificación de perfil, rigidez de engrane, reparto de carga, error de transmisión, desgaste.

1. INTRODUCCIÓN

Las transmisiones por engranajes son muy utilizadas en la actualidad para la transmisión de energía y movimiento en una amplia variedad de industrias modernas, incluidas la industria aeroespacial, la de la automoción y la de la energía eólica. Debido al deslizamiento relativo de los dientes de los engranajes, las superficies de engrane están expuestas al desgaste incluso en condiciones normales de funcionamiento, ya que los sistemas de accionamiento modernos trabajan con altas velocidades. Obviamente, una lubricación defectuosa o un período de funcionamiento demasiado largo conducen a mayores desgastes. Ello da como resultado inevitable una distorsión de los perfiles de los dientes, que afecta la rigidez de engrane, la distribución de la carga y el error de transmisión del par de engranajes, y que además aumenta los niveles de vibración y ruido. Hoy en día, los daños producidos por el desgaste se han convertido en la principal causa de fallo de los engranajes [1–5] y, como consecuencia de ello, el desgaste de las superficies de los dientes se ha convertido en un tema de investigación de gran interés en los últimos años, tanto en lo que se refiere al estudio de los mecanismos de desgaste y como al desarrollo de los métodos de cálculo.

La rigidez de engrane y el error de transmisión cuasi estático (*Quasi Static Transmission Error*, QSTE) son las excitaciones internas determinantes del sistema de engranajes y, por lo tanto, tienen un impacto sustancial en la forma en que trabaja la transmisión. Debido a esto, es importante investigar, por un lado, cómo cambia el perfil de los dientes por el desgaste acumulado, pues ello se traducirá en una nueva

¹ Texto íntegro de la ponencia presentada en el XXIV CNIM publicado con autorización.

condición de engrane, y por otro cómo afecta todo ello a las características dinámicas del sistema de engranes, y concretamente a la rigidez de engrane y al error de transmisión.

El primer estudio sobre desgaste de las superficies de los dientes de engranajes se publicó en la tesis doctoral de Andersson [6] en 1995, que se basó en la ecuación de desgaste de Archard [7]. Más recientemente, Wu y Chen [8] desarrollaron un enfoque simple de cálculo del desgaste para engranajes rectos, y encontraron que el mayor desgaste ocurre en la punta del diente del engranaje impulsado. En una serie de publicaciones sobre la predicción del desgaste de engranajes rectos y helicoidales, Flodin y Anderson [9, 10] utilizaron un modelo de desgaste de Archard modificado y un modelo de rigidez de los dientes de Simon [11]. Mediante una metodología híbrida de elementos finitos y analítica, Brauer y Anderson [12] estudiaron el desgaste de engranajes rectos producido por la interferencia de los flancos. Para estimar el desgaste de las superficies de los dientes en contacto, Bajpai *et al.* [13] establecieron una metodología para engranajes rectos y helicoidales, que combina la formulación de desgaste de Archard con un modelo de mecánica del contacto de engranajes basado en el método de los elementos finitos. Masjedi y Khonsari [14] desarrollaron un método para predecir el espesor de la película, el coeficiente de tracción y la tasa de desgaste, que tiene en cuenta las interacciones entre las asperezas superficiales de los dientes de los engranajes.

Otras investigaciones se han centrado en la influencia de la modificación del perfil del diente, que tiene notable influencia en la rigidez de engrane y el QSTE. En realidad, existe una estrecha correlación entre el QSTE y la rigidez de engrane, ya que el QSTE está relacionado con el retraso causado por la deformación elástica de los dientes, mientras que la rigidez de engrane modula estas deformaciones elásticas. Ma *et al.* [15–16] investigaron la variación de la rigidez de engrane de una pareja de engranajes con perfiles modificados, y desarrollaron un modelo mejorado que ilustra la conexión entre el coeficiente de reparto de carga (*Load Sharing Ratio*, LSR) y la rigidez de engrane. Li [17] analizó cómo las modificaciones del perfil de los dientes y los errores de desalineación afectan a la rigidez de engrane. Liu *et al.* [18] examinaron la influencia del tipo y longitud de la modificación del perfil en la rigidez de engrane y la carga dinámica, y analizaron la influencia del desgaste en la rigidez de engrane y el QSTE mediante el método de elementos finitos (*Finite Element Method*, FEM). Chen y Ji [19] desarrollaron un estudio similar utilizando técnicas analíticas. Los resultados de ambos estudios pusieron claramente de manifiesto que no se puede ignorar la influencia del desgaste en el comportamiento dinámico del par de engranajes.

Para analizar la variación del error de transmisión de engranajes helicoidales con perfil modificado, Lin y He [20] propusieron un modelo analítico complejo, que incluía tanto la modificación del perfil del diente como los errores de mecanizado y montaje. Para investigar los efectos de la desalineación y la modificación del perfil en la rigidez de engrane, Zhan *et al.* [21] combinaron plataformas CAD y de elementos finitos. Shweiki *et al.* [22] emplearon una técnica mejorada basada en el FEM para estudiar la variación del error de transmisión de engranajes con micromodificaciones. Yang *et al.* [23] desarrollaron un método integral para determinar el error de transmisión estático y la rigidez engrane de engranajes con rebaje. Ghosh *et al.* [24] y Chen *et al.* [25] estudiaron la optimización simultánea de la rigidez de engrane y el QSTE mediante la modificación del perfil del diente.

Ma *et al.* [26] demostró que el LSR y la rigidez de engrane influyen en la variación del error de transmisión. De acuerdo con la investigación de Zhang [27] sobre la respuesta dinámica del sistema de engranajes, las variaciones de la rigidez de engrane causadas por las modificaciones del perfil del diente tienen un impacto considerable en el error de transmisión. Huangfu *et al.* [28] investigaron los cambios en la rigidez de engrane y el QSTE en pares de engranajes con perfiles modificados y superficies desgastadas. Estas investigaciones sobre la rigidez de engrane y el QSTE para engranajes con perfiles modificados pone de manifiesto la relación entre la rigidez de engrane y el QSTE.

Más recientemente, Shen *et al.* [29] investigaron el mecanismo de fallo y el modelado dinámico de engranajes planetarios con desgaste superficial. Chen *et al.* [30] propusieron un modelo analítico para cuantificar los efectos del desgaste de la superficie del diente sobre la rigidez del engranaje, en el que se combinó un modelo de predicción de desgaste y un modelo variación temporal de rigidez de engrane. El modelo de desgaste se estableció de acuerdo con la ecuación de Archard, en la que se consideró la variación del coeficiente de desgaste y la distribución de carga. Chen *et al.* [31] establecieron un modelo analítico mejorado de rigidez de engrane, que tenía en cuenta los efectos de acoplamiento de la estructura y el contacto de borde. Los resultados obtenidos mostraron buena concordancia con los resultados de un análisis por el FEM. Zheng *et al.* [32] establecieron un modelo matemático para engranajes con modificación generados

por cortadores de cremallera modificados, e investigaron el comportamiento frente a desgaste de las superficies bajo diferentes modificaciones del cortador a través de un modelo mixto de elementos finitos y analítico. Feng *et al.* [33] propusieron una metodología de predicción y monitorización de la degradación de la superficie basada en el análisis de vibraciones, para predecir los dos mecanismos de desgaste más comunes en los engranajes: la variación del perfil del diente debido al desgaste abrasivo y la propagación de picaduras en la superficie. Zhao *et al.* [34] desarrollaron un estudio en el que se analizó exhaustivamente la relación entre el flujo de lubricante, el contacto rugoso y el desgaste del material, a partir del cual se propuso un modelo de simulación para el desgaste por deslizamiento de engranajes rectos de perfil de evolvente bajo lubricación mixta, considerando la micro morfología de la superficie del diente. Tian *et al.* [35] presentaron un modelo de desgaste para el conjunto de engranajes planetarios considerando la desalineación angular y la rotación del porta-planetas, y calcularon la distribución tridimensional del desgaste para diferentes ciclos de engrane. Shen *et al.* [36] propusieron un modelo geométrico de contacto para representar las nuevas condiciones de engrane provocadas por el desgaste de los engranajes y, posteriormente, establecieron el modelo dinámico para engranajes rectos externos con desgaste superficial a partir del modelo geométrico propuesto. Walker *et al.* [37] desarrollaron un modelo implícito que combina un modelo dinámico de engranajes helicoidales con un modelo tribológico que simula los tres elementos de fricción, lubricación y desgaste. Yan *et al.* [38] integraron el modelo de desgaste de Archard modificado y la teoría de contacto de Hertz, e investigaron los mecanismos de desgaste de la superficie del diente.

Muy recientemente, Feng *et al.* [39] han presentado una revisión sistemática del estado del arte sobre la monitorización del desgaste de engranajes basado en vibraciones, y observaron que la mayoría de los trabajos de investigación existentes se centran en el estudio del cambio del perfil del diente inducido por el desgaste abrasivo, que generalmente es del orden de milímetros (nivel macro desgaste). Por el contrario, la monitorización de las picaduras por fatiga (de nivel micro desgaste) y la identificación del mecanismo de desgaste han recibido menos atención, debido principalmente a las débiles características de vibración relacionadas con las picaduras por fatiga, las cuales son fácilmente enmascaradas por el ruido de fondo. Al revisar el progreso de la monitorización del desgaste de engranajes basado en el modelo de vibración, se observó que la ecuación de desgaste de Archard aún juega un papel importante en el modelado de los comportamientos de desgaste abrasivo. Finalmente, Chin *et al.* [40] acaban de publicar los resultados de un trabajo experimental, en el que concluyen que las desviaciones geométricas producidas por el desgaste en los perfiles de los dientes se manifiestan como un característico error de transmisión geométrico, y analizan los resultados en casos de desgaste seco y lubricado, ofreciendo nuevos conocimientos sobre el efecto de diferentes mecanismos de desgaste en las mediciones del error de transmisión. Los resultados muestran que error de transmisión es sensible a la evolución del desgaste de los dientes, lo que puede utilizarse para estudiar tendencias de manera efectiva.

En trabajos anteriores, los autores [41-42] desarrollaron un modelo de distribución de carga aproximado para engranajes rectos y helicoidales basado en el principio de mínima energía potencial elástica. Posteriormente, se mejoró el modelo aproximado de rigidez de engrane teniendo en cuenta la rigidez de contacto de Hertz [43]. Este modelo se amplió a engranajes rectos internos [44] y se aplicó al cálculo resistente a flexión y a presión superficial. Más adelante, el modelo se aplicó también a la optimización simultánea de la rigidez de engrane y el QSTE, mediante la modificación óptima del perfil del diente [45-47]. Finalmente, se extendió el modelo al caso de dientes con superficies desgastadas [48], considerando la profundidad de desgaste como un espacio entre dientes adicional, similar a la profundidad de rebaje, pero a lo largo del intervalo de contacto completo, que se calcula aplicando la ecuación de Archard a los ciclos de engrane anteriores. Esto da como resultado una nueva distribución de carga, diferente a la de los ciclos anteriores, lo que produce un desgaste adicional también diferente al de los ciclos anteriores, de tal forma que la distribución de carga para los próximos ciclos será también diferente a la actual y a las anteriores.

En este trabajo se llevará a cabo un estudio de la influencia de la profundidad de rebaje en el desgaste de las superficies de los dientes, y de cómo afecta a la evolución de la rigidez y el error de transmisión. Más concretamente, los objetivos específicos de la presente investigación se pueden enunciar de la siguiente manera:

1. Realizar un análisis de la evolución del desgaste de las superficies de los dientes con el número de ciclos de carga, y la consiguiente evolución de la rigidez, el reparto de carga y el error de

transmisión, considerando modificaciones de perfil asimétricas (al inicio del engrane) y simétricas (al inicio y al final del engrane), y diferentes profundidades de rebaje (ajustadas a la carga, superiores e inferiores).

2. Estudiar la profundidad de rebaje óptima para minimizar la amplitud pico-pico del error de transmisión (que minimiza la carga dinámica inducida y los niveles de ruido y vibración) y la influencia del número de ciclos de desgaste en este valor óptimo.

2. MODELO PARA LA SIMULACIÓN DE ENGRANAJES RECTOS CON REBAJE

En trabajos anteriores [41-43], los autores se han basado en la teoría de la energía potencial elástica mínima para obtener la rigidez de la pareja de dientes:

$$K_M = \left(\frac{1}{k_{x1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{n1}} + \frac{1}{k_{x2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{n2}} + \frac{1}{k_H} + \frac{1}{k_{B1}} + \frac{1}{k_{B2}} \right)^{-1}$$

donde k_x , k_s y k_n son, respectivamente, la rigidez a flexión, a cortadura y a compresión, que se pueden calcular a partir de las ecuaciones del potencial elástico [41,43]; k_H es la rigidez de contacto, que por lo general se evalúa a partir de las ecuaciones de Hertz [49] o de Weber-Banaschek [50]; y k_B es la rigidez de acoplamiento con el cuerpo del engranaje, que se puede calcular a partir de las ecuaciones de Weber-Banaschek [50] o Sainsot [51]. Los subíndices 1 y 2 representan el engranaje conductor y el engranaje conducido, respectivamente. La determinación de K_M mediante la ecuación anterior presenta notables complicaciones debido a la complejidad de las integrales del potencial elástico y de las expresiones del perfil del diente, especialmente en su base, que obligan al empleo de métodos de integración numérica, lo que conlleva un elevado coste computacional. Para la simulación, la siguiente expresión es suficientemente aproximada [41-43]:

$$\begin{aligned} K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi_{inn} - \xi_m)) & \text{para } \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi - \xi_m)) & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi_{out} - \xi_m)) & \text{para } \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{max} \end{aligned}$$

en la que b es el ancho de cara, K_{Mmax}^* la amplitud de la rigidez de la pareja de dientes por unidad de ancho de cara -que se ha de determinar mediante un análisis FEM o por integración numérica del potencial, como se describe en [41-43]-, y b_0 un parámetro que depende de la geometría del engranaje, cuya determinación se presenta en [41-43,52]. ξ es una variable característica del punto de contacto, que se define como:

$$\xi = \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1}$$

donde Z_1 es el número de dientes, r_{c1} el radio del punto de contacto y r_{b1} el radio de base, de la rueda conductora. Se puede comprobar que ξ es también, por lo tanto, una coordenada lineal en la línea de presión, indicativa del punto de la misma en que se produce el contacto. Los subíndices *min*, *inn*, *m*, *out* y *max* designan los puntos de contacto mínimo, inferior teórico, de rigidez máxima [41-43], superior teórico y máximo, respectivamente. El intervalo de contacto teórico viene, consecuentemente, dado por $\xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out}$, mientras que $\xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{max}$ representa el intervalo de contacto extendido, que incluye los intervalos de contacto adicionales, fuera de la línea de presión, ocasionados por las deformaciones de los dientes. La Fig. 1 representa la evolución de la rigidez de la pareja de dientes a lo largo del intervalo de engrane extendido.

2.1. Modelo de contacto teórico

El modelo teórico considera únicamente el contacto en el intervalo de engrane teórico, omitiendo los intervalos adicionales debidos a las deformaciones y el reparto de carga en dichos intervalos, por lo que

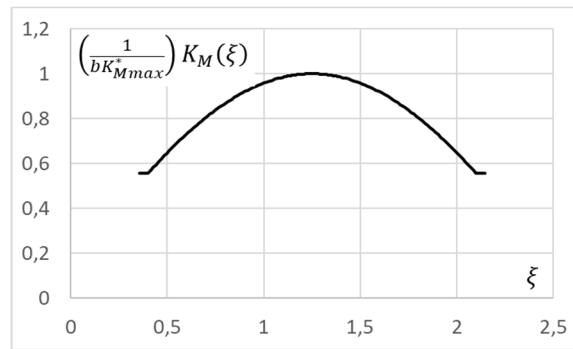


Fig. 1. Curva de rigidez de una pareja de dientes rectos.

sólo es válido para engranajes muy débilmente cargados, con deformaciones pequeñas. La ecuación de la rigidez sigue siendo válida, considerando $\xi_{\min} = \xi_{inn}$ y $\xi_{\max} = \xi_{out}$.

La rigidez de engrane en un momento dado, también llamada rigidez de engrane variable en el tiempo (*Time Varying Meshing Stiffness*, TVMS) será igual a la suma de las rigideces de todas las parejas de dientes en contacto simultáneo:

$$K_{T-th}(\xi) = \sum_j K_{M-thj}(\xi) = \sum_j K_{M-th}(\xi + j)$$

expresión en la que se ha tenido en cuenta que la diferencia entre los parámetros ξ correspondientes a los puntos de contacto de dos parejas consecutivas, es igual a 1. Del principio de mínimo potencial de deformación se deriva que la fuerza que transmite una de esas parejas es [41-43]:

$$F_{th}(\xi) = \frac{K_{M-th}(\xi)}{\sum_j K_{M-thj}(\xi)} F_T = \frac{K_{M-th}(\xi)}{\sum_j K_{M-th}(\xi + j)} F_T$$

donde F_T es la fuerza total transmitida. De acuerdo con ello, el coeficiente de reparto de carga teórico (*Load Sharing Ratio*, LSR) será:

$$R_{th}(\xi) = \frac{F_{th}(\xi)}{F_T} = \frac{K_{M-th}(\xi)}{\sum_j K_{M-th}(\xi + j)} = \frac{K_{M-thi}(\xi)}{K_{T-th}(\xi)}$$

Puesto que la rigidez es, por definición, la relación entre la fuerza y la deformación, la deformación teórica de la pareja de dientes viene dada por:

$$\delta_{th}(\xi) = \frac{F_T}{K_{T-th}(\xi)} = \frac{F_T}{\sum_j K_{M-th}(\xi + j)}$$

Como se aprecia en la Fig. 2, $\delta_{th}(\xi)$ representa el retraso, medido en la línea de presión, del diente impulsado respecto de su posición teórica, es decir, de su posición conjugada con la posición del diente impulsor, en la posición de contacto caracterizada por ξ . Se puede apreciar que esta deformación $\delta_{th}(\xi)$ no depende de j , y por tanto se puede afirmar que es igual para todos los dientes en contacto simultáneo. Por consiguiente, $\delta_{th}(\xi)$ representa también el retraso de la rueda conducida respecto de la conductora en la posición caracterizada por ξ , que es lo que se conoce como error de transmisión cuasi estático (*Quasi-Static Transmission Error*, QSTE).

Las ecuaciones anteriores constituyen el modelo de contacto teórico, que es válido únicamente para engranajes sin carga, o débilmente cargados. Para engranajes con carga es necesario tener en cuenta las deformaciones y la modificación del perfil.

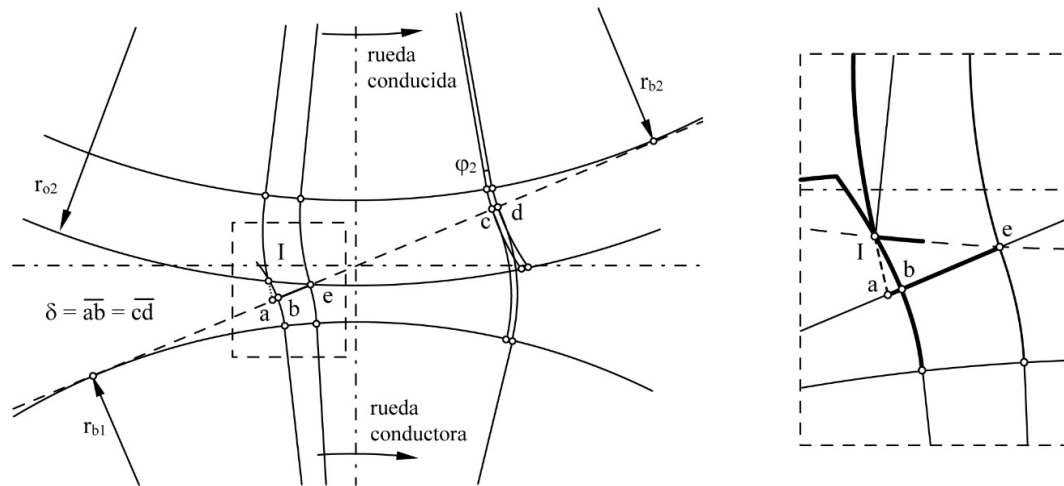


Fig. 2. Adelanto del inicio del contacto ocasionado por la deformación de los dientes.

2.2. Modelo de contacto extendido

La Fig. 2 muestra el adelanto del inicio del contacto ocasionado por la deformación de los dientes cuando transmiten potencia. Un retraso similar se produce en la finalización del contacto, en el otro extremo del intervalo de engrane. El punto e en la Fig.2 representa el punto inferior de contacto, correspondiente a ξ_{inn} y definido por la intersección de la circunferencia de cabeza de la rueda conducida con la línea de presión. En la figura se ha representado la posición en la que el diente conductor pasa por el punto b . Si el contacto fuese conjugado, la prolongación del perfil del diente conducido también debería pasar por b . Sin embargo, a causa de la deformación de la pareja de dientes anterior, representada por la distancia cd en la figura, el diente conducido se retrasa, y su prolongación no pasa por el punto b sino por el punto a -que dista de b lo mismo que c de d -, de manera que se encuentra con el diente contrario antes de alcanzar el punto e . El inicio efectivo del contacto se produce, por tanto, fuera de la línea de presión, lo que indica la presencia de un choque, conocido como impacto de inicio de engrane. El punto b define, por tanto, el inicio efectivo del contacto, y se corresponde con el parámetro ξ_{min} . El intervalo adicional de contacto al inicio del engrane viene representado en la figura por el segmento be , correspondiente a $\xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{inn}$.

Dentro de este intervalo de contacto extendido, al igual que en el que se origina en la finalización del engrane $\xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{max}$, la deformación del par de dientes se puede calcular como la distancia de retraso de la rueda conducida -es decir, el error de transmisión δ - menos la distancia que el diente conductor se debe aproximar al conducido para hacer contacto con él, que se designará por δ_G . Esta distancia de aproximación se puede calcular de forma aproximada, pero con elevada precisión con la ecuación [45,53]:

$$\begin{aligned} \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-inn} r_{b1} (\xi_{inn} - \xi)^2 & \text{para } \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ \delta_G(\xi) &= 0 & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-out} r_{b1} (\xi - \xi_{out})^2 & \text{para } \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{max} \end{aligned}$$

en la que los coeficientes C_{p-inn} y C_{p-out} se calculan mediante un proceso sencillo que se describe en [45,53]. Los límites del intervalo de contacto extendido, ξ_{min} y ξ_{max} , se pueden calcular igualando la distancia de aproximación en ellos al error de transmisión teórico en los correspondientes límites del intervalo de contacto teórico, es decir, $\delta_G(\xi_{min}) = \delta_{th}(\xi_{inn})$ y $\delta_G(\xi_{max}) = \delta_{th}(\xi_{out})$, de donde:

$$\xi_{\min} \approx \xi_{inn} - \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_{inn})}{C_{p-inn} r_{b1}}}$$

$$\xi_{\max} \approx \xi_{out} + \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_{out})}{C_{p-out} r_{b1}}}$$

Puesto que la distancia de aproximación δ_G es nula en el intervalo de contacto teórico, se puede afirmar que, en todo el intervalo de contacto extendido, la deformación de una pareja de dientes j es igual al error de transmisión menos la distancia de aproximación, $\delta_{ext}(\xi) - \delta_G(\xi)$, de manera que la fuerza que transmite será:

$$F_{extj}(\xi) = K_{M-extj}(\xi) (\delta_{ext}(\xi) - \delta_{Gj}(\xi)) = K_{M-ext}(\xi + j) (\delta_{ext}(\xi) - \delta_G(\xi + j))$$

La fuerza total transmitida será la resultante de las fuerzas que transmiten las distintas parejas:

$$F_T = \delta_{ext}(\xi) \sum_j K_{M-ext}(\xi + j) - \sum_j K_{M-ext}(\xi + j) \delta_G(\xi + j)$$

con lo que el error de transmisión vendrá dado por:

$$\delta_{ext}(\xi) = \frac{F_T + \sum_j K_{M-ext}(\xi + j) \delta_G(\xi + j)}{\sum_j K_{M-ext}(\xi + j)}$$

De las dos últimas ecuaciones, el reparto de carga se puede expresar como:

$$R_{ext}(\xi) = \frac{F_{ext}(\xi)}{F_T} = \frac{K_{M-ext}(\xi)}{F_T} \left(\frac{F_T + \sum_j K_{M-ext}(\xi + j) \delta_G(\xi + j)}{\sum_j K_{M-ext}(\xi + j)} - \delta_G(\xi) \right)$$

y la rigidez de engrane:

$$K_{T-ext}(\xi) = \frac{F_T}{\delta_{ext}(\xi)} = \frac{F_T \sum_j K_{M-ext}(\xi + j)}{F_T + \sum_j K_{M-ext}(\xi + j) \delta_G(\xi + j)}$$

Las tres últimas ecuaciones constituyen el modelo de contacto extendido, válido para engranajes cargados sin modificación de perfil.

2.3. Modelo de contacto con rebaje

El impacto de inicio de engrane descrito en el apartado anterior, y también, aunque en menor medida, el empuje de finalización de engrane, son en definitiva choques entre los dientes de la pareja, que es fuente de sobrecarga dinámica, ruido y vibración. La manera más habitual de hacer frente a tales indeseables efectos es el rebaje del perfil en la punta del diente. La Fig. 3 muestra claramente cómo un rebaje en la cabeza del diente conducido retrasa el inicio del contacto, tanto más cuanto mayor es la profundidad del rebaje.

La modificación del perfil δ_R se puede expresar en función del parámetro ξ a lo largo de la línea de engrane de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} && \text{for} && \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} \left(1 - \frac{\xi - \xi_{inn}}{\Delta \xi_{R-inn}} \right)^n && \text{for} && \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \Delta \xi_{R-inn} \\ \delta_R(\xi) &= 0 && \text{for} && \xi_{inn} + \Delta \xi_{R-inn} \leq \xi \leq \xi_{out} - \Delta \xi_{R-out} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} \left(1 - \frac{\xi_0 - \xi}{\Delta \xi_{R-out}} \right)^n && \text{for} && \xi_{out} - \Delta \xi_{R-out} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} && \text{for} && \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{\max} \end{aligned}$$



Fig. 3. Retraso en el inicio del contacto producido por el rebaje del diente conducido.

donde $\Delta\xi_R$ es la longitud de rebaje y Δ_R es la profundidad de rebaje. La Fig. 4 representa una pareja de dientes con ambas cabezas rebajadas.

Teniendo en cuenta la separación entre dientes debida al rebaje, la expresión de la fuerza que transmite la pareja de dientes j toma la forma:

$$F_{rj}(\xi) = K_{M-rj}(\xi) \left(\delta_r(\xi) - \left(\delta_{Gj}(\xi) + \delta_{Rj}(\xi) \right) \right) = K_{M-r}(\xi + j) \left(\delta_r(\xi) - \left(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j) \right) \right)$$

de manera que la fuerza total transmitida se expresa como:

$$F_T = \delta_r(\xi) \sum_j K_{M-r}(\xi + j) - \sum_j K_{M-r}(\xi + j) \left(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j) \right)$$

y consecuentemente el error de transmisión, el coeficiente de reparto de carga y la rigidez de engrane resultan ser:

$$\delta_r(\xi) = \frac{F_T + \sum_j K_{M-r}(\xi + j) \left(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j) \right)}{\sum_j K_{M-r}(\xi + j)}$$

$$R_r(\xi) = \frac{F_r(\xi)}{F_T} = \frac{K_{M-r}(\xi)}{F_T} \left(\delta_r(\xi) - \left(\delta_G(\xi) + \delta_R(\xi) \right) \right)$$

$$K_{T-r}(\xi) = \frac{F_T}{\delta_r(\xi)}$$

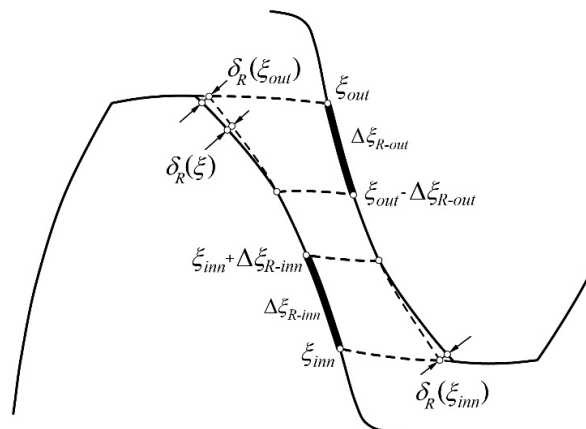


Fig. 4. Geometría del rebaje de perfil.

Estas tres ecuaciones constituyen el modelo de contacto con rebaje. Los nuevos límites del intervalo de contacto serán los puntos en que se anule la fuerza transmitida por la pareja de dientes, y por tanto vendrán dadas por las soluciones de la ecuación:

$$\delta_r(\xi_{\min/\max}) = \delta_G(\xi_{\min/\max}) + \delta_R(\xi_{\min/\max})$$

La resolución de esta ecuación requiere un proceso iterativo, pues $\delta_r(\xi)$ no se puede calcular sin conocer antes ξ_{\min} y ξ_{\max} . No es un proceso especialmente complejo, pero una aproximación suficientemente buena se puede obtener de igualar el error de transmisión en ambos extremos a sus valores para el modelo teórico, es decir:

$$\delta_{th}(\xi_{inn/out}) = \delta_G(\xi_{\min/\max}) + \delta_R(\xi_{\min/\max})$$

cuya resolución es directa.

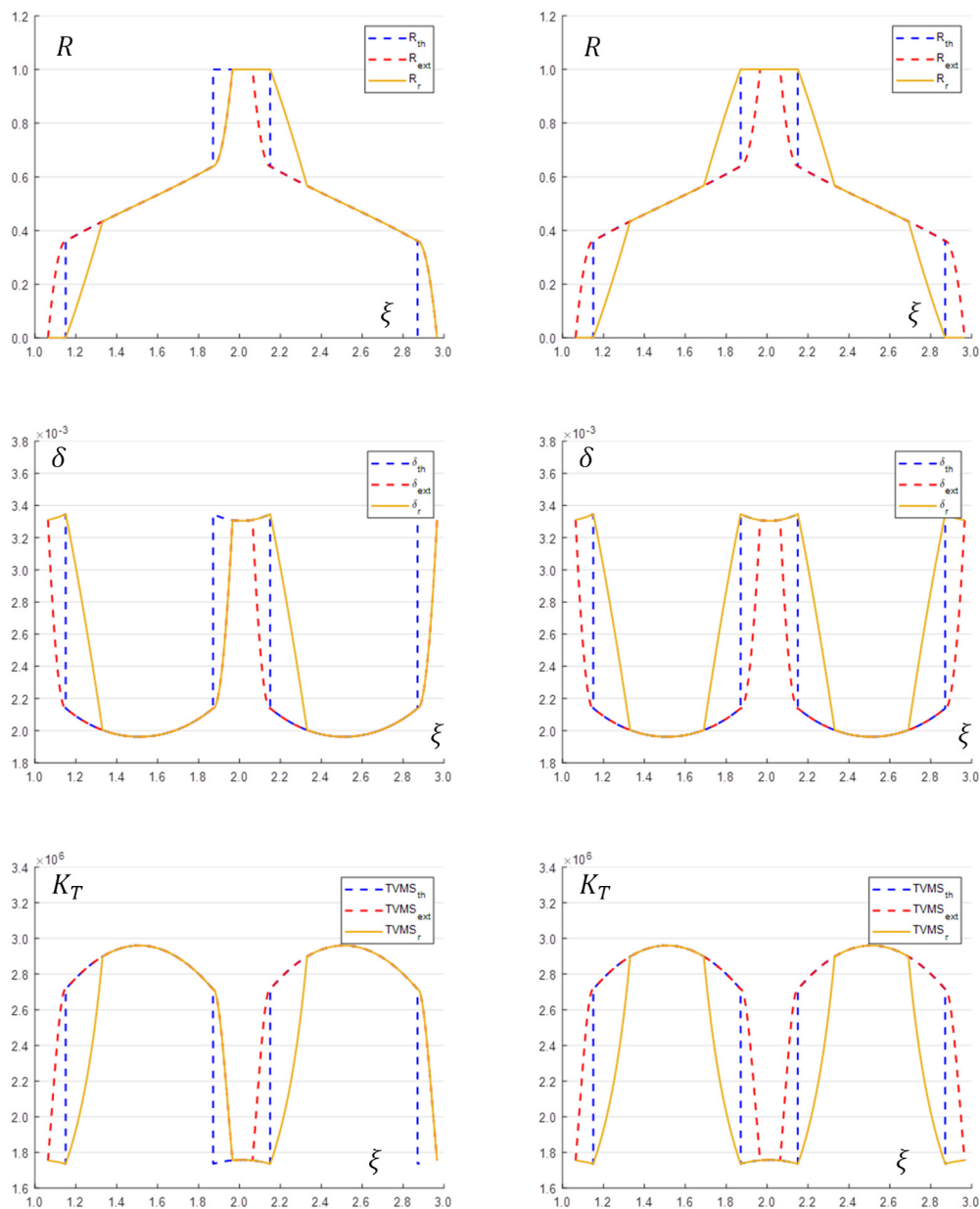


Fig. 5. LSR, QSTE y TVMS para engranaje SCR con rebaje de profundidad ajustada, asimétrico (izq.) y simétrico (dcha.).

Es bastante intuitivo afirmar que el impacto de inicio de engrane es mucho más peligroso que el empuje de finalización. Por esta razón, aunque la solución óptima es practicar el rebaje en la cabeza de ambas ruedas para evitar ambos efectos, no es inusual rebajar únicamente la cabeza de la rueda conducida, que evita el más dañino de los dos.

La Fig. 5 muestra la evolución del coeficiente de reparto de carga, el QSTE y la TVMS para un engranaje recto con grado de recubrimiento ϵ_α estándar (*Standard Contact Ratio, SCR*), es decir, $1 < \epsilon_\alpha < 2$, con rebaje a la entrada del contacto -llamado también rebaje asimétrico- en los diagramas de la izquierda, y con rebaje a la entrada y a la salida -rebaje simétrico-, en los de la derecha. La profundidad de rebaje es exactamente la necesaria para desplazar los puntos de inicio y finalización del contacto a sus posiciones teóricas

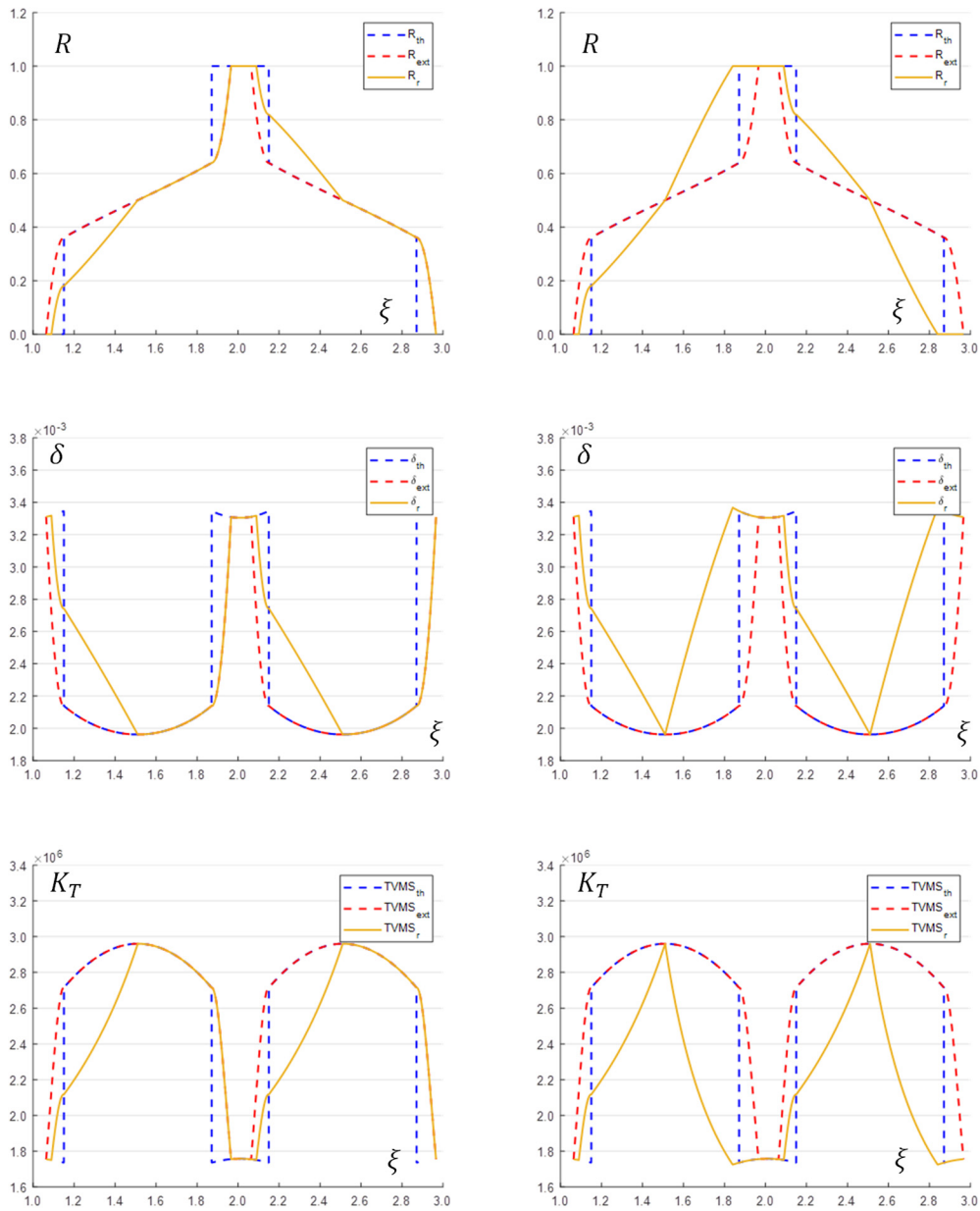


Fig. 6. LSR, QSTE y TVMS para engranaje SCR con rebaje asimétrico (izq.) y simétrico (dcha.), y profundidad inferior a la ajustada a la entrada del engrane y superior a la salida.

-para lo que ha de cumplirse $\delta_{th}(\xi_{inn/out}) = \delta_R(\xi_{inn/out})$, lo que se denominará profundidad de rebaje ajustada-, y la longitud de rebaje es $0.25d_\alpha$, siendo d_α la parte decimal del grado de recubrimiento, ($d_\alpha = \varepsilon_\alpha - 1$ para engranajes SCR). Las líneas de trazos corresponden al modelo teórico, en el que no se consideran deformaciones ni modificaciones del perfil; las líneas de puntos corresponden al modelo extendido, en el que se consideran las deformaciones; las líneas continuas corresponden al modelo con modificación de perfil, que considera tanto las deformaciones como la modificación de perfil.

La Fig. 6 muestra los mismos diagramas para el mismo engranaje SCR, pero profundidad de rebaje menor de la ajustada a la entrada del engrane, y mayor a la salida. Se observa una curva de carga del diente parabólica, parecida a la del modelo sin rebaje, que revela la presencia del impacto de inicio de engrane, y una reducción del grado de recubrimiento efectivo a la salida del engrane.

La Fig. 7 muestra los mismos diagramas para un engranaje de alto grado de recubrimiento (*High Contact Ratio*, HCR), es decir, $2 \leq \varepsilon_\alpha < 3$. Los datos de ambas transmisiones se recogen en la Tabla 1.

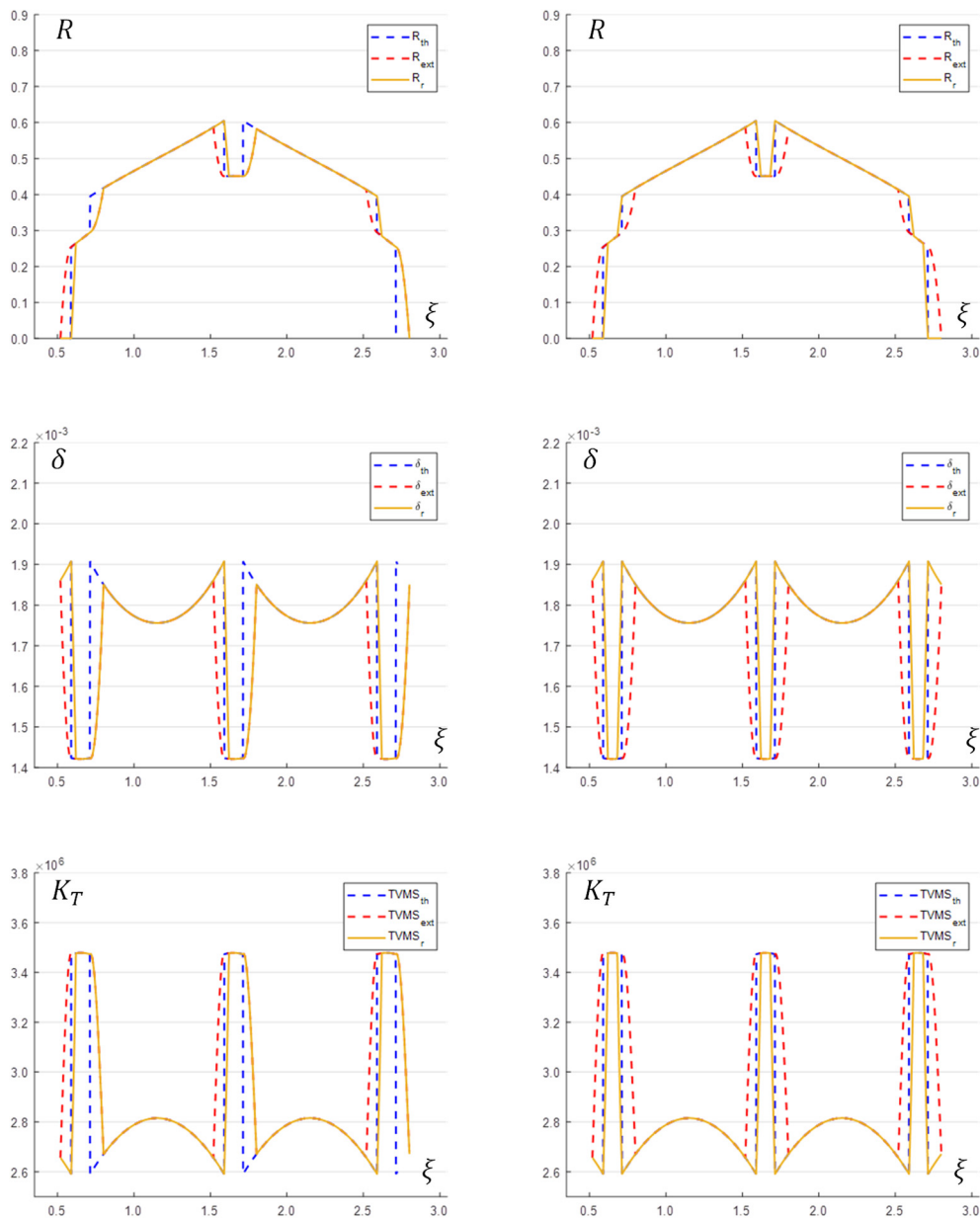


Fig. 7. LSR, QSTE y TVMS para engranaje HCR con rebaje de profundidad ajustada, asimétrico (izq.) y simétrico (dcha.).

Tabla 1. Datos de engranajes SCR y HCR estudiados.

	Engranaje SCR		Engranaje HCR	
	Piñón	Rueda	Piñón	Rueda
Módulo (mm)		1,00		1,00
Ángulo de presión (°)		20,00		15,00
Altura de cabeza (mm)		1,00		1,00
Altura de cabeza de la herramienta (mm)		1,25		1,25
Radio de acuerdo de la herramienta (mm)		0,25		0,25
Número de dientes	35	50	40	85
Desplazamiento (mm)	0,00	0,00	0,00	0,00
Radio de cabeza (mm)	18,50	26,00	21,00	43,50
Distancia entre centros de operación (mm)		42,50		62,50
Ancho de cara (mm)		50,00		50,00
Grado de recubrimiento teórico		1,721		2,124
Grado de recubrimiento extendido		1,902		2,282

3. PROFUNDIDAD DE DESGASTE

3.1. Modelo de desgaste de Archard

En este trabajo se utilizó la ecuación de desgaste de Archard para simular el proceso de desgaste de los dientes en un sistema de engranajes rectos. La ecuación es:

$$\frac{dV}{ds} = K \frac{F}{H}$$

donde dV representa el volumen diferencial de material desgastado debido al contacto de las superficies de los dientes, ds el deslizamiento relativo diferencial entre las superficies de los dientes en contacto, K el coeficiente de desgaste adimensional, F la carga normal y H la dureza del material de los engranajes. Si se denomina K_W al cociente entre K y H , el incremento de la profundidad de desgaste Δh_W de cada engranaje correspondiente a un ciclo de engrane se puede expresar como:

$$\Delta h_{W1/W2} = K_W \frac{F}{b} \left(\frac{ds}{dl_{1/2}} \right)$$

donde dl es la longitud diferencial del perfil de evolvente correspondiente a una pequeña rotación del engranaje impulsor. La distancia $\Delta \delta_W$ entre ambos perfiles debido al incremento de la profundidad de desgaste en un ciclo de engrane es la suma de ambas profundidades de desgaste, en piñón y rueda, que depende del punto de contacto ξ y que, teniendo en cuenta que por cada ciclo de engrane del diente conductor el diente conducido engrana Z_1/Z_2 ciclos, se puede expresar como:

$$\Delta \delta_W(\xi) = K_W \frac{F(\xi)}{b} \left(\left(\frac{ds(\xi)}{dl(\xi)} \right)_1 + \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{ds(\xi)}{dl(\xi)} \right)_2 \right)$$

La diferencial de longitud de evolvente se puede expresar en función del punto de contacto como:

$$dl(\xi) = \left(\frac{2\pi}{Z} \right)^2 |r_b \xi d\xi|$$

y el deslizamiento relativo diferencial:

$$ds(\xi) = |dl(\xi)_1 - dl(\xi)_2|$$

Particularizando esta ecuación para cada rueda, se tiene:

$$\left(\frac{ds(\xi)}{dl(\xi)}\right)_1 = \frac{(r_{b1} + r_{b2}) \left| \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \tan \alpha'_t \right|}{r_{b2} \frac{2\pi}{Z_1} \xi}$$

$$\left(\frac{ds(\xi)}{dl(\xi)}\right)_2 = \frac{(r_{b1} + r_{b2}) \left| \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \tan \alpha'_t \right|}{\left((r_{b1} + r_{b2}) \tan \alpha'_t - r_{b1} \frac{2\pi}{Z_1} \xi \right) \frac{1}{r_{b2}}}$$

y, sustituyendo en la ecuación de $\Delta\delta_w$:

$$\Delta\delta_w(\xi) = K_w \frac{F(\xi)}{b} \frac{Z_1}{Z_2} \left| \frac{2\pi}{Z_1} \xi - \tan \alpha'_t \right| \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{Z_1 + Z_2} \xi} + \frac{1}{\left(\tan \alpha'_t - \frac{2\pi}{Z_1 + Z_2} \xi \right)} \right)$$

que representa la distancia adicional que se han de aproximar los dientes desgastados para contactar en el punto ξ .

3.2. Modelo de contacto con desgaste

El desgaste es un proceso en el que el material se elimina gradualmente de las superficies de los dientes en contacto, lo que hace que cambie la forma del perfil de estos dientes. Por lo tanto, el desgaste puede tratarse como un espacio adicional entre las superficies que intentan contactar, que será diferente en cada punto de contacto y en cada ciclo de engrane. Introduciendo el espacio por desgaste $\delta_w(\xi)$ en las ecuaciones anteriores, la carga en el par de dientes j y la carga total vienen dadas por:

$$F_{wj}(\xi) = K_{M-wj}(\xi) \left(\delta_w(\xi) - \left(\delta_{Gj}(\xi) + \delta_{Rj}(\xi) + \delta_{Wj}(\xi) \right) \right)$$

$$= K_{M-w}(\xi + j) \left(\delta_w(\xi) - \left(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j) + \delta_W(\xi + j) \right) \right)$$

$$F_T = \delta_w(\xi) \sum_j K_{M-w}(\xi + j) - \sum_j K_{M-w}(\xi + j) \left(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j) + \delta_W(\xi + j) \right)$$

y, siguiendo el mismo procedimiento que en los casos anteriores, el QSTE, la LSR y la TVMS quedan de la forma:

$$\delta_w(\xi) = \frac{F_T + \sum_j K_{M-w}(\xi + j) \left(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j) + \delta_W(\xi + j) \right)}{\sum_j K_{M-w}(\xi + j)}$$

$$R_w(\xi) = \frac{F_w(\xi)}{F_T} = \frac{K_{M-w}(\xi)}{F_T} \left(\delta_w(\xi) - \left(\delta_G(\xi) + \delta_R(\xi) + \delta_W(\xi) \right) \right)$$

$$K_{T-w}(\xi) = \frac{F_T}{\delta_w(\xi)}$$

Estas ecuaciones, que constituyen al modelo de TVMS, LSR y QSTE con desgaste, se refieren a un número determinado de ciclos de desgaste. Obviamente, el desgaste que se produce en cada ciclo de engrane altera la forma de los dientes y, por lo tanto, afecta a la TVMS y el LSR para el próximo ciclo de engrane, lo que se traducirá en un desgaste diferente para el próximo ciclo, y así sucesivamente, lo que significa que será necesario recalcularlo en cada ciclo. El desgaste acumulado en el punto de engrane descrito por ξ después de n ciclos de engrane viene dado por:

$$\delta_{W(n+1)}(\xi) = \delta_{W(n)}(\xi) + \Delta\delta_{W(n+1)}(\xi)$$

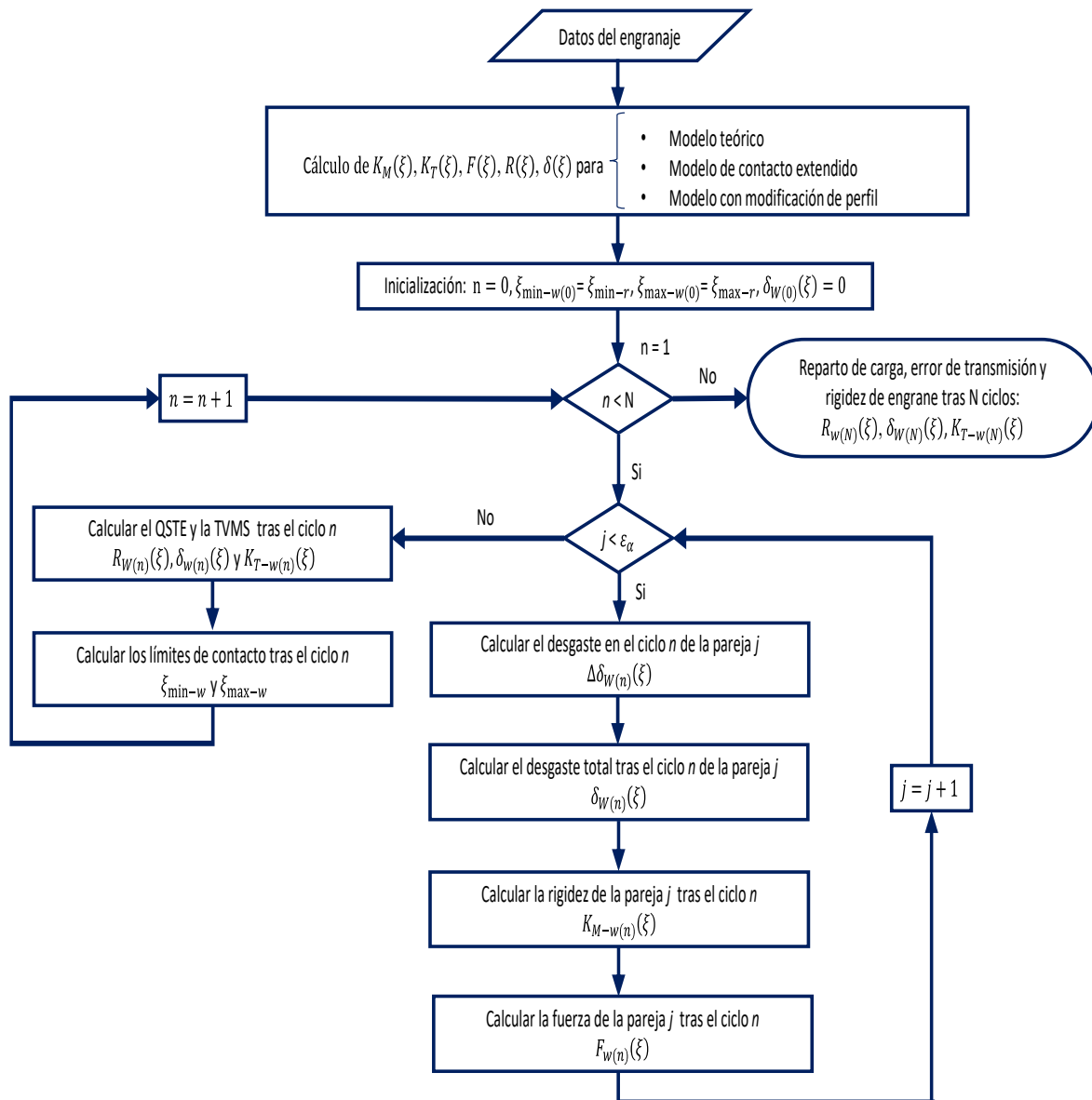


Fig. 8. Diagrama de flujo del modelo de QSTE, LSR y TVMS de engranajes rectos con desgaste.

Antes del primer ciclo de engrane, el desgaste es nulo, $\delta_{W(0)}(\xi) = 0$, y la carga $F_{(0)}(\xi)$ se puede calcular con la ecuación de $R_w(\xi)$, que como se aprecia coincide con la de $R_r(\xi)$ del apartado 2.3. La profundidad de desgaste debida al primer ciclo de engrane $\Delta\delta_{W(1)}(\xi)$ se calcula con la ecuación obtenida en el apartado 3.1, y a partir de aquí, con las ecuaciones obtenidas en este apartado, se calcularían progresivamente el desgaste acumulado $\delta_{W(1)}(\xi)$, la carga $F_{W(1)}(\xi)$ y la profundidad de desgaste debido al siguiente ciclo de engrane $\Delta\delta_{W(2)}(\xi)$, que permitirá calcular el desgaste acumulado después del segundo ciclo $\delta_{W(2)}(\xi)$, y así sucesivamente. Naturalmente, una vez calculadas la profundidad de desgaste acumulada $\delta_{W(n)}(\xi)$ y la carga $F_{W(n)}(\xi)$ después de n ciclos de engrane, el QSTE $\delta_{W(n)}(\xi)$, el LSR $R_{W(n)}(\xi)$ y la TVMS $K_{T-w(n)}(\xi)$ se puede calcular a partir de las ecuaciones que se acaban de obtener.

La rigidez de la pareja de dientes $K_{M-w}(\xi)$ apenas se va a ver influenciada por el desgaste de las superficies, ya que la profundidad de desgaste será siempre muy pequeña (del orden de pocas micras), incluso después de un elevado número de ciclos de engrane. En consecuencia, $K_{M-w}(\xi)$ también se puede calcular

con la ecuación aproximada del apartado 2, como $K_{M-th}(\xi)$, $K_{M-ext}(\xi)$ o $K_{M-r}(\xi)$. La única diferencia entre las cuatro expresiones de la rigidez son los límites del intervalo de contacto. En efecto, el desgaste en el punto de contacto único superior induce un adelanto del inicio del contacto, de la misma manera que lo hace la deformación del par de dientes. Estos nuevos límites del intervalo de contacto efectivo, ξ_{min-w} y ξ_{max-w} dependen de la profundidad de desgaste, y por lo tanto deben calcularse para cada ciclo de mallado haciendo igual a cero la expresión de $F_{w(n)}(\xi_{min/max-w(n)})$, es decir, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\delta_{w(n)}(\xi_{min/max-w(n)}) = \delta_G(\xi_{min/max-w(n)}) + \delta_R(\xi_{min/max-w(n)}) + \delta_{W(n)}(\xi_{min/max-w(n)})$$

En definitiva, el proceso de cálculo por cada ciclo de engrane sería el siguiente:

1. Calcular el error de transmisión del ciclo de engrane (n), $\delta_{w(n)}(\xi)$, a partir del desgaste acumulado tras el ciclo anterior $\delta_{w(n-1)}(\xi)$ y los límites del intervalo de engrane tras el ciclo anterior, $\xi_{min-w(n-1)}$ y $\xi_{max-w(n-1)}$ (teniendo en cuenta que, antes del primer ciclo, $\delta_{w(0)}(\xi)$, $\xi_{min-w(0)}$ y $\xi_{max-w(0)}$ se calculan con el modelo con rebaje sin desgaste).
2. Calcular la fuerza y la rigidez, $F_{w(n)}(\xi)$ y $K_{T-w(n)}(\xi)$.
3. Calcular el desgaste producido en el ciclo de engrane (n), $\Delta\delta_{w(n)}(\xi)$, y el desgaste acumulado tras el mismo, $\delta_{w(n)}(\xi)$.
4. Calcular los límites del intervalo de contacto para el nuevo ciclo, $\xi_{min-w(n)}$ y $\xi_{max-w(n)}$, y volver al paso 1.

La Fig. 8 muestra el diagrama de flujo del proceso de cálculo. Se ha de señalar que, en la práctica, no es necesario repetir el cálculo por cada ciclo de engrane. Los valores de la constante K_W , aunque varían de unos materiales a otros, toman siempre valores muy pequeños, del orden de 10^{-17} m²/N, lo que permite suponer que la geometría de los flancos no va a variar de forma apreciable durante cierto número de ciclos. En este trabajo, ese número de ciclos de geometría constante se ha supuesto que es de 200.000 ciclos de engrane del piñón.

La Fig. 9 muestra las curvas de LSR y QSTE del engranaje SCR anterior, cada 200.000 ciclos de engrane del piñón, hasta un millón, para rebaje asimétrico (izquierda) y simétrico (derecha). También se ha representado, en los diagramas inferiores, el desgaste cada 200.000 ciclos y el desgaste acumulado. Las curvas de trazos y puntos corresponden a los modelos teórico y extendido, respectivamente; la curva correspondiente a 0 ciclos de desgaste se obtuvo con el modelo con rebaje. Es de destacar que, en este caso, el punto de rodadura está situado muy cerca del punto medio del intervalo de contacto, por lo que el desgaste acumulado a la entrada y a la salida del engrane son bastante parecidos. Obviamente, el desgaste es nulo en el punto de rodadura pura y en los puntos de carga nula, es decir, los extremos del intervalo de contacto, como se aprecia en los diagramas inferiores de la figura.

El QSTE aumenta con el desgaste de las superficies, puesto que cuanto mayor es el desgaste, mayor es la separación entre las superficies antes de entrar en contacto, y por tanto mayor es el retraso de la rueda conducida. Sin embargo, si el punto de rodadura está contenido dentro del intervalo de contacto único, como en el caso de la Fig. 9, el QSTE en este punto no varía, ya que en él no ha desgaste. Por el contrario, el QSTE en los límites del intervalo de contacto aumentan con el número de ciclos de contacto debido al desgaste de los puntos que contactan simultáneamente con ellos (los límites del intervalo de contacto único).

Curiosamente, aunque el QSTE aumenta con el número de ciclos de engrane, la amplitud pico-pico del error de transmisión (PP-QSTE) decrece ligeramente. Ello es debido a que el QSTE mínimo aumenta más que el máximo, por lo que su diferencia decrece. Esto significa que también decrece, aunque sea ligeramente, la carga dinámica inducida media, que está relacionada con el PP-QSTE. Sin embargo, la carga dinámica instantánea depende de la pendiente de la curva de error de transmisión, que representa las variaciones instantáneas de la velocidad de salida, y, por tanto, las aceleraciones y deceleraciones del eje de salida (a velocidad de entrada uniforme). Como se aprecia en la Fig. 9, la pendiente de la curva de QSTE aumenta en el intervalo de contacto único y disminuye en el intervalo de contacto doble; y, puesto que la máxima pendiente se produce en puntos del intervalo de contacto doble, la carga dinámica inducida máxima también decrece con el número de ciclos de desgaste.

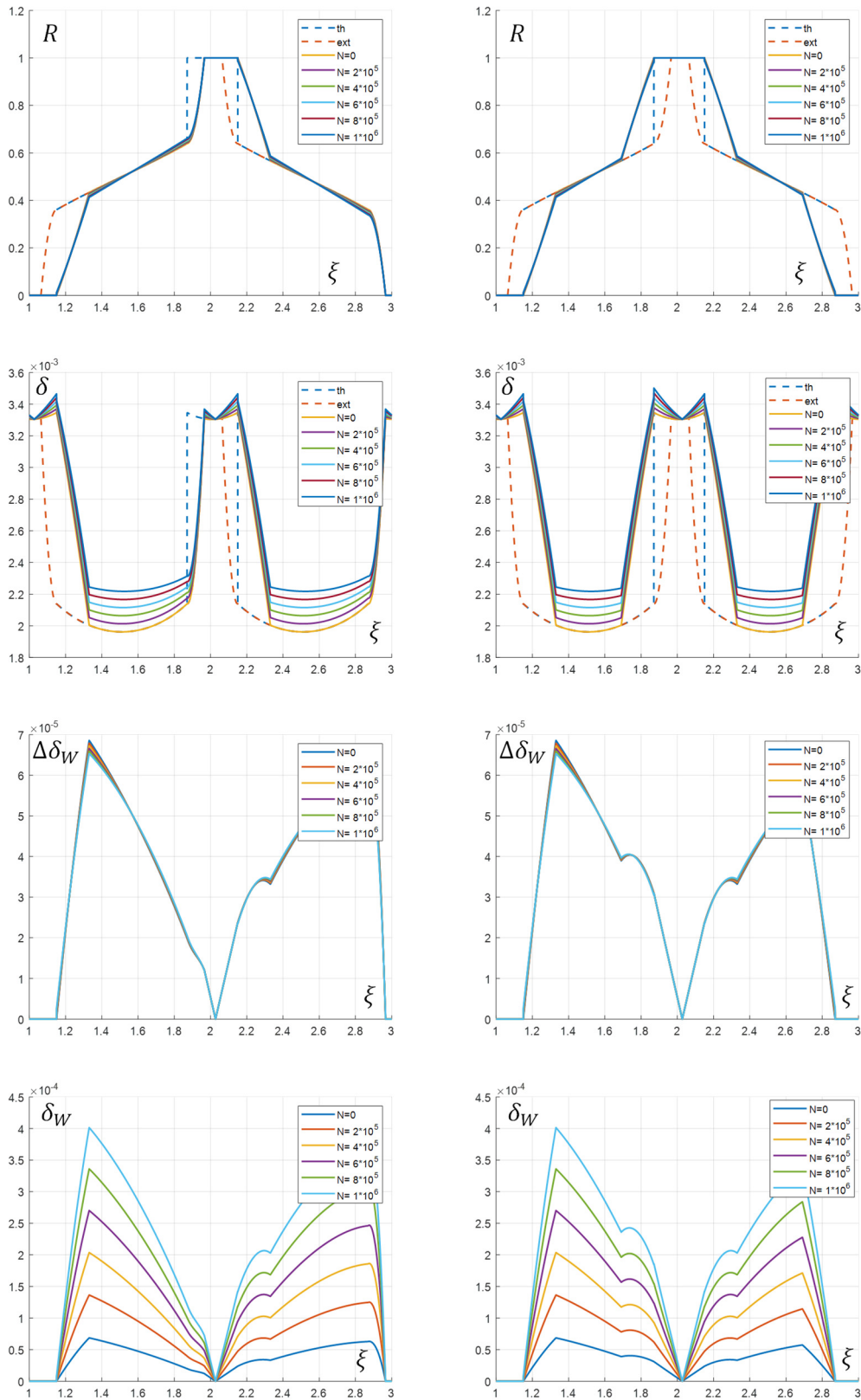


Fig. 9. LSR, QSTE, profundidad de desgaste y desgaste acumulado para engranaje SCR con rebaje de profundidad ajustada, asimétrico (izq.) y simétrico (dcha.).

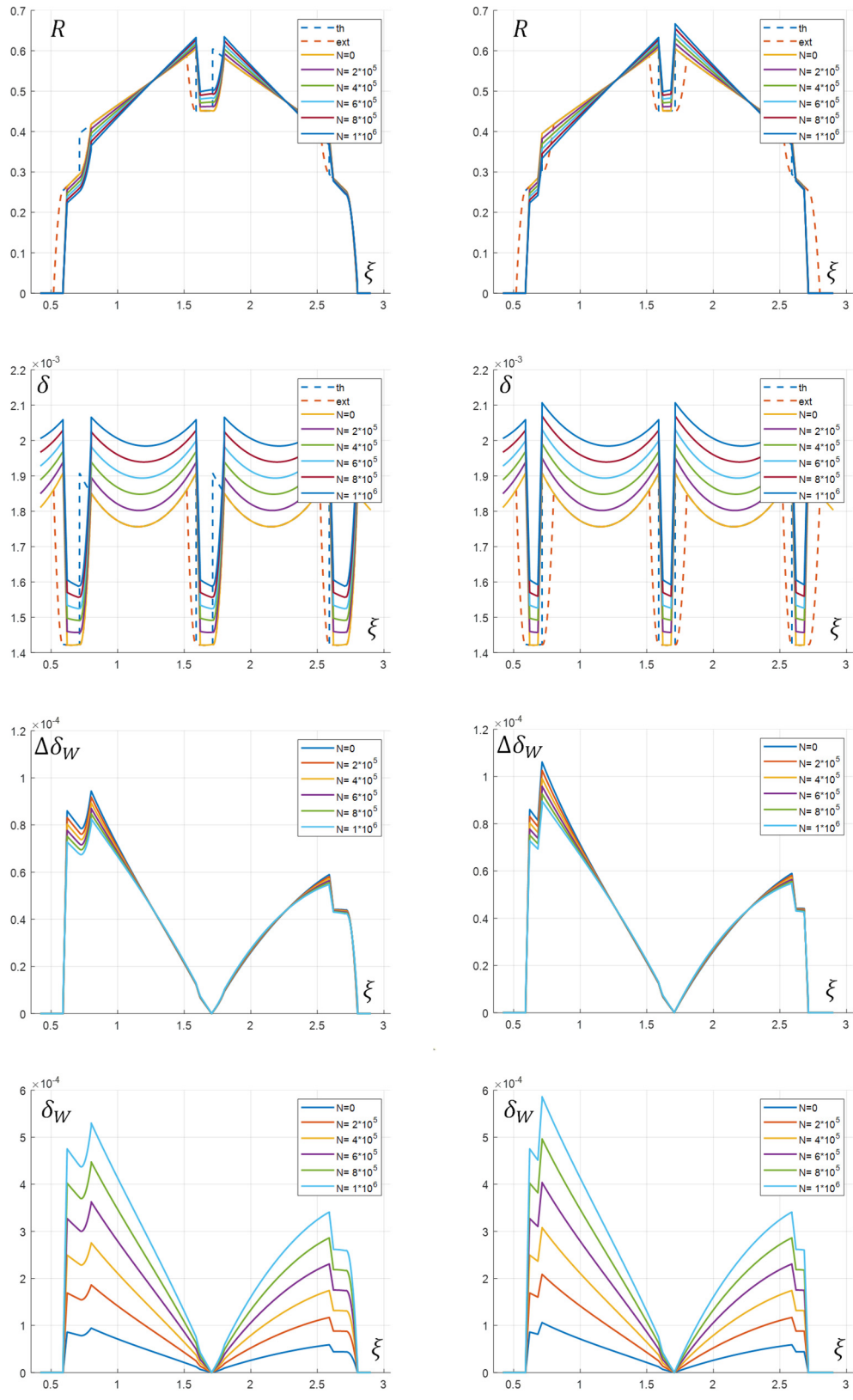


Fig. 10. LSR, QSTE, profundidad de desgaste y desgaste acumulado para engranaje HCR con rebaje de profundidad ajustada, asimétrico (izq.) y simétrico (dcha.).

La Fig. 10 muestra las mismas curvas de LSR, QSTE, profundidad de desgaste y desgaste acumulado, cada 200.000 revoluciones del piñón, para el engranaje HCR anterior, con rebaje asimétrico (izquierda) y simétrico (derecha). En este caso, la velocidad de deslizamiento en la base del piñón es mayor que en la base de la rueda, con lo que el desgaste a la entrada del contacto es notablemente mayor que a la salida, con independencia del número de ciclos, como se aprecia en la figura. Se puede observar también que la profundidad de desgaste y el desgaste acumulado es ligeramente mayor en el engranaje con rebaje simétrico que en el de rebaje asimétrico (a la entrada únicamente). De acuerdo con ello, la fuerza al inicio del contacto disminuye con el desgaste, mientras que aumenta en la zona central del intervalo de engrane. Al final del intervalo vuelve a disminuir, aunque menos que al inicio.

El QSTE aumenta con el número de ciclos de engrane a lo largo de todo el intervalo de contacto; sin embargo, la amplitud PP-QSTE presenta un comportamiento bastante errático. Aunque no es fácil de apreciar en la Fig. 10, el máximo PP-QSTE para rebaje asimétrico se presenta para 10^6 ciclos, seguido por 0 ciclos (superficies nuevas), $2 \cdot 10^5$, $8 \cdot 10^5$, $6 \cdot 10^5$ y $4 \cdot 10^5$. Esto es debido a la combinación de dos factores: por un lado, el QSTE máximo, que se ubica en uno de los límites del intervalo de contacto doble, aumenta a medida que aumenta la profundidad de desgaste; pero por otro lado, ese mismo aumento de la profundidad de desgaste provoca un adelanto del inicio del contacto (y un retraso de la finalización), lo que acorta el intervalo de contacto doble, por lo que sus extremos -en uno de los cuales se localiza el QSTE máximo- se desplazan, reduciendo ligeramente el QSTE máximo, como se aprecia en los diagramas de QSTE de la Fig. 10. La combinación de ambos efectos se traducirá en aumentos o disminuciones del PP-QSTE, lo que explica su comportamiento errático.

La pendiente máxima de la curva de QSTE, y por consiguiente la carga dinámica inducida máxima, permanece prácticamente constante, si bien para longitudes de rebaje más largas la pendiente tiende a reducirse muy ligeramente. Se ha de destacar que, en este caso, el QSTE en el punto de rodadura aumenta con el número de ciclos, aunque en ese punto no haya desgaste. Ello es debido a que, para engranajes rectos HCR, el contacto en el punto de rodadura se produce siempre con al menos otra pareja de dientes contactando en el mismo instante, y el desgaste que se produzca en esos puntos de contacto simultáneo hace aumentar el QSTE en esa posición.

4. INFLUENCIA DE LA PROFUNDIDAD DE DESGASTE EN LA AMPLITUD PICO-PICO DEL ERROR DE TRANSMISIÓN

Como se ha indicado más arriba, el rebaje del perfil permite retrasar el inicio del contacto, mitigando así el impacto de inicio de engrane, y controlar la carga dinámica inducida, puesto que la profundidad, forma y longitud del rebaje tiene influencia directa en la forma de la curva de error de transmisión, y concretamente en la amplitud PP-QSTE, que está directamente relacionada con la carga dinámica inducida.

En un trabajo anterior [47], los autores estudiaron la influencia del rebaje en la amplitud PP-QSTE para engranajes rectos HCR, y encontraron que el rebaje óptimo que minimizaba el PP-QSTE era el rebaje simétrico, de profundidad ajustada y de longitud de rebaje $0,86d_\alpha$, donde d_α representa la parte decimal del grado de recubrimiento ε_α . Sin embargo, este resultado es válido para superficies sin desgaste. Puesto que el desgaste tiene influencia en la TVMS, el LSR y el QSTE, ese rebaje óptimo para superficies nuevas, puede no serlo para superficies desgastadas. En este apartado se va a estudiar la influencia de la profundidad de desgaste en la amplitud PP-QSTE, en engranajes con rebaje simétrico y longitud de rebaje $0,86d_\alpha$ -la longitud óptima para superficies nuevas-, con el fin de encontrar la profundidad de rebaje óptima que minimice el PP-QSTE una vez se ha producido el desgaste. El estudio se extenderá a engranajes SCR y HCR.

La Fig. 11 muestra las curvas de LSR (arriba), QSTE antes del desgaste (medio) y QSTE después de 1.000.000 de revoluciones del piñón (abajo), para los engranajes SCR (izquierda) y HCR (derecha) anteriores, con rebaje simétrico de longitud $0,86d_\alpha$, para diferentes profundidades de rebaje entre 0,5 y 1,05 veces la profundidad de engrane ajustada. En los diagramas superiores se observa cómo, a medida que la profundidad de rebaje disminuye, los intervalos de contacto adicionales, sobre los que se producen los procesos de carga y descarga del diente parabólicos, se ensanchan, lo que conlleva la presencia de impactos de inicio de engrane mayores. También se puede observar cómo, para profundidades de rebaje superiores a la ajustada, el grado de recubrimiento efectivo disminuye.

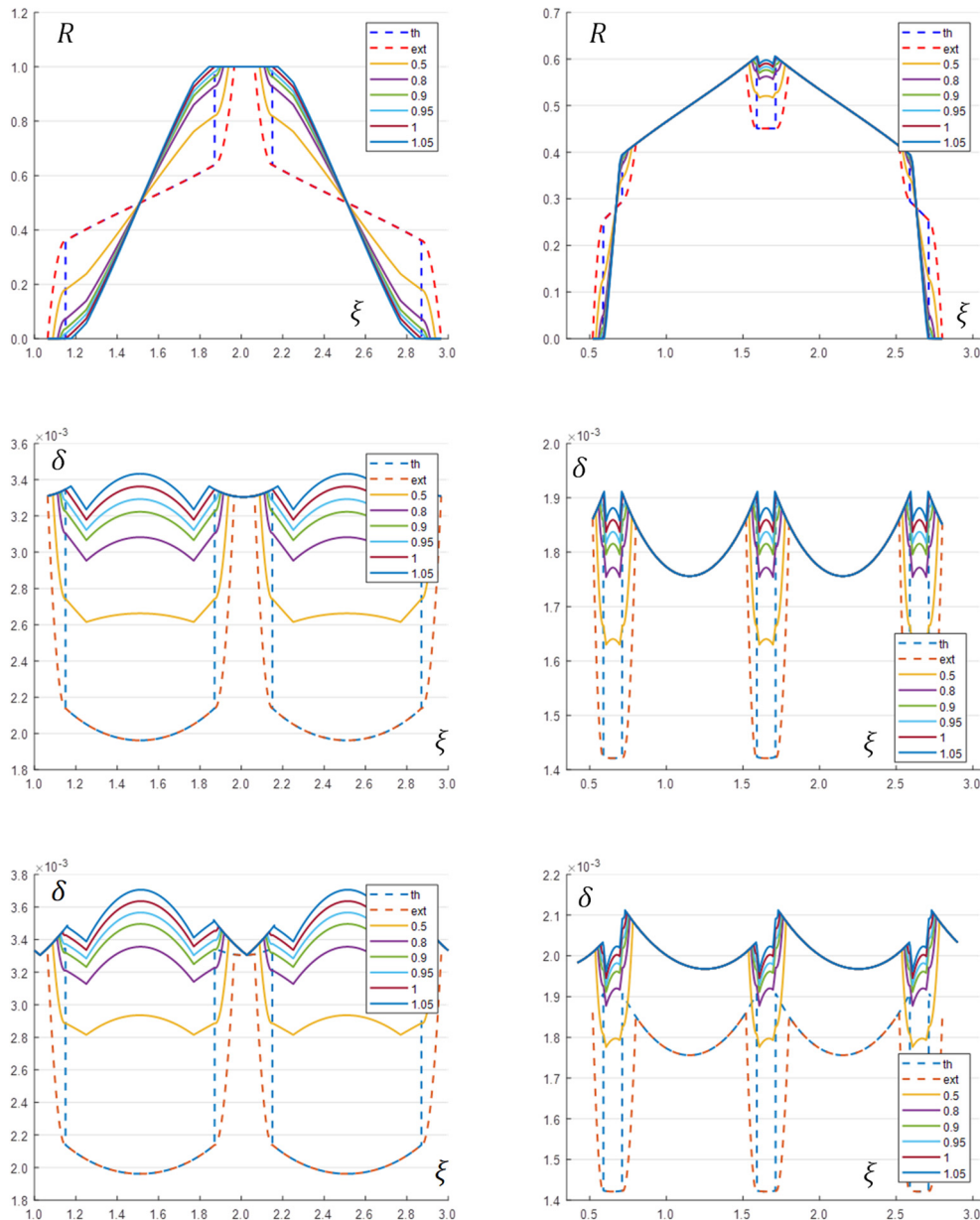


Fig. 11. LSR (arriba), QSTE sin desgaste (medio) y QSTE después de 1.000.000 de revoluciones del piñón (abajo), para engranaje SCR (izq.) y HCR (der.) con rebaje simétrico de longitud $0,86d_a$, para distintas profundidades de rebaje.

En los diagramas medios e inferiores se aprecia que el QSTE aumenta con la profundidad de rebaje y con el número de ciclos de desgaste (es decir, que es mayor en el diagrama inferior, para 1.000.000 de ciclos). No obstante, la amplitud PP-QSTE es más difícil de apreciar. En la Fig. 12 se han representado los valores de la amplitud PP-QSTE en función de la profundidad de rebaje, para distintos valores del número de ciclos de engrane del piñón.

En el caso de la transmisión SCR (diagrama de la izquierda), se aprecia que, para cada número de ciclos de desgaste, la amplitud PP-QSTE disminuye con la profundidad de rebaje hasta un mínimo, a partir del cual empieza a crecer, y que ese mínimo se presenta para valores menores de la profundidad a medida que aumenta el número de ciclos. Se observa también que todas esas curvas se agrupan en torno al punto de profundidad de rebaje igual al 88% de la ajustada. Se puede concluir, por tanto, que la profundidad de

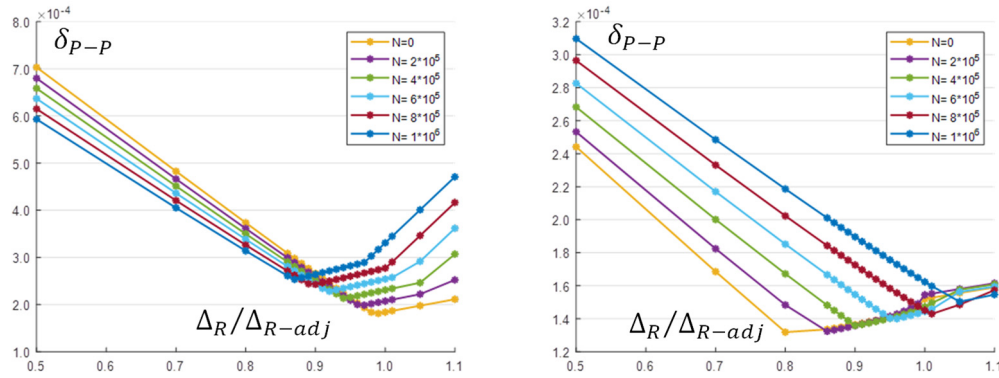


Fig. 12. Curva de rigidez de una pareja de dientes rectos.

rebaje óptima, que para engranajes nuevos era igual a la ajustada, para engranajes desgastados, está en torno al 88% de la ajustada.

En el caso del engranaje HCR (diagrama de la derecha), las curvas parecen agruparse a partir de una profundidad de rebaje igual a la ajustada, encontrándose una amplitud PP-QSTE prácticamente invariante con el número de ciclos para una profundidad de rebaje un 10% superior a la ajustada, lo que constituye la profundidad de rebaje óptima.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo analítico, simple y eficiente, para la simulación de la rigidez de engrane, el error de transmisión y el reparto de carga, para engranajes rectos con modificación de perfil, considerando la influencia del desgaste de los flancos de los dientes. La profundidad de desgaste se calcula a partir de la distribución de carga y la velocidad de deslizamiento en cada punto del intervalo de contacto, y se introduce en el modelo como una distancia adicional entre dientes que ha de cubrirse para alcanzar el contacto, que influye en el reparto de carga y el error de transmisión en los ciclos de engrane posteriores. La formulación analítica del modelo permite la realización de cálculos suficientemente aproximados, con muy bajo coste computacional.

La separación adicional inducida por el desgaste hace aumentar el error de transmisión, pero a menudo reduce la amplitud de oscilación pico-pico, y por lo tanto la carga dinámica inducida media. Concretamente, esto ocurre para engranajes rectos tanto de grado de recubrimiento estándar como de alto grado de recubrimiento sin rebaje, así como para engranajes de grado de recubrimiento estándar con rebaje a la entrada del intervalo de engrane. El comportamiento de los engranajes de alto grado de recubrimiento con modificación es más errático debido al desplazamiento de los límites del intervalo de contacto producido por el desgaste, que reduce el error de transmisión máximo.

A partir del rebaje óptimo para mínima amplitud de error de transmisión para dientes sin desgaste, se ha estudiado la influencia del desgaste en esa amplitud de error y se ha estudiado la profundidad de rebaje que hace mínima la amplitud del error después del desgaste. Como resultado de este estudio, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Para engranajes de grado de recubrimiento estándar, la amplitud pico-pico del error de transmisión disminuye con el número de ciclos de desgaste para profundidades de rebaje pequeñas, y aumenta a partir de profundidades próximas a la ajustada. La profundidad de rebaje óptima cuando los dientes se han desgastado corresponde al 88% de la profundidad ajustada, ya que en ese punto la amplitud de error aumenta de manera muy poco significativa con el número de ciclos de engrane.
- En el caso de engranajes de alto grado de recubrimiento sucede lo contrario: la amplitud pico-pico del error de transmisión aumenta con el número de ciclos de desgaste para profundidades de

rebaje pequeñas, y disminuye para profundidades superiores a la ajustada. La profundidad de rebaje óptima se sitúa en 110% de la ajustada, para la que la amplitud del error permanece sensiblemente invariante con el número de ciclos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación la financiación de los proyectos de investigación PID2019-110996RB-I00 “Simulación y control del error de transmisión en engranajes cilíndricos” y PID2022-142632OB-I00 “Modelo para la simulación del reparto de carga y el error de transmisión de engranajes planetarios”, así como a la ETS de Ingenieros Industriales de la UNED el soporte del proyecto 2023-ETSII-UNED-04.

REFERENCIAS

- [1] F.K. Choy, V. Polyshchuk, J.J. Zakrajsek *et al.*, “Analysis of the effects of surface pitting and wear on the vibration of a gear transmission system”, *Tribology International*, **29**, 77-83 (1996)
- [2] J.H. Kuang, A.D. Lin, “The effect of tooth wear on the vibration spectrum of a spur gear pair”, *Journal of Vibration and Acoustics*, **123**, 311-317 (2001)
- [3] C. Hu, W.A. Smith, R.B. Randall *et al.*, “Development of a gear vibration indicator and its application in gear wear monitoring”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **76–77**, 319-336 (2016)
- [4] R.L. Zhang, F.S. Gu, H. Mansaf *et al.*, “Gear wear monitoring by modulation signal bispectrum based on motor current signal analysis”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **94**, 202-213 (2017)
- [5] K. Feng, P. Borghesani, W.A. Smith *et al.*, “Vibration-based updating of wear prediction for spur gears”, *Wear* **426–427**, 1410-1415 (2019)
- [6] S. Andersson. “Partial EHD theory and initial wear of gears”, Tesis Doctoral, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden (1975)
- [7] J.F. Archard, “Contact and rubbing of flat surfaces”, *Journal of Applied Physics*, **24**, 981–988 (1953)
- [8] S.F. Wu, H.S. Cheng, “Sliding wear calculation in spur gears”, *Journal of Tribology*, **115**, 493–500 (1993)
- [9] A. Flodin, S. Andersson, “Simulation of mild wear in helical gears”, *Wear*, **241**, 123–128 (2000)
- [10] A. Flodin, S. Andersson, “A simplified model for wear prediction in helical gears”, *Wear*, **249**, 285–292 (2001)
- [11] V. Simon, “Load and stress distributions in spur and helical gears”, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **110**, 197–202 (1988)
- [12] J. Brauer, S. Andersson, “Simulation of wear in gears with flank interference—A mixed FE and analytical approach”, *Wear*, **254**, 1216–1232 (2003)
- [13] P. Bajpai, A. Kahraman, N.E. Anderson, “A surface wear prediction methodology for parallel-axis gear pairs”, *Journal of Tribology*, **126**, 597–605 (2004)
- [14] M. Masjedi, M.M. Khonsari, “On the prediction of steady-state wear rate in spur gears”, *Wear* **342–343**, 234–243 (2015).
- [15] H. Ma, R. Song, X. Pang *et al.*, “Time-varying mesh stiffness calculation of cracked spur gears”, *Engineering Failure Analysis* **44**, 179–194 (2014).
- [16] H. Ma, J. Zeng, R.J. Feng *et al.*, “An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tooth profile modification”, *Mechanism and Machine Theory*, **9**, 64–80 (2016)
- [17] S. Li, “Effect of misalignment error, tooth profile modifications and transmitted torque on tooth engagements of a pair of spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **83**, 125–136 (2015)
- [18] X. Liu, Y. Yang, J. Zhang, “Investigation on coupling effects between surface wear and dynamics in a spur gear system”, *Tribology International*, **101**, 383–394 (2016)
- [19] Z.Y. Chen, P.F. Ji, “Study on wear in spur gears based on an improved load distribution model considering the effects of corner contact”, *Engineering Failure Analysis*, **115**, 104605 (2020)

- [20] T. Lin, Z. He, “Analytical method for coupled transmission error of helical gear system with machining errors, assembly errors and tooth profile modifications”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **91**, 167–182 (2017)
- [21] J. Zhan, M. Fard, R. Jazar, “A CAD-FEM-QSA integration technique for determining the time-varying meshing stiffness of gear pairs”, *Measurement*, **100**, 139–149 (2017)
- [22] S. Shweiki, A. Rezayat, T. Tamarozzi *et al.*, “Transmission error and strain analysis of lightweight gears by using a hybrid FE-analytical gear contact model”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **123** 573, 590 (2019)
- [23] Y. Yang, L. Cao, H. Li *et al.*, “Nonlinear dynamic response of a spur gear pair based on the modeling of periodic mesh stiffness and static transmission error”, *Applied Mathematical Modelling*, **72**, 444–469 (2019)
- [24] S.S. Ghosh, G. Chakraborty, “On optimal tooth profile modification for reduction of vibration and noise in spur gear pairs”, *Mechanism and Machine Theory*, **105**, 146–163 (2016)
- [25] Z. Chen, Y. Shao, “Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack”, *Mechanism and Machine Theory*, **62**, 63–74 (2013)
- [26] H. Ma, M.J. Feng, Z.W. Li *et al.*, “Time-varying mesh characteristics of a spur gear pair considering the tip-fillet and friction”, *Meccanica*, **52**, 1695–1709 (2017)
- [27] C. Zhang, J. Wei, F. Wang *et al.*, “Dynamic model and load sharing performance of planetary gear system with journal bearing”, *Mechanism and Machine Theory*, **151**, 103898 (2020)
- [28] Y.F. Huangfu, Z.F. Zhao, H. Ma *et al.*, “Effects of tooth profile modifications on the dynamic characteristics of thin-rimmed gears under surface wear”, *Mechanism and Machine Theory*, **150**, 103870 (2020)
- [29] Z. Shen, B. Qiao, L. Yang *et al.*, “Fault mechanism and dynamic modeling of planetary gear with gear wear”, *Mechanism and Machine Theory*, **155**, 104098 (2021)
- [30] W. Chen, Y. Lei, Y. Fu *et al.*, “A study of effects of tooth surface wear on time-varying mesh stiffness of external spur gear considering wear evolution process”, *Mechanism and Machine Theory*, **155**, 104055 (2021)
- [31] Z. Chen, P. Ji, “Research on the variation of mesh stiffness and transmission error for spur gear with tooth profile modification and wear fault”, *Engineering Failure Analysis*, **122**, 105184 (2021).
- [32] F. Zheng, J. Zhang, L. Yao *et al.* “Investigation on the wear of spur gears generated by modified cutter”, *Friction*, **9**, 288–300 (2021).
- [33] K. Feng, W.A. Smith, R.B. Randall *et al.*, “Vibration-based monitoring and prediction of surface profile change and pitting density in a spur gear wear process”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **165**, 108319 (2022)
- [34] J. Zhao, W. Sheng, Z. Li *et al.*, “Effect of lubricant selection on the wear characteristics of spur gear under oil-air mixed lubrication”, *Tribology International*, **167**, 107382 (2022)
- [35] H. Tian, H. Han, Z. Zhao *et al.*, “Wear prediction and meshing characteristics for the planetary gear set considering angular misalignment and rotating carrier”, *Engineering Failure Analysis*, **140**, 106583 (2022)
- [36] Z. Shen, L. Yang, B. Qiao *et al.*, “Mesh relationship modeling and dynamic characteristic analysis of external spur gears with gear wear”. *Frontiers of Mechanical Engineering*, **17**, 9 (2022)
- [37] J. Walker, M. Mohammadpour, S. Theodossiades *et al.*, “A multi-physics transient wear model for helical gear pairs”, *Tribology International*, **169**, 107463 (2022)
- [38] Y. Yan, C. Jiang, W. Li, “Simulation on coupling effects between surface wear and fatigue in spur gear”, *Engineering Failure Analysis*, **134**, 106055 (2022)
- [39] K. Feng, J.C. Ji, Q. Ni *et al.*, “A review of vibration-based gear wear monitoring and prediction techniques”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **182**, 109605 (2023)
- [40] Z.Y. Chin, P. Borghesani, W.A. Smith *et al.*, “Monitoring gear wear with transmission error”, *Wear*, **523**, 204803 (2023)
- [41] J.I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M. Artés *et al.*, “Load distribution model along the line of contact for involute external gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **45**, 780–794 (2010)
- [42] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero, “Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears”, *Meccanica*, **48**, 527–543 (2013)

- [43] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero, “Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including Hertzian effects”, *Mechanism and Machine Theory*, **109**, 231–249 (2017)
- [44] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero, “Strength model for bending and pitting calculations of internal spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **133**, 691–705 (2019)
- [45] J.I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M.B. Sánchez. “Control del error de transmisión cuasi-estático mediante rebaje de punta en engranajes rectos de perfil de evolvente”. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* **22**, 71-90 (2018)
- [46] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero, “Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **139**, 506–525 (2019)
- [47] M. Pleguezuelos, M.B. Sánchez, J.I. Pedrero, “Control of transmission error of high contact ratio spur gears with symmetric profile modifications”, *Mechanism and Machine Theory*, **149**, 103839 (2020)
- [48] M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero, M.B. Sánchez *et al.*, “Influence of wear on load sharing and transmission error of spur gears with profile modifications”, *Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering*, 111-119 (2021)
- [49] J. Hertz, *On the Contact of Elastic Solids, Miscellaneous Papers*, Macmillan, Londres, Inglaterra (1896)
- [50] C. Weber, K. Banaschek, *Formänderung und profilrücknahme bei gerad und schrägverzahnten rädern. Schriftenreihe Antriebstechnik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, Alemania (1955)
- [51] P. Sainsot, P. Velex, O. Duverger, “Contribution of gear body to tooth deflections—A new bidimensional analytical formula”, *Journal of Mechanical Design*, **126**, 748–752 (2004)
- [52] M. Pleguezuelos, M.B. Sánchez, J.I. Pedrero, “On the evaluation of the meshing stiffness of external spur gears”, *MATEC Web of Conferences*, **317**, 01002 (2020)
- [53] M. Pleguezuelos, M.B. Sánchez, J.I. Pedrero, “Analytical model for meshing stiffness, load sharing, and transmission error for spur gears with profile modification under non-nominal load conditions”, *Applied Mathematical Modelling*, **109**, 344-365 (2021)

INFLUENCE OF THE DEPTH OF RELIEF ON THE MESHING STIFFNESS, LOAD SHARING, AND TRANSMISSION ERROR OF SPUR GEARS WITH WEAR

Abstract – In power transmission gears, the geometry of the contact surfaces influences the mesh stiffness and transmission error, which is source of dynamic load, noise, and vibration. Modifications in the geometry of the profiles, such as the tip relief to avoid the mesh-in impact or the wear that inevitably occurs in the sliding contact between friction surfaces, have therefore influence on the dynamic behaviour of the transmission. This paper presents a study of the influence of the depth of relief on the transmission error of spur gears with wear. The evolution of the peak-to-peak amplitude of transmission error, which determines the induced dynamic load, with the number of wear cycles, is analysed. The analysis considers depths of relief greater and smaller than the adjusted value for the elimination of the mesh-in impact, as well as symmetrical reliefs (at the beginning and end of contact) and asymmetrical (only at the end of contact), applied to standard and a high contact ratio spur gears. The case of symmetric relief with optimal length of relief for minimum amplitude of transmission error is specifically analysed and the optimal depth of relief for minimum amplitude after a certain number of wear cycles is studied.

Keywords – Spur Gears, Profile Modification, Mesh Stiffness, Load Sharing, Transmission Error, Wear.