



## ANÁLISIS DEL CONTACTO HERTZIANO EN TRANSMISIONES DE ENGRANAJES PLANETARIAS

J. SÁNCHEZ ESPIGA<sup>1,2</sup>, N. DOURADO<sup>2,3</sup>, A. FERNÁNDEZ DEL RINCÓN<sup>1</sup>, F. MARQUES<sup>2,3</sup>, F. VIADERO RUEDA<sup>1</sup>, P. FLORES<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Cantabria

Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica  
Avda. de los Castros s/n, 39005, Santander, Cantabria

<sup>2</sup>Universidade do Minho

CMEMS, Departamento de Engenharia Mecânica  
Campus Azurem, Guimarães, Portugal

<sup>3</sup>LABELS-Associate Laboratory  
Braga, Guimarães, Portugal

*(Recibido 13 de marzo de 2023, para publicación 26 de marzo de 2023)*

**Resumen** – Este trabajo evalúa la precisión de la formulación de Weber-Banaschek, empleada en un modelo híbrido plano en la resolución de los contactos en transmisiones planetarias. Esta formulación considera el contacto Hertziano entre los flancos activos en las ruedas exteriores (sol-planeta) e interiores (planeta-anillo) de dichas transmisiones. El planteamiento Hertziano presenta limitaciones en cuanto a la resolución tanto del contacto exterior, como del interior, el cual es conforme para superficies con radios de curvatura similares, como ocurre en el contacto rueda-rail. Por esto, este análisis se extiende a la precisión del empleo de un planteamiento analítico en la resolución del contacto exterior e interior. Para evaluar la precisión de dicha formulación se presenta un nuevo modelo de elementos finitos con simplificaciones geométricas para reducir el coste computacional. Ambos modelos se emplean para la simulación de escenarios análogos en una transmisión con un solo planeta, para evitar la influencia de los contactos de otras ruedas. Los resultados de las fuerzas de contacto y la longitud de la zona de contacto se comparan entre ambos modelos. Las fuerzas de contacto muestran un grado elevado de precisión. Sin embargo, en cuanto a las longitudes de las zonas de contacto.

**Palabras clave** – Contacto interior, contacto exterior, contacto Hertziano, contacto conforme, elementos finitos.

### 1. INTRODUCCIÓN

El modelado en transmisiones de engranajes, y más concretamente en transmisiones planetarias y epicicloidales, ha experimentado un crecimiento muy significativo en las últimas décadas [1]. Los nuevos modelos de simulación para transmisiones planetarias se pueden clasificar según su formulación. En primer lugar, los modelos más clásicos se fundamentan en una formulación analítica donde se desprecian algunos efectos o se tienen rigideces de engrane constantes en el tiempo [2]–[6]. Sin embargo, con el tiempo estas propuestas se han ido sofisticando y los efectos que se tienen en cuenta en la actualidad son más extensos [7]–[12]. No obstante, el desarrollo del hardware ha llevado a la presentación de nuevas propuestas más complejas desde el punto de vista computacional, en primer lugar, los modelos de elementos finitos [13]–[16]. A su vez, a partir de la propuesta presentada por Vijayakar en [17] un nuevo tipo de propuestas se ha desarrollado buscando combinar las ventajas de diferentes planteamientos de modelizado, la rapidez y bajo coste computacional de las formulaciones analíticas, con la precisión de los modelos de elementos finitos [18]–[20], pero también existen propuestas donde se combinan los modelos de elementos finitos con modelos multicuerpo para resolver la cinemática [21], [22] o combinaciones con modelos multicuerpo y formulaciones analíticas [23].

El desarrollo de todos estos modelos ha llevado a un gran avance en el estudio del comportamiento de las transmisiones planetarias desde el punto de vista estático y dinámico. Los trabajos previos se han centrado en el estudio del reparto de carga afectado por los errores de fabricación [12], [24]–[31], el efecto de la

gravedad [32]–[34] o el efecto de la inclusión de los rodamientos o cojinetes que se emplean en las transmisiones [35], [36], entre otros.

Este trabajo se centra en el análisis de la precisión del empleo de una formulación analítica para resolver el problema, no lineal, de contacto local entre perfiles activos de dos ruedas exteriores o interiores, perteneciendo estas ruedas a la misma transmisión planetaria. Dicha formulación presentada en [20], [37] permite calcular la longitud de la zona de contacto, en un planteamiento bidimensional. Para poder analizar la precisión de esta formulación en la resolución del mencionado contacto se escoge la comparación de la longitud de contacto que se obtiene como resultado en este modelo y en un nuevo modelo de elementos finitos análogo.

Así, el documento consta de una sección 2 donde se tratan los detalles de ambos modelos, centrándose en los aspectos más relevantes para este estudio. Más adelante, se presentan los detalles de la transmisión definida para el análisis, así como, los detalles de la geometría de los dientes y de las posiciones de estudio que se han seleccionado. A continuación, en la sección 4 se presentan y analizan los resultados obtenidos para este planteamiento. Finalmente, en la sección 5 se extraen conclusiones a partir del análisis de los resultados.

## 2. MÉTODOS

El procedimiento empleado en este trabajo consiste en la simulación de una misma transmisión empleando dos modelos análogos, pero con formulaciones diferentes. Así, en un primer lugar se emplea un modelo híbrido [20] que combina el empleo de modelos de elementos finitos con formulaciones analíticas, basadas en el trabajo de Weber-Banaschek [37], para la resolución del problema de contacto entre flancos activos de una transmisión planetaria. Los resultados sacados de este modelo se comparan con un nuevo modelo de elementos finitos desarrollado con ABAQUS. Por lo tanto, en esta sección los detalles de los modelos empleados se presentan, así como, las formulaciones empleadas.

### 2.1. Modelo híbrido

Con respecto al modelo híbrido detallado en anteriores publicaciones [25], [30], [38], [39] el interés en su formulación se centra en la resolución del problema de contacto.

Así, este modelo se basa en la combinación de modelos de elementos finitos planos con la formulación analítica de Weber-Banaschek para la resolución del problema de contacto local. Así, este modelo permite la definición de la geometría de las ruedas y de los elementos que componen la transmisión, considerando una serie de errores (posición, espesor, *pitting*, grietas...). Sin embargo, en este caso la transmisión que se ha definido es ideal, es decir, exenta de cualquier error. Una vez se tiene la geometría de la transmisión se crean los modelos de elementos finitos (EF), cuyo uso se basa en el trabajo presentado por Brauer [14]. De esta forma cada rueda tiene un par de modelos, uno global y otro local. El global incluye el cuerpo de la rueda y una serie de dientes. El local solo representa la geometría del perfil del diente hasta una profundidad  $h$ , que tendrá impacto en la resolución de Weber-Banaschek. Por lo tanto, empleando estos modelos de EF y el principio de superposición se determinan las deformaciones en las ruedas, sus dientes y el cuerpo de la rueda, debido a un determinado caso de contacto. Esto permite conocer la rigidez de engrane, al menos la parte lineal del problema de contacto. Al mismo tiempo, la formulación de Weber-Banaschek se emplea para resolver iterativamente la parte no lineal del problema de contacto.

Por otra parte, se resuelve el problema geométrico para la geometría de las ruedas, permitiendo que los perfiles de las ruedas, supuestos infinitamente rígidos, se solapen. Este problema se considera también para una serie de dientes, determinado por (1). Además, se tienen en cuenta las posibilidades de contacto entre perfiles de evolvente o entre evolventes y redondeos en la punta de los dientes.

$$Z = 2 \cdot \text{ceil}(\varepsilon + 1) \quad (1)$$

Una vez conocidos los solapamientos, existirá una relación entre el solapamiento y las fuerzas de contacto entre dientes, de forma lineal y a esto se le añadirá la solución al problema no lineal del contacto local. Y solo existirá contacto siempre que el solapamiento sea positivo.

## 2.2. Modelo de elementos finitos

Con respecto a la elaboración de la malla de elementos finitos, se ha empezado por construir dos modelos sólidos simplificados de: (a) un par de dientes rectos pertenecientes a dos ruedas exteriores (sol-planeta); y (b) un par de dientes rectos formando dos ruedas interiores (planeta-anillo). Dichas construcciones se han generado a partir de la geometría de los perfiles que se obtiene empleando la formulación presentada en [20], siguiendo la información contenida en la Tabla 1. Dichos modelos, han sido desarrollados con el objetivo de extender la creación de sólidos mediante la repetición de la geometría inicial respecto de un eje de revolución, según el número de dientes fijado, el cual está detallado en la Tabla 2.

Tabla 1. Parámetros de la geometría de los perfiles de los dientes.

Parámetro	Magnitud
Módulo (mm)	3
Ángulo de presión (°)	20
Addendum	$1 \cdot m$
Dedendum	$1,25 \cdot m$
Redondeo en la punta	$0,05 \cdot m$

Tabla 2. Números de dientes y distancia de montaje.

Número de dientes en las ruedas	
Anillo, $Z_r$	121
Planeta, $Z_p$	30
Sol, $Z_s$	60
Distancia de montaje (mm)	
Sol-Planeta	135,75
Planeta-Anillo	135,75

Estos sólidos iniciales, correspondientes a dientes pertenecientes a las parejas de ruedas en contacto, se han discretizado con elementos finitos cuadráticos iso-paramétricos de 20 nodos, para permitir una mejor reproducción de contornos curvos, facilitar la convergencia de las simulaciones y reducir la probabilidad de ocurrencia del fenómeno de *shear locking*.

Así, en el modelo numérico final (Fig. 1) se ha definido un total de 57552 elementos, especificando para todos ellos un comportamiento del material (acero) como lineal elástico ( $E = 207$  GPa and  $\nu = 0,3$ ). Este modelo representa un número  $Z$  de dientes, siguiendo la ecuación (1), en el sol y el anillo y para el planeta la totalidad de la rueda está modelizada.

Con respecto a las condiciones de contorno, se han restringido los desplazamientos de los nodos localizados en la superficie superior del modelo que forma el anillo exterior. Además, se han definido dos pares cinemáticos independientes (de rigidez infinita) entre: (a) los nodos que componen la superficie del agujero inferior del portaplanetas y un nodo de referencia localizado en el punto medio del eje del dicho portaplanetas; y (b) los nodos que forman el interior del agujero del sol y otro nodo ubicado en el punto medio del eje del mismo sol. A cada uno de estos pares cinemáticos se le han bloqueado los desplazamientos en los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Además, el modelo numérico incorpora un número de superficies de contacto, entre componentes y dientes, debidamente ajustado a las simulaciones que se plantean con el modelo. Esto implica que no solo los contactos entre dientes se han considerado, sino también las interacciones entre el portaplanetas y el sol y/o el planeta. Asimismo, las interacciones entre el eje del portaplanetas y el soporte del planeta.

Se han aplicado pares de 500 Nm al sol ( $T_s$ ) y de intensidad igual a  $-T_s(1+Z_r/Z_s)$ , en los ejes de los agujeros de aquellos componentes, a través de los pares cinemáticos previamente especificados, lográndose un equilibrio en el sistema.

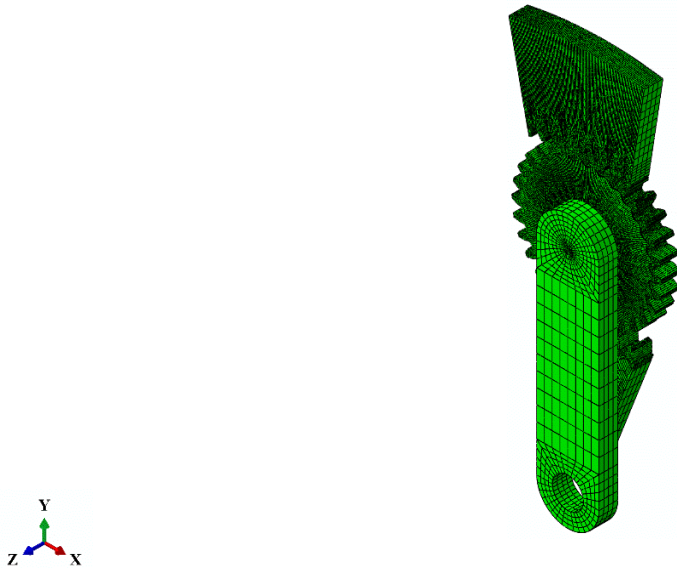


Fig. 1 Vista general del modelo de elementos finitos.

La definición y posición de las superficies anteriormente mencionadas permite modelar el contacto entre los dientes, evitando así la penetración entre superficies en contacto a lo largo de las simulaciones. Esta restricción se ha fijado con el tipo superficie-superficie previsto dentro de la biblioteca de ABAQUS, que emplea el método de la penalidad.

### 2.3. Longitud de la zona de contacto

En primer lugar, la longitud de la zona de contacto en el modelo híbrido se obtiene empleando la formulación de Weber-Banaschek, ya mencionada anteriormente. La expresión (2) se aplica para los contactos entre ruedas exteriores y el contacto entre la evolvente del planeta y el redondeo de la punta del diente del anillo. Para superficies cóncavas, contacto entre evolventes de ruedas interiores o evolvente cóncava con redondeo de la rueda exterior, se emplea la expresión (3).

$$L_c = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} \frac{F}{b}} \quad (2)$$

$$L_{cconc} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\chi_1 \chi_2}{abs(\chi_1 - \chi_2)} \frac{F}{b}} \quad (3)$$

En estas expresiones  $E_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\chi_i$  son el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y el radio de curvatura del cuerpo  $i$ . Los radios de curvatura se obtienen con la expresiones recogidas en [20]. Igualmente,  $F$  se corresponde con la fuerza de contacto y  $b$  el ancho de la rueda. Finalmente, la longitud de la zona de contacto será dos veces el valor calculado empleando (2) y (3).

En el caso del modelo de elementos finitos, uno de los parámetros de salida que se seleccionan en las simulaciones es el área de contacto entre las superficies que se han definido para los contactos, visto que se ha elaborado un modelo tridimensional de la transmisión planetaria. Una vez se tiene el área de contacto y teniendo en cuenta que, los dientes son rectos, y que no se incluyen modificaciones del perfil a lo largo del ancho de la rueda como el *crowning*, para obtener la longitud de la zona de contacto se puede usar la expresión mostrada a continuación.

$$L_{cFEM} = \frac{A_{cont}}{b} \quad (4)$$

Así, la longitud de contacto en el modelo de elementos finitos ( $L_{cFEM}$ ) es el resultado de dividir el área de contacto  $A_{cont}$  obtenido en las simulaciones, entre el ancho de la rueda  $b$ .

### 3. PARÁMETROS DE TRABAJO

Como se mencionó anteriormente, en las simulaciones llevadas a cabo para este trabajo, los perfiles de los dientes que se han empleado tienen la geometría que se define por los parámetros recopilados en la Tabla 1. En cuanto a las ruedas y el montaje de las mismas en la transmisión, los detalles se recopilan en la Tabla 2.

Este número de dientes hace que el montaje solo sea posible con un planeta. Esta selección se debe al deseo de evitar los efectos de otros contactos aledaños en el contacto que se analiza en profundidad. Como se ha presentado con anterioridad, el modelo de elementos finitos (Fig. 1) presenta simplificaciones geométricas que permiten reducir el número de elementos y, por lo tanto, el tiempo computacional, pero no permiten contar con efectos de otros contactos relacionados con más planetas.

### 4. RESULTADOS

En primer lugar, se establece una validación del funcionamiento de ambos modelos. En este caso, la magnitud escogida para dicha validación serán las fuerzas de contacto. Dado el coste computacional de las simulaciones en el modelo de elemento finitos, se seleccionan unas posiciones de interés y de estas se extraerán los resultados. Igualmente, en el modelo híbrido se seleccionarán las mismas posiciones.

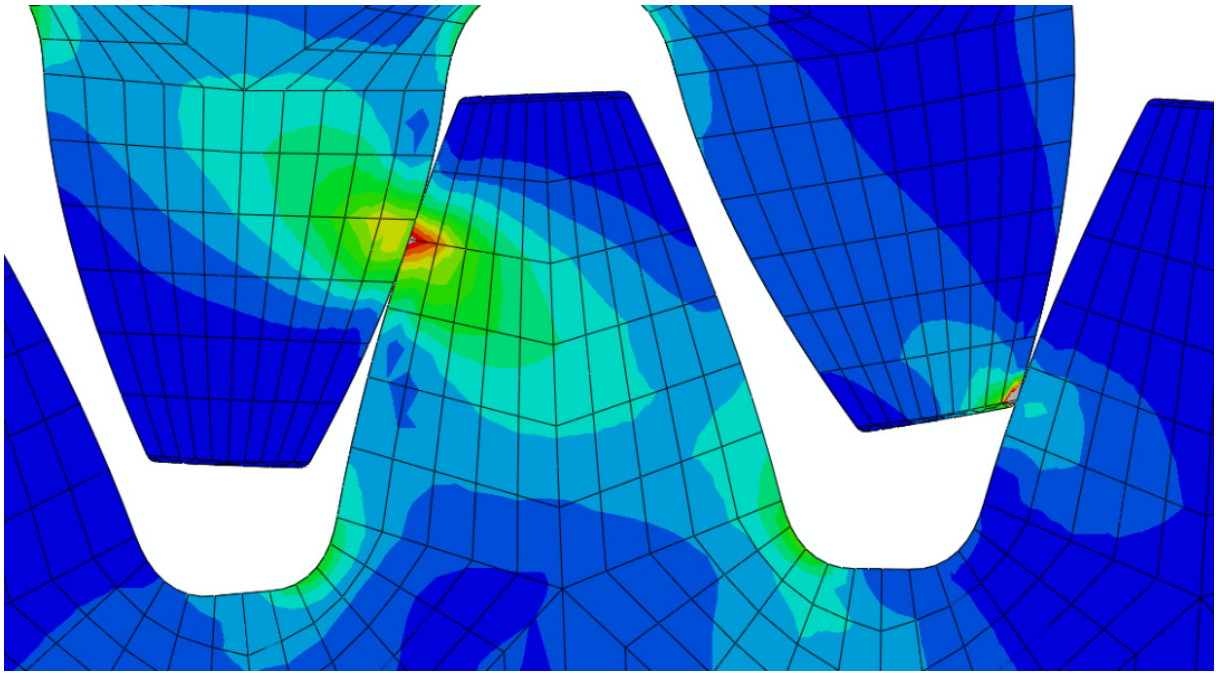
Por lo tanto, las posiciones seleccionadas se corresponden con situaciones en las cuales se tiene un contacto doble entre sol y planeta, que dada la relación de contacto. Donde hay contactos entre evolventes y entre evolvente y redondeo en la punta del diente.

Este estudio se centra en situaciones diferentes, donde haya un contacto entre superficies cóncavas entre ruedas interiores. Para el contacto entre ruedas exteriores, el primer escenario con un contacto entre redondeo y evolvente y otro contacto entre evolventes (Fig. 2a) y un doble contacto entre evolventes para el contacto entre ruedas interiores (Fig. 2b). En el escenario 2, tanto en el contacto entre ruedas exteriores, como interiores está compuesto por un contacto doble entre perfiles de evolvente (Fig. 3 (a) y (b)).

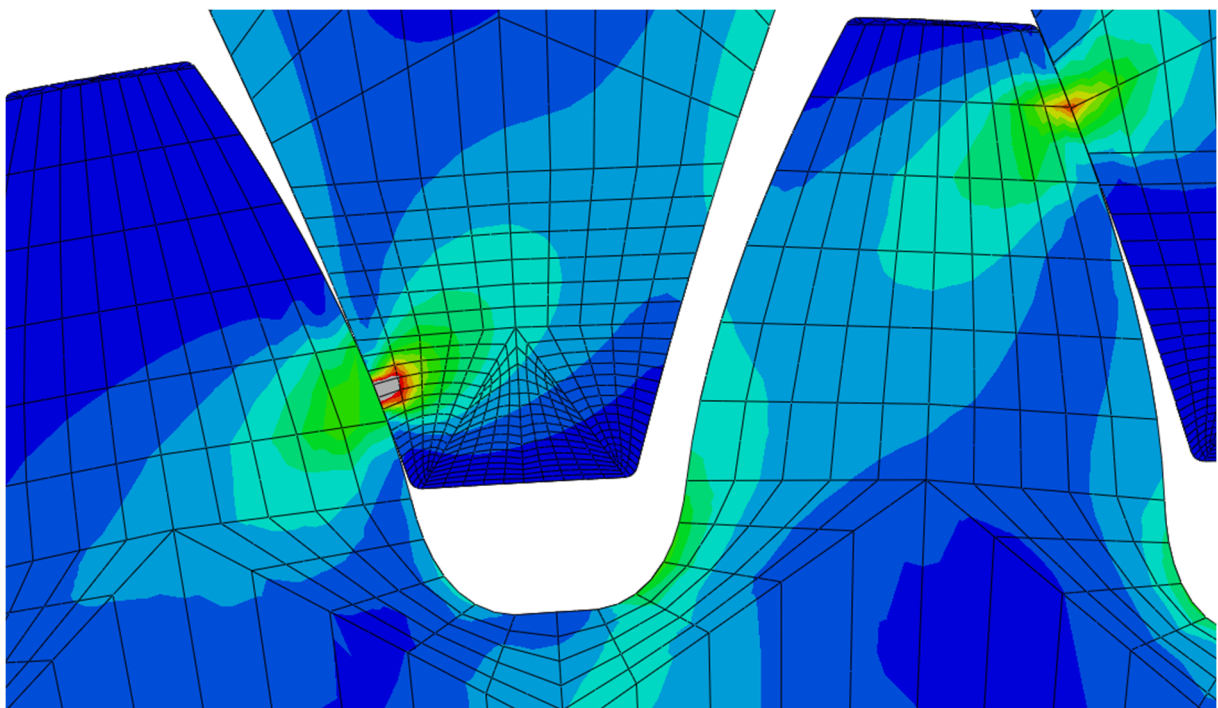
En estos escenarios que se han presentado, las fuerzas de contacto obtenidas por ambos modelos se recogen en la Tabla 3.

Como se puede ver en los resultados numéricos recogidos en la Tabla 3, las fuerzas de contacto que se obtienen en ambos modelos para escenarios análogos muestran pequeñas diferencias. Esto demuestra que el funcionamiento de ambos modelos es comparable. Partiendo de esta base, el siguiente paso que se presenta en este trabajo se corresponde con el estudio de los resultados en estos escenarios de las longitudes de las zonas de contacto, empleando ambos enfoques.

Empleando el procedimiento detallado en los apartados 2 y 3 de este trabajo, los resultados que se obtienen para las longitudes de contacto en los escenarios planteados se recogen en la Tabla 4.



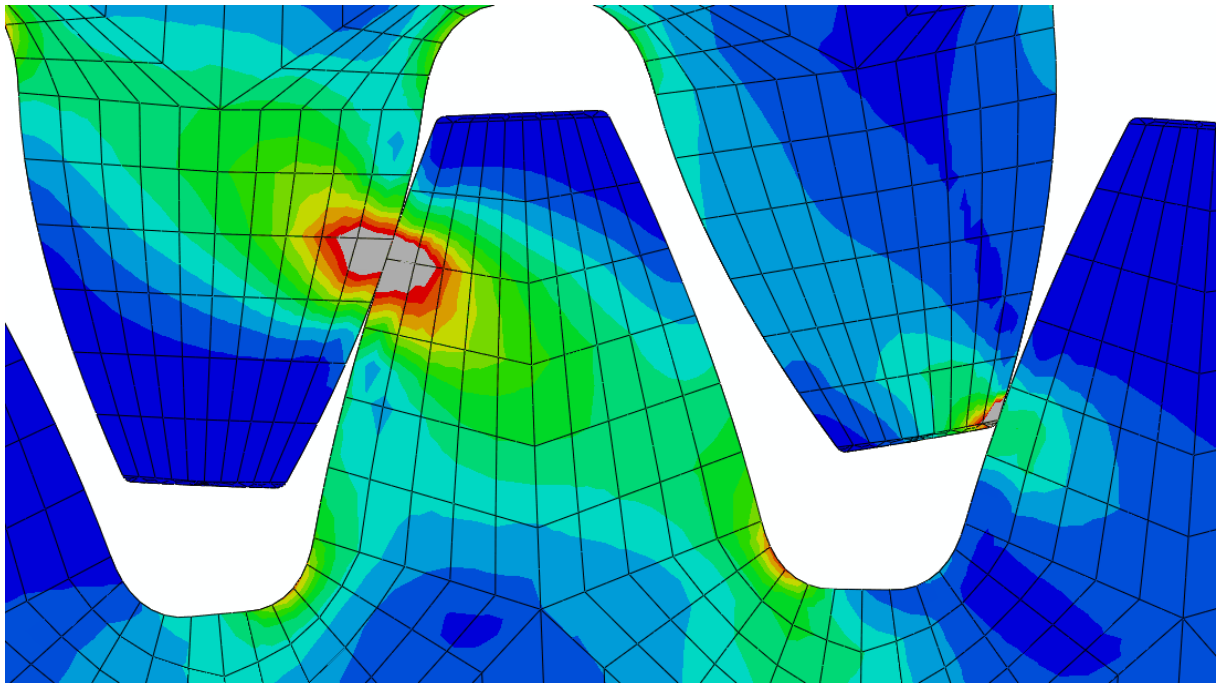
(a)



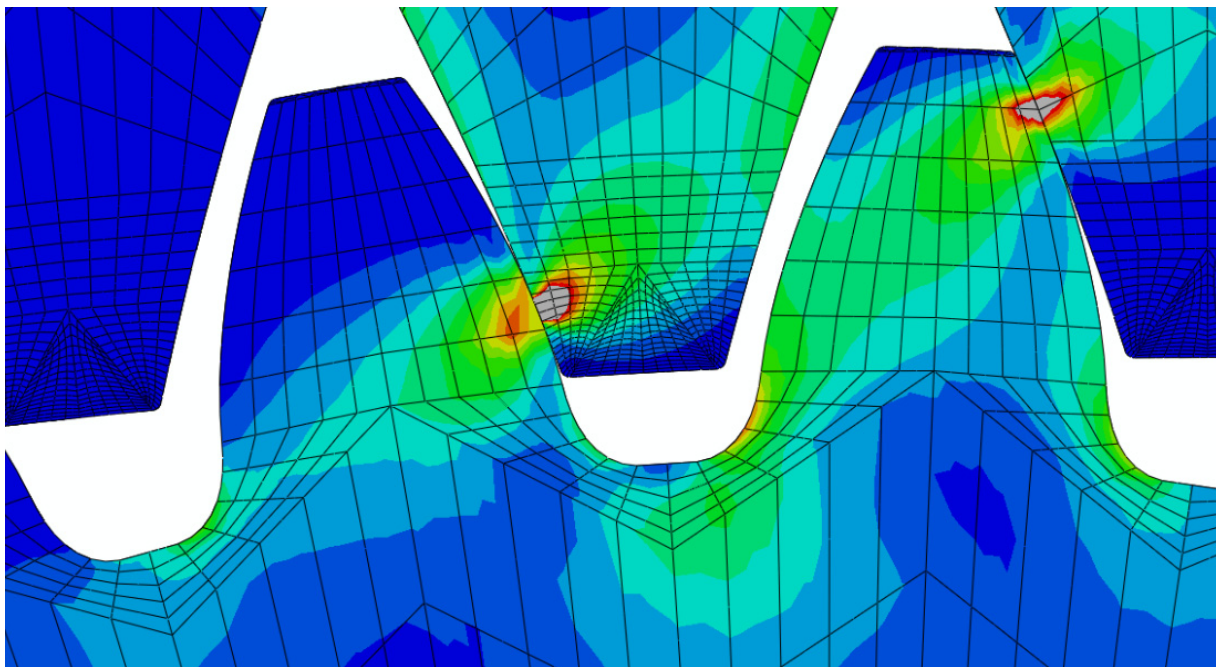
(b)

Fig. 2. Detalle del contacto para el escenario 1 y distribución de tensiones según Von Mises: (a) sol-planeta y (b) planeta-anillo.





(a)



(b)

Fig. 3. Detalle del contacto para el escenario 2 y distribución de tensiones según Von Mises: (a) sol-planeta y (b) planeta-anillo.

Tabla 3. Componentes de las fuerzas de contacto en el plano  $xy$  para ambos modelos en ambos escenarios de estudio.

Componentes de las fuerza de contacto en $xy$ (N)					
Modelo de elementos finitos					
Escenario		Sol-planeta		Planeta-anillo	
		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
1	$F_x$	4080,1	1564,6	2795,6	2715,7
	$F_y$	1485,1	569,5	1017,5	988,4
2		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	$F_x$	2330,4	3126,4	2963,8	2458,2
	$F_y$	848,2	1137,9	1078,7	894,7
Modelo híbrido					
Escenario		Sol-planeta		Planeta-anillo	
		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
1	$F_x$	4130,7	1387,0	2808,45	2756,0
	$F_y$	1573,4	549,6	973,1	954,9
2		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	$F_x$	2425,2	3099,7	2946,4	2639,8
	$F_y$	923,8	1180,7	1020,9	914,7

Tabla 4. Longitud de la zona de contacto obtenida para ambos modelos en ambos escenarios de estudio.

Longitud de la zona de contacto (mm)					
Modelo de elementos finitos					
Escenario		Sol-planeta		Planeta-anillo	
		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
1		0,5444	0,0169	0,3475	0,5576
2		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
		0,1555	0,2335	0,3428	0,3136
Modelo híbrido					
Escenario		Sol-planeta		Planeta-anillo	
		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
1		0,3802	0,0338	0,3180	0,4446
2		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
		0,3468	0,3418	0,3378	0,4448

Los resultados muestran que el cálculo de la longitud de la zona de contacto entre ruedas exteriores con el modelo híbrido es bastante más parejo a los resultados obtenidos en el modelo de elementos finitos, que en el caso del contacto entre ruedas interiores. Además, se puede destacar que en el escenario 1 en el segundo diente donde hay un contacto en el redondeo, la diferencia en los resultado para la longitud de la zona de contacto son muy pequeñas comparadas con los demás contactos estudiados en este trabajo.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han comparado dos alternativas de simulación para una transmisión planetaria simplificada, con el objetivo de establecer la precisión de una formulación Hertziana, como es Weber-Banaschek, en el cálculo de la longitud de contacto entre ruedas dentadas exteriores e interiores. Las



alternativas escogidas para realizar las simulaciones fueron un modelo de elementos finitos y un modelo híbrido plano para resolución de los contactos tanto entre ruedas exteriores como interiores.

En primer lugar se ha validado que el funcionamiento de ambos modelos, desde el punto de vista de las fuerzas de contacto, es comparable con una precisión notable.

Observando las longitudes de las zonas de contacto calculadas con ambos modelos se puede ver que la longitud de la zona de contacto en ruedas exteriores es mucho mayor al calcularse con la formulación Hertziana que la obtenida en el modelo de elementos finitos. Esto se cumple para el escenario de doble contacto entre perfiles de evolvente. En el caso del contacto en evolvente y redondeo esto no es así. La formulación Hertziana empleada sobreestima la longitud de la zona de contacto en contactos entre perfiles de evolvente de ruedas exteriores.

Sin embargo, para el contacto entre ruedas interiores en ambos escenarios se aprecia un grado más alto de similitud entre los resultados de ambos modelos, pero en el contacto en el segundo diente para ambos escenarios se puede observar como el error cometido es más significativo.

El error cometido para el cálculo de la longitud de la zona de contacto entre ruedas exteriores demuestra ser mayor que en el contacto entre ruedas interiores. En el contacto entre ruedas interiores la formulación Hertziana empleada en el modelo híbrido parece ser más precisa y ajustarse mejor a los resultados del modelo de elementos finitos.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia e Innovación que financia el proyecto PID2020-116213RB-I00 en el cual se ha desarrollado esta actividad. Igualmente, Nuno Dourado agradece a la FCT por la financiación concedida en el contexto del “Programa bilateral de Portugal com a Tunísia”. Este trabajo ha sido financiado por la Fundación Portuguesa de Ciencia y Tecnología, dentro del programa nacional de financiación del I+D, más concretamente, a través de los proyectos UIDB/04436/2020 y UIDP/04436/2020.

## REFERENCIAS

- [1] C.G. Cooley, R.G. Parker, “A Review of Planetary and Epicyclic Gear Dynamics and Vibrations Research”, *Applied Mechanics Reviews*, **66**(4), 040804 (2014)
- [2] A. Kahraman, “Dynamic Analysis of a Multi-Mesh Helical Gear Train”, *Journal of Mechanical Design*, **116**(3), 706–712, Sep. (1994)
- [3] A. Kahraman, “Load sharing characteristics of planetary transmissions”, *Mechanism and Machine Theory*, **29**(8), 1151–1165 (1994)
- [4] A. Kahraman, “Natural Modes of Planetary Gear Trains”, *Journal of Sound and Vibration*, **173**(1), 125–130, May (1994)
- [5] P. Velex, L. Flamand, “Dynamic Response of Planetary Trains to Mesh Parametric Excitations”, *Journal of Mechanical Design*, **118**(1), 7 (1996)
- [6] M. Maatar, P. Velex, “An Analytical Expression for the Time-Varying Contact Length in Perfect Cylindrical Gears: Some Possible Applications in Gear Dynamics”, *Journal of Mechanical Design*, **118**(4), 586–589, Dec. (1996)
- [7] W. Bartelmas, R. Zimroz, “A new feature for monitoring the condition of gearboxes in non-stationary operating conditions”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **23**(5), 1528–1534, Jul. (2009)
- [8] F. Chaari, T. Fakhfakh, R. Hbaieb, J. Louati, M. Haddar, “Influence of manufacturing errors on the dynamic behavior of planetary gears”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **27**(7–8), 738–746, Jan. (2006)
- [9] X. Gu, P. Velex, A lumped parameter model to analyse the dynamic load sharing in planetary gears with planet errors, 86 (2011)
- [10] J.I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M.B. Sánchez, “Influence of meshing stiffness on load distribution between planets of planetary gear drives”, *Mechanism and Machine Theory*, 170, November 2021 (2022)

- [11] M.B. Sánchez, M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero, “Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, 139, 506–525 (2019)
- [12] A. Singh, “Load sharing behavior in epicyclic gears: Physical explanation and generalized formulation”, *Mechanism and Machine Theory*, **45**(3), 511–530 (2010)
- [13] V.K. Ambarisha, R.G. Parker, “Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models”, *Journal of Sound and Vibration*, **302**(3), 577–595 (2007)
- [14] J. Brauer, “A general finite element model of involute gears,” *Finite Elements in Analysis and Design*, **40**(13–14), 1857–1872, Aug. (2004)
- [15] T.M. Ericson R. G. Parker, “Experimental measurement and finite element simulation of elastic-body vibration in planetary gears”, *Mechanism and Machine Theory*, 160, 104264, Jun. (2021)
- [16] M.C. Radu, N. Dourado, I.G. Coltun, G. Andrei, “An elastic model for tooth contact analysis of spur gears using FEM simulation”, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **997**(19), 012089, Dec. (2020)
- [17] S. Vijayakar, “A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**(3), 525–545 (1991)
- [18] V. Abousleiman and P. Velex, “A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets”, *Mechanism and Machine Theory*, **41**(6), 725–748 (2006)
- [19] A. Fernandez del Rincon, F. Viadero, M. Iglesias, P. García, R. Sancibrian, “A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions”, *Mechanism and Machine Theory*, 61, 30–58 (2013)
- [20] M. Iglesias, A. Fernandez del Rincon, A. de-Juan, A. Diez-Ibarbia, P. Garcia, F. Viadero, “Advanced model for the calculation of meshing forces in spur gear planetary transmissions”, *Meccanica*, **50**(79), 1869–1894, (2015)
- [21] C. Alessio, D. Park, D. Mundo, T. Tamarozzi, A. Rezayat, “Modal behavior and transient dynamic analysis of a planetary gear train with time-varying mesh stiffness using a multibody model”, *Proceedings of ISMA 2018 - International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD 2018 - International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*, 2577–2591 (2018)
- [22] J. Helsen, F. Vanhollebeke, F. De Coninck, D. Vandepitte, W. Desmet, “Insights in wind turbine drive train dynamics gathered by validating advanced models on a newly developed 13.2MW dynamically controlled test-rig”, *Mechatronics*, **21**(4), 737–752, Jun. (2011)
- [23] F. Viadero, A. Fernández, M. Iglesias, A. De-Juan, E. Liaño, M.A. Serna, “Non-stationary dynamic analysis of a wind turbine power drivetrain: Offshore considerations”, *Applied Acoustics*, 77, 204–211 (2014)
- [24] J. Sanchez-Espiga, A. Fernandez-del-Rincon, M. Iglesias, F. Viadero, “Influence of the phase in planetary gears load sharing and transmission error”, *Mechanisms and Machine Science*, 73, 1059–1067 (2019)
- [25] J. Sanchez-Espiga, A. Fernandez-del-Rincon, M. Iglesias, F. Viadero, “Influence of errors in planetary transmissions load sharing under different mesh phasing”, *Mechanism and Machine Theory*, 153, 104012, Nov. (2020)
- [26] J. Sanchez-Espiga, A. Fernandez-del-Rincon, M. Iglesias, F. Viadero, “Use of sun gear orbits to obtain the load sharing in planetary transmissions and its impact in the tooth load”, *Mechanism and Machine Theory*, 181, October 2022, 105216 (2023)
- [27] A. Bodas, A. Kahraman, “Influence of Carrier and Gear Manufacturing Errors on the Static Load Sharing Behavior of Planetary Gear Sets”, *JSME International Journal Series C*, **47**(39), 908–915 (2004)
- [28] A. Kahraman, “Static Load Sharing Characteristics of Transmission Planetary Gear Sets: Model and Experiment”, *Transmission and Driveline Systems Symposium*, 1, 1–10 (1999)
- [29] A. Fernández-Del-Rincón, M. Iglesias, A. De-Juan, A. Diez-Ibarbia, P. Garcia, F. Viadero, “Gear transmission dynamics: Effects of index and run out errors”, *Applied Acoustics*, 108, 63–83 (2016)
- [30] M. Iglesias, A. Fernandez del Rincon, A. De-Juan, P. Garcia, A. Diez-Ibarbia, and F. Viadero, “Planetary transmission load sharing: Manufacturing errors and system configuration study”, *Mechanism and Machine Theory*, 111, 21–38, May (2017)
- [31] A. Singh, “Application of a System Level Model to Study the Planetary Load Sharing Behavior”, *Journal of Mechanical Design*, **127**(3), 469–476, May (2005)
- [32] A. Hammami, M.I. Santamaria, A.F. Del Rincon, F. Chaari, F.V. Rueda, M. Haddar, “Load Sharing Behavior in Planetary Gear Set”, *Applied Condition Monitoring*, 2, 459–468 (2015)

- [33] X. Liu, Y. Yang, J. Zhang, “Resultant vibration signal model based fault diagnosis of a single stage planetary gear train with an incipient tooth crack on the sun gear”, *Renewable Energy*, 122, 65–79 (2018)
- [34] X. Qiu, Q. Han, F. Chu, “Load-sharing characteristics of planetary gear transmission in horizontal axis wind turbines”, *Mechanism and Machine Theory*, 92, 391–406 (2015)
- [35] J. Liu, R. Pang, S. Ding, X. Li, “Vibration analysis of a planetary gear with the flexible ring and planet bearing fault”, *Measurement*, 165, 108100, Dec. (2020)
- [36] C. Zhang, J. Wei, F. Wang, S. Hou, A. Zhang, T.C. Lim, “Dynamic model and load sharing performance of planetary gear system with journal bearing”, *Mechanism and Machine Theory*, 151, 103898, Sep. (2020)
- [37] K. Weber, C. Banaschek, *The deformation of loaded gears and the effect on their load carrying capacity*, London (1951)
- [38] J. Sanchez-Espiga, A. Fernandez-del-Rincon, M. Iglesias, F. Viadero, “Numerical evaluation of the accuracy in the load sharing calculation using strain gauges: Sun and ring gear tooth root”, *Mechanism and Machine Theory*, 175, 104923, Sep. (2022)
- [39] J. Sanchez-Espiga, A. Fernandez-del-Rincon, M. Iglesias, F. Viadero, “Planetary gear transmissions load sharing measurement from tooth root strains: Numerical evaluation of mesh phasing influence”, *Mechanism and Machine Theory*, 163, 104370, Sep. (2021)

## HERTZIAN CONTACT ANALYSIS IN PLANETARY GEAR TRANSMISSIONS

**Abstract** – This work evaluates the accuracy of the Weber-Banaschek formulation, implemented in a 2D hybrid model, for the resolution of the contact between gears of a planetary transmission. This formulation considers the Hertzian contact between active flanks in external (sun-planet) and internal gears (planet-ring). This approach presents some limitations regarding the resolution of both the external, and internal gear contact. The latter can be characterized as conformal whenever the curvature radii of the contact points are similar, as it happens in the wheel-rail contact. Thus, this analysis involves both contacts. In order to perform this assessment a new 3D finite-element model is developed, which including some geometrical simplifications to reduce the computational effort. Both models simulate analogous meshing scenarios in a planetary transmission with just one planet. The results of both the hybrid and finite element models are compared in terms of the magnitude of the meshing forces and length of the contact area. The contact forces show a significant agreement for all scenarios, while the length of the contact area depicts a better agreement for internal contacts.

**Keywords** – Internal Contact, External Contact, Hertzian Contact, Conformal Contact, Finite Elements.