



MODELO DE REPARTO DE CARGA Y ERROR DE TRANSMISIÓN PARA ENGRANAJES HELICOIDALES CON REBAJE DE PUNTA

J.I. PEDRERO, M. PLEGUEZUELOS, M.B. SÁNCHEZ

Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

Departamento de Mecánica

Juan del Rosal 12, 28040 Madrid, España

(Recibido 15 de septiembre de 2020, para publicación 7 de enero de 2021)

Resumen – El inicio del contacto, en la cabeza del diente conducido, de cada sección transversal de un engranaje helicoidal se produce en condiciones de carga distintas, pues la longitud de la línea de contacto varía con la posición de engrane, por lo que la rigidez de engrane y la carga por unidad de longitud varían de forma congruente. Esto supone una diferente deformación de los dientes y, por tanto, un adelanto del inicio efectivo de contacto distinto para cada sección transversal, lo que inevitablemente se traduce en que un rebaje de punta, cualquiera que sea, sólo será adecuado para absorber esa deformación al inicio del contacto en una -o unas cuantas- secciones transversales, pero será escaso o excesivo en todas las restantes. En este trabajo se presenta un modelo sencillo para el cálculo de la rigidez, el reparto de carga y la deformación en engranajes helicoidales con rebaje de punta, que incluye la simulación del inicio del contacto en las secciones transversales en las que la profundidad de rebaje no se ajusta a las condiciones instantáneas de carga.

Palabras clave – Engranajes helicoidales, rigidez de engrane, reparto de carga, error de transmisión, rebaje de punta.

1. INTRODUCCIÓN

En engranajes de potencia, la deformación de los dientes por efecto de la carga transmitida provoca un retraso de la rueda de salida respecto de su posición conjugada ideal, que se conoce como error de transmisión cuasi-estático [1, 2], y constituye una de las fuentes más importantes del error de transmisión global. Este error de transmisión, que no es uniforme a lo largo del ciclo de engrane, induce fluctuaciones en la velocidad de salida, aceleraciones y deceleraciones en definitiva, que son fuente de carga dinámica y vibraciones [3]. Pero además de esto, el adelanto relativo de la rueda conductora provoca un adelanto del inicio de contacto efectivo al encontrarse la base del diente de la rueda de entrada con la cabeza del diente de la rueda de salida, antes del punto de inicio de contacto teórico, y fuera de la línea de presión. Este contacto prematuro produce un choque que también es fuente adicional de sobrecarga, ruido y vibración. Un fenómeno parecido ocurre al final del engrane, en el que el diente conductor impulsa al diente conducido a lo largo de un pequeño tramo adicional de contacto, igualmente no conjugado [4].

Para hacer frente a este tipo de problemas es habitual recurrir a la modificación del perfil [4, 5]. En efecto, si el inicio del contacto tiende a adelantarse, un rebaje en la cabeza del diente conducido lo volverá a retrasar; y si la profundidad de rebaje es la adecuada, el contacto retornará al punto de inicio de contacto teórico [1, 4], lo que garantizará un inicio de contacto suave. Asimismo, aunque la carga dinámica y las vibraciones debidas al error de transmisión no se pueden eliminar, se pueden sin embargo controlar mediante la elección de la longitud y la forma del rebaje que se aplique [5].

El estudio de la influencia de la modificación del perfil en las condiciones de engrane lleva siendo objeto de estudio desde hace mucho tiempo. Ya en 1965, la *American Gear Manufacturers Association* publicó un documento [6] con algunas consideraciones preliminares, que incluía una serie de recomendaciones para la elección de los parámetros del rebaje. En 1986, Tavakoli y Houser [7] presentaron un algoritmo para minimizar diferentes combinaciones de armónicos del error de transmisión mediante distintas combinaciones de rebajes de punta y de base. En 1990, Lee *et al.* [8] estudiaron la influencia de la modifica-

ción del perfil en engranajes rectos de alto grado de recubrimiento. En 1994, Lin *et al.* [9] estudiaron la influencia de la profundidad y longitud de la modificación de perfil en la carga dinámica de dientes rectos, considerando modificaciones tanto lineales como parabólicas. En 1999, Kahraman y Blankeship [10] estudiaron la respuesta dinámica de engranajes rectos. Ese mismo año, Yildirim y Munro [11, 12] desarrollaron criterios para el diseño de rebajes de perfil para engranajes rectos de alto grado de recubrimiento, e introdujeron un nuevo tipo de rebaje -llamado rebaje doble-, que evita problemas de interferencia.

Otros autores han aplicado el método de los elementos finitos al estudio de la rigidez de engrane, el reparto de carga y el error de transmisión. Beghini *et al.* [13] combinaron análisis 2D por elementos finitos con técnicas de cálculo semi-analíticas para reducir el error de transmisión en engranajes rectos mediante la modificación del perfil. Wang y Howard [14] estudiaron la rigidez de engrane en engranajes rectos de alto grado de recubrimiento. Tesfahunegn *et al.* [15] estudiaron la influencia de la forma del rebaje en las tensiones y el error de transmisión.

Las relaciones entre la rigidez de engrane, el error de transmisión, la respuesta dinámica y la modificación del perfil también han sido objeto de numerosas investigaciones. Vexlex *et al.* [16] demostraron mediante desarrollos teóricos la fuerte dependencia de la fluctuación del error de transmisión con la profundidad, longitud y forma del rebaje del perfil. Ghribi *et al.* [17] estudiaron la optimización de la modificación del perfil mediante la combinación de resultados analíticos y simulaciones numéricas. Bruyere y Vexlex [18] obtuvieron ecuaciones aproximadas del rebaje de perfil que minimiza la fluctuación del error de transmisión cuasi-estático mediante el método de las perturbaciones. Chen y Shao [19] desarrollaron un método de cálculo de la rigidez de engrane y del reparto de carga para dientes con perfil modificado. Bruyere *et al.* [20] presentaron formulaciones analíticas de la profundidad y longitud de rebaje, para modificaciones de perfil simétricas que minimizan la fluctuación del error de transmisión cuasi-estático de engranajes de pequeño ancho de cara, y Vexlex *et al.* [21] desarrollaron una formulación alternativa para engranajes rectos de alto grado de recubrimiento. Ghosh y Chakraborty [22] estudiaron la influencia de la modificación del perfil en la reducción del nivel de ruido y vibración.

Recientemente, Díez-Ibarbia *et al.* [23, 24] estudiaron el reparto de carga en engranajes rectos con modificación de perfil en uno o ambos dientes. Ma *et al.* [25, 26] y Sun *et al.* [27] desarrollaron métodos de cálculo de la rigidez de engrane para engranajes rectos y helicoidales. Wen *et al.* [28] combinaron modelos de elementos finitos con el modelo de Hertz para evaluar la tensión de contacto a lo largo del intervalo de modificación.

Los autores han desarrollado un modelo analítico simple para el error de transmisión cuasi-estático [2, 4, 5] para engranajes rectos estándar y de alto grado de recubrimiento, que tiene en cuenta las modificaciones del perfil. Está basado en la variación de la rigidez de engrane a lo largo del intervalo de engrane, obtenida en trabajos anteriores [29-31], que proporciona ecuaciones analíticas sencillas para el reparto de carga, con las que a su vez se han desarrollado modelos de cálculo resistente a rotura en la base y a picadura, para engranajes rectos y helicoidales, incluyendo los de alto grado de recubrimiento transversal [32-35].

También se ha desarrollado un modelo de reparto de carga y error de transmisión para engranajes rectos en condiciones de carga no nominales [36]. Es evidente que, si la profundidad de rebaje se calcula para desplazar el punto de inicio de contacto efectivo hasta el punto de inicio de contacto teórico, el resultado sólo será válido para una determinada deformación de los restantes dientes en contacto -es decir, para un determinado ángulo de retraso de la rueda conducida-, lo que sólo ocurre para una determinada carga, que será, normalmente, la carga nominal. Si el rebaje fuera menor -o si la carga fuera mayor-, el inicio del contacto se retrasaría, pero menos de lo necesario para situarse el punto teórico, por lo que se producirá choque al inicio del engrane. Si el rebaje fuera mayor, o la carga menor, el inicio del contacto se produciría después del punto teórico, sin choque significativo, pero con reducción del grado de recubrimiento efectivo.

Esta consideración, que puede tener alguna relevancia en el caso de engranajes rectos, es en cambio decisiva para el estudio del contacto en engranajes helicoidales. En efecto, en cada punto del ciclo de engrane, la línea de contacto tiene una longitud y una ubicación específicas, de manera que las condiciones de carga sobre cada una de las secciones transversales del diente son también diferentes. Y, en consecuencia, la mayor parte de las secciones transversales iniciarán su engrane con unas condiciones de carga diferen-

tes de aquéllas para las que se calculó el rebaje. En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo para la simulación del reparto de carga y el error de transmisión en engranajes helicoidales con modificación de perfil. Se analiza el inicio y la finalización del engrane en cada sección transversal, así como el grado de recubrimiento transversal efectivo en cada una, y se representa la variación de la fuerza por unidad de espesor que actúa sobre la sección durante su intervalo de engrane completo. Se estudia también la influencia de los grados de recubrimiento transversal y en el salto.

2. MODELO DE RIGIDEZ Y REPARTO DE CARGA PARA ENGRANAJES RECTOS

Se describe en este apartado, de forma somera, el modelo de rigidez, reparto de carga y deformación, para engranajes rectos, que servirá de fundamento al modelo que se presenta para engranajes helicoidales. Una presentación detallada se puede encontrar en [4, 5, 36].

De modo aproximado, la rigidez de engrane de una pareja de dientes rectos se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 K_M(\xi) &= K_{M\max} \cos\left(b_0 \frac{\varepsilon_\alpha}{2}\right) & \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_m \\
 K_M(\xi) &= K_{M\max} \cos\left(b_0(\xi - \xi_m)\right) & \xi_m \leq \xi \leq \xi_o \\
 K_M(\xi) &= K_{M\max} \cos\left(b_0 \frac{\varepsilon_\alpha}{2}\right) & \xi_o \leq \xi \leq \xi_{\max}
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \left[\frac{1}{2} \left(1,11 + \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \right)^2 - 1,17 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 \xi_m &= \xi_{in} + \frac{\varepsilon_\alpha}{2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

siendo ε_α el grado de recubrimiento trasversal. El parámetro ξ define el punto de contacto en la línea de engrane, y su valor viene determinado por:

$$\xi = \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1} \tag{3}$$

donde Z_1 , r_{c1} y r_{b1} representan el número de dientes, el radio de base y el radio del punto de contacto de la rueda conductora. Los puntos ξ_{in} y ξ_o representan los límites inferior y superior del intervalo de engrane teórico; ξ_{\min} y ξ_{\max} los del intervalo de engrane efectivo, es decir, incluyendo los intervalos de engrane adicionales ocasionados por el adelanto del inicio del contacto y el retraso de la finalización del mismo,

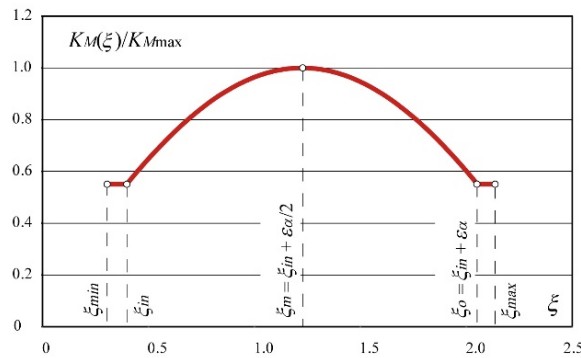


Fig. 1. Curva de rigidez de engrane de una pareja de dientes rectos.

debidos a las deformaciones de los dientes [4, 5]. La Fig. 1 representa la curva de variación de la rigidez a lo largo de la línea de engrane. De esta definición de ξ se puede concluir que los parámetros correspondientes a los límites del intervalo de engrane teórico ξ_{in} y ξ_o , y los correspondientes a dos dientes en contacto simultáneo $\xi_{(i)}$ y $\xi_{(j)}$, están relacionados por:

$$\begin{aligned} \xi_o &= \xi_{in} + \varepsilon_\alpha \\ \xi_{(i)} &= \xi_{(j)} + (i - j) \end{aligned} \tag{4}$$

A partir de la curva de rigidez así definida, la curva de reparto de carga teórica se puede obtener como:

$$R(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_T} = \frac{K_M(\xi)}{\sum_j K_M(\xi)} \tag{5}$$

donde K_M se considera extendida únicamente sobre el intervalo de engrane teórico, y el sumatorio se extiende a todas las parejas de dientes en contacto simultáneo. De acuerdo con esa distribución de carga teórica, la deformación de la pareja de dientes sería:

$$\delta_i(\xi) = \frac{F_i(\xi)}{K_{Mi}(\xi)} = \frac{F_T}{\sum_j K_M(\xi)} = \delta(\xi) \tag{6}$$

Se puede observar que el término de la derecha no depende de i , de donde se puede concluir que la deformación de la pareja de dientes, en un instante dado, es la misma para todas las parejas en contacto en ese instante; y que, por tanto, esa deformación, se puede describir como un retraso angular de la rueda de salida respecto de la rueda de entrada. Este retraso, que no es uniforme a lo largo del ciclo de engrane - puesto que no depende de i pero sí de ξ - es lo que origina el error de transmisión cuasi-estático.

Pero, como se ha indicado más arriba, ese retraso relativo induce también un adelanto del inicio efectivo del contacto, y un retraso de la finalización efectiva. La Fig. 2 ilustra el adelanto del inicio. Por efecto de la carga, la rueda de salida se retrasa un ángulo φ_2 respecto de la de entrada, de forma que el perfil del diente conducido, que teóricamente habría de pasar por el punto d , pasa en realidad por el punto c . Como la deformación es la misma para todas las parejas de dientes en ese instante, el perfil del diente conducido de la pareja siguiente (o su prolongación, como en este caso), que debería pasar por el punto b , pasa en realidad por el punto a , de forma que las longitudes de los segmentos ab y cd son iguales.

En el detalle de la derecha se aprecia cómo ese retraso ab provoca un adelanto del inicio efectivo del

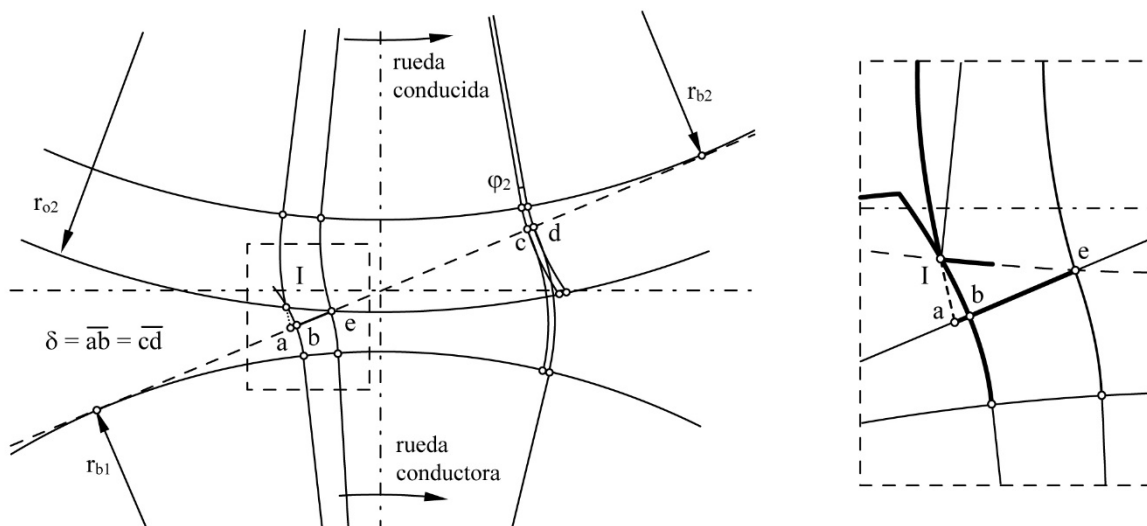


Fig. 2. Deformaciones inducidas por la carga.

contacto en el punto I , en el que la base del diente conductor choca con la cabeza del diente conducido, fuera de la línea de engrane y antes del punto de inicio de contacto teórico e . Obviamente, la longitud del intervalo de engrane adicional es la longitud del segmento be , mucho mayor que la deformación de los dientes ab , y el punto b estaría caracterizado por el valor del parámetro ξ_{\min} , según la nomenclatura adoptada. La relación entre las longitudes de los segmentos ab y ae se puede obtener por consideraciones geométricas, como se describe en [4, 5].

En el interior del intervalo adicional de engrane, y admitiendo que el retraso relativo entre el diente conducido y el conductor se mantiene igual en todas las parejas en contacto simultáneo, la pareja de dientes se deforma menos que las restantes, pues parte del desplazamiento relativo se emplea en acercar los dientes hasta que se toquen. Así, en el punto b , la distancia que se han de aproximar para contactar es ab , y la deformación de la pareja en ese instante es nula. En el punto e ocurre al revés, la distancia que se han de aproximar para contactar es nula, y la deformación será igual a la deformación de las restantes parejas. En general, si se designa por $\delta(\xi)$ el desplazamiento relativo de los dientes medido en la línea de engrane, y por $\delta_G(\xi)$ la distancia que se han de aproximar para iniciar el contacto, la deformación de la pareja de dientes será la diferencia $\delta(\xi) - \delta_G(\xi)$, y la fuerza que transmite la pareja de dientes cualquiera j será:

$$F_j(\xi) = K_{M_j}(\xi)(\delta(\xi) - \delta_{G_j}(\xi)) = K_M(\xi + j)(\delta(\xi) - \delta_G(\xi + j)) \quad (7)$$

donde, de modo muy aproximado,

$$\begin{aligned} \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-in} r_{b1} (\xi_{in} - \xi)^2 & \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{in} \\ \delta_G(\xi) &= 0 & \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_o \\ \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-o} r_{b1} (\xi - \xi_o)^2 & \xi_o \leq \xi \leq \xi_{\max} \end{aligned} \quad (8)$$

La obtención de las ecuaciones (8) y el cálculo de los coeficientes C_{p-in} y C_{p-o} se pueden encontrar en [4, 5]. De acuerdo con la ecuación (7), la fuerza total transmitida será:

$$F_T = \sum_j K_M(\xi + j)(\delta(\xi) - \delta_G(\xi + j)) \quad (9)$$

de donde la distancia de acercamiento relativo resulta ser:

$$\delta(\xi) = \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)\delta_G(\xi + j)}{\sum_j K_M(\xi + j)} \quad (10)$$

y el error de transmisión cuasi-estático:

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\delta(\xi)}{r_{b2}} = \frac{1}{r_{b2}} \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)\delta_G(\xi + j)}{\sum_j K_M(\xi + j)} \quad (11)$$

La fuerza transmitida por una pareja de dientes y la curva de reparto de carga se obtienen reemplazando la ecuación (10) en la ecuación (9):

$$R(\xi) = \frac{K_M(\xi)}{\sum_j K_M(\xi + j)} \left(1 + \frac{\sum_j K_M(\xi + j)(\delta_G(\xi + j) - \delta_G(\xi))}{F_T} \right) \quad (12)$$

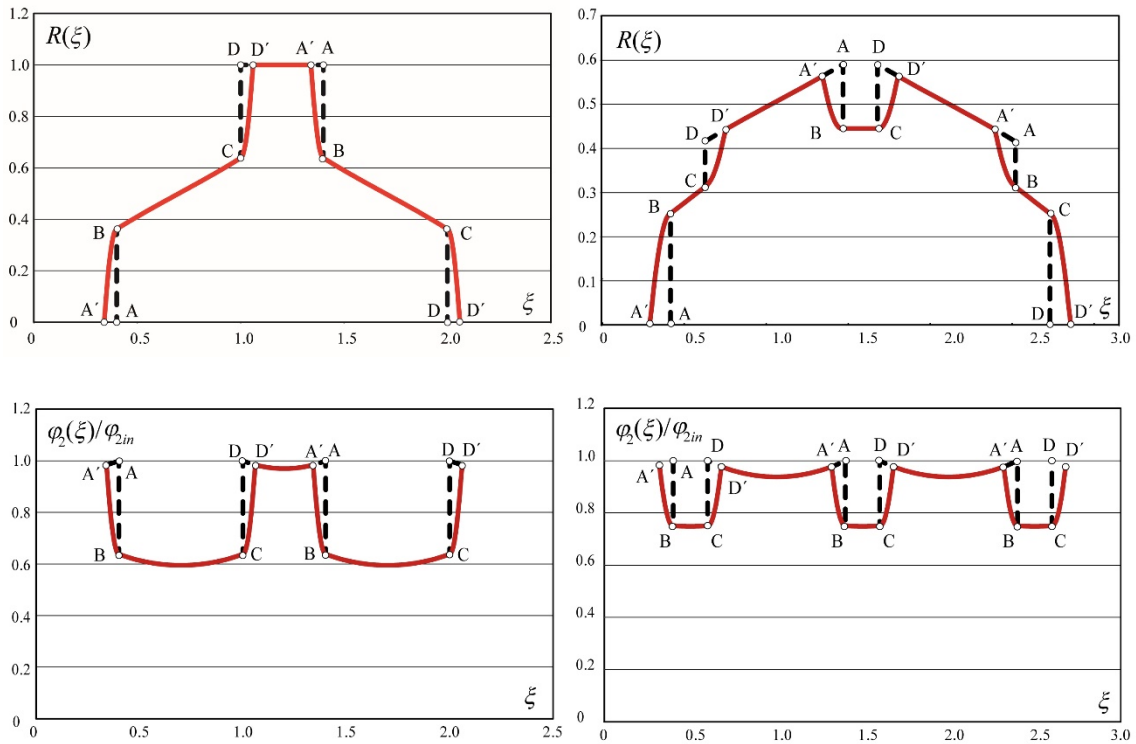


Fig. 3. Aproximación teórica (línea de trazos) y de contacto extendido (línea continua) de las funciones de reparto de carga (arriba) y de error de transmisión (abajo), para engranajes rectos convencionales (izquierda) y de alto grado de recubrimiento (derecha).

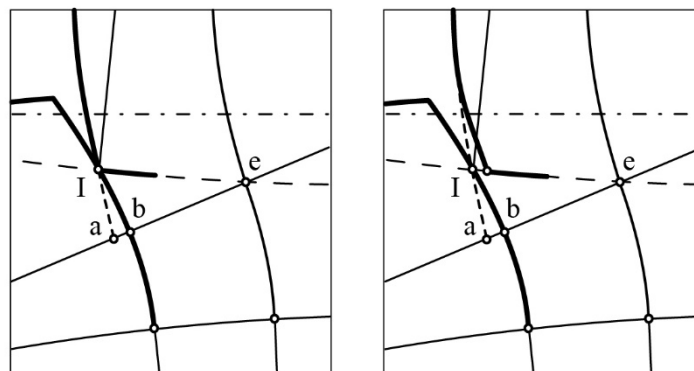


Fig. 4. Retraso del inicio del contacto por el rebaje de perfil.

La Fig. 3 representa las curvas de reparto de carga y de error de transmisión, teóricas y con contacto extendido, para engranajes convencionales y de alto grado de recubrimiento. Las curvas teóricas de los diagramas -en línea de trazos- se han obtenido con las ecuaciones (5) y (6); las de contacto extendido -en línea continua- con las ecuaciones (10) y (12).

Como se indicó más arriba, el choque entre dientes al inicio del engrane se puede evitar mediante el rebaje del perfil en la cabeza del engrane conducido. La Fig. 4 muestra el efecto del rebaje: en el punto *I* deja de existir contacto, y el inicio del contacto se desplaza a la derecha. Si la profundidad de rebaje es la adecuada, el inicio del contacto se desplazará justamente hasta el punto *e*.

En general, la función de rebaje también se puede expresar en función del parámetro de contacto a lo largo de la línea de engrane, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-in} & \xi_{\min} < \xi \leq \xi_{in} \\
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-in} \left(1 - \frac{\xi - \xi_{in}}{\Delta \xi_{R-in}}\right)^{z_{in}} & \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_{in} + \Delta \xi_{R-in} \\
 \delta_R(\xi) &= 0 & \xi_{in} + \Delta \xi_{R-in} \leq \xi \leq \xi_o - \Delta \xi_{R-o} \\
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-o} \left(1 - \frac{\xi_o - \xi}{\Delta \xi_{R-o}}\right)^{z_o} & \xi_o - \Delta \xi_{R-o} \leq \xi \leq \xi_o \\
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-o} & \xi_o \leq \xi \leq \xi_{\max}
 \end{aligned} \tag{13}$$

donde δ_{R-in} y δ_{R-o} son las profundidades de rebaje a la entrada y a la salida, $\Delta \xi_{R-in}$ y $\Delta \xi_{R-o}$ las longitudes de rebaje, y z_{in} y z_o los exponentes de la forma de rebaje, normalmente iguales a 1 o 2, e iguales entre sí.

En este caso, la fuerza sobre una pareja de dientes j será:

$$F_j(\xi) = K_{Mj}(\xi)(\delta(\xi) - \delta_{Gj}(\xi) - \delta_{Rj}(\xi)) = K_M(\xi + j)(\delta(\xi) - \delta_G(\xi + j) - \delta_R(\xi + j)) \tag{14}$$

puesto que a la deformación anterior hay que restarle ahora la profundidad de rebaje en el punto considerado. Siguiendo un procedimiento idéntico al anterior:

$$F_T = \sum_j K_M(\xi + j)(\delta(\xi) - \delta_G(\xi + j) - \delta_R(\xi + j)) \tag{15}$$

$$\delta(\xi) = \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j))}{\sum_j K_M(\xi + j)} \tag{16}$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\delta(\xi)}{r_{b1}} = \frac{1}{r_{b1}} \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j))}{\sum_j K_M(\xi + j)} \tag{17}$$

$$R(\xi) = \frac{K_M(\xi)}{\sum_j K_M(\xi + j)} \left(1 + \frac{\sum_j K_M(\xi + j)(\delta_G(\xi + j) - \delta_G(\xi) + \delta_R(\xi + j) - \delta_R(\xi))}{F_T} \right) \tag{18}$$

La Fig. 5 representa las curvas de reparto de carga y de error de transmisión para un engranaje recto de grado de recubrimiento convencional, con modificación de perfil en uno o ambos extremos del intervalo de engrane. Las curvas teóricas de los diagramas -en línea de trazos- se han obtenido con las ecuaciones (5) y (6); las de contacto extendido -en línea de puntos- con las ecuaciones (10) y (12), y las de perfil con rebaje -en línea continua- con las ecuaciones (16) y (18). La profundidad de rebaje se ha escogido de forma que el punto de inicio de contacto efectivo se traslade exactamente al punto de inicio de contacto teórico, y la forma del rebaje la correspondiente a una modificación lineal.

Finalmente, la Fig. 6 muestra las curvas de reparto de carga y de error de transmisión cuasi-estático de un engranaje recto con modificación de perfil asimétrica, de profundidad de rebaje menor que la ajustada a la carga, a la entrada del intervalo de engrane, y mayor a la salida. Se observa que a la entrada, el intervalo de engrane se sigue alargando (aunque en menor cantidad que en el diente sin rebaje), y que a la salida se acorta, reduciendo el grado de recubrimiento efectivo. Estas curvas se obtienen también a partir de las ecuaciones (16) y (18), pero teniendo siempre en cuenta que la fuerza en cada pareja, descrita por la ecuación (15) nunca puede ser negativa, de forma que, en cada momento, los sumatorios están extendidos a las parejas de dientes que verifican:

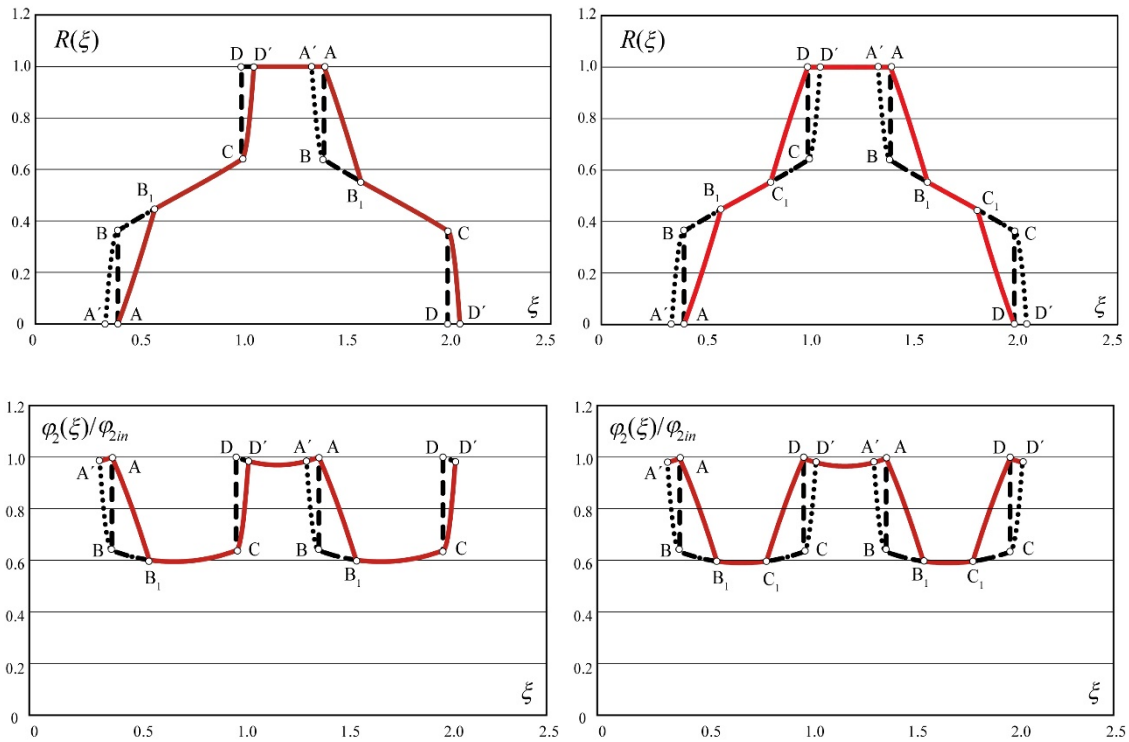


Fig. 5. Curvas de reparto de carga y error de transmisión cuasi-estático de engranajes rectos con modificación lineal de perfil asimétrica (izquierda) y simétrica (derecha), de profundidad ajustada.

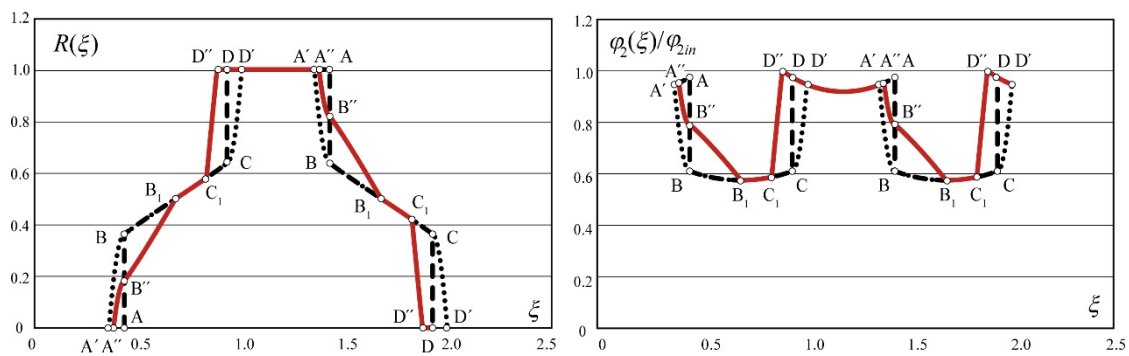


Fig. 6. Curvas de reparto de carga y error de transmisión cuasi-estático de engranajes rectos con modificación lineal de perfil, de profundidad menor (al inicio) y mayor (a la finalización) que la ajustada a la carga.

$$\delta(\xi) - \delta_G(\xi + j) - \delta_R(\xi + j) \geq 0 \tag{19}$$

pues de lo contrario, obviamente, no estarían en contacto.

3. MODELO DE RIGIDEZ Y REPARTO DE CARGA PARA ENGRANAJES HELICOIDALES

Todo lo expuesto hasta ahora para engranajes rectos, es aplicable a engranajes helicoidales si se consideran sus secciones transversales como una sucesión de engranajes rectos de espesor diferencial, cada uno de los cuales se sitúa con un giro relativo respecto del anterior. En efecto, es sabido que el perfil del diente

te en la sección transversal es una evolvente de circunferencia, cuyo radio de base depende del ángulo de hélice, al que por tanto se pueden aplicar todas las ecuaciones de los engranajes rectos. Sin embargo, existe una diferencia sumamente importante, y es que mientras el ciclo de carga de todos los dientes de un engranaje recto es idéntico (es decir, todos tienen la misma carga al inicio el engrane, todos la misma en el punto medio del intervalo, todos la misma al final, etc.), no sucede lo mismo en las distintas secciones transversales de un engranaje helicoidal. Ello es debido a que la longitud y posición de la línea de engrane varía continuamente, y la carga se distribuye de modo diferente en cada punto del ciclo de engrane. Consecuencia de ello es que nunca un rebaje del perfil podrá tener la profundidad ajustada a todas las secciones transversales, lo que habrá de tenerse en cuenta en el modelo.

Para trabajar con engranajes de ancho de cara diferencial, se va a introducir un cambio en la nomenclatura. Se puede comprobar con facilidad [4, 5] que la amplitud de variación de la rigidez de la pareja de dientes K_{Mmax} es proporcional al ancho de cara b , de tal manera que se puede hacer:

$$K_{Mmax} = K'_{Mmax} b \tag{20}$$

donde K'_{Mmax} no depende del ancho de cara. Asimismo, se ha de hacer constar que, para las secciones transversales de engranajes helicoidales, el cálculo de b_0 y ξ_m se ha de hacer a partir del grado de recubrimiento ficticio ε^*_α , correspondiente a un engranaje idéntico, pero con altura de cabeza $h_a/\cos\beta$. El procedimiento y sus fundamentos se explican con profundidad en [30]. Por último, para simplificar las ecuaciones, se introducirá el concepto de rigidez normalizada $K(\xi)$, definida como:

$$K(\xi) = \frac{K_M(\xi)}{K_{Mmax}} \tag{21}$$

3.1. Rigidez en el intervalo de contacto teórico

Para el contacto teórico, la rigidez normalizada viene dada por:

$$\begin{aligned} K_{th}(\xi) &= 0 & \xi < \xi_{in} \\ K_{th}(\xi) &= \cos b_0 (\xi - \xi_m) & \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_o \\ K_{th}(\xi) &= 0 & \xi_o < \xi \end{aligned} \tag{22}$$

de manera que la fuerza transmitida por cada sección transversal es:

$$F(\xi, \xi_0) = \frac{K_M(\xi)}{\sum K_M(\xi)} F_T = \frac{K'_{Mmax} K_{th}(\xi) db}{\int_{l_{c-th}(\xi_0)} K'_{Mmax} K_{th}(\xi) db} F_T \tag{23}$$

donde ξ_0 corresponde al parámetro ξ de la sección transversal de referencia, que se hace coincidir con la primera sección transversal del diente en empezar a contactar (una de las dos secciones extremas, dependiendo del sentido de la hélice). El parámetro ξ_0 identifica, por tanto, la posición de engrane. La integral del denominador se extiende a lo largo de la línea de contacto teórica, designada con l_c , que obviamente será función de ξ_0 . Si se tiene en cuenta que [29-30]:

$$d\xi = \frac{\varepsilon_\beta}{b} db \tag{24}$$

la ecuación anterior se puede expresar como:

$$F(\xi, \xi_0) = \frac{K_{th}(\xi) db}{\frac{b}{\varepsilon_\beta} \int_{l_{c-th}(\xi_0)} K_{th}(\xi) d\xi} F_T \tag{25}$$

que representa la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto (cada uno de cuyos puntos está caracterizado por un ξ), en una posición de engrane genérica, caracterizada por ξ_0 .

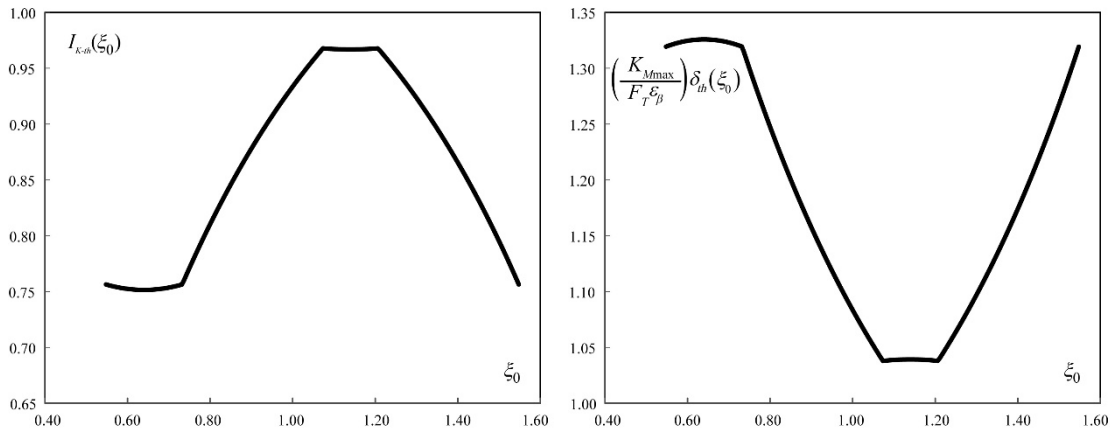


Fig. 7. Curvas de rigidez (izquierda) y de error de transmisión cuasi-estático (derecha) según el modelo de contacto teórico, de un engranaje helicoidal de $\varepsilon_\alpha = 1,525$ y $\varepsilon_\beta = 0,659$.

La integral del denominador se designará por $I_K(\xi_0)$. En el caso del contacto teórico se puede calcular con facilidad, y se expresa en función de los grados de recubrimiento transversal y en el salto, ε_α y ε_β , y de las partes enteras de los grados de recubrimiento transversal y total, E_α y E_γ , respectivamente:

$$I_{K-th}(\xi_0) = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_{jinf}}^{\xi_{jsup}} \cos b_0(\xi - \xi_m) d\xi = \frac{1}{b_0} \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} (\text{sen } b_0(\xi_{jsup} - \xi_m) - \text{sen } b_0(\xi_{jinf} - \xi_m)) \tag{26}$$

con:

$$\begin{aligned} \xi_{jsup} &= \xi_m + (\xi_0 + j) + \xi_o - \min(\xi_{in}, (\xi_0 + j)) - \max((\xi_0 + j), \xi_o) \\ \xi_{jinf} &= \xi_m + (\xi_0 + j - \varepsilon_\beta) + \xi_o - \min(\xi_{in}, (\xi_0 + j - \varepsilon_\beta)) - \max((\xi_0 + j - \varepsilon_\beta), \xi_o) \end{aligned} \tag{27}$$

Como antes, la deformación de la pareja de secciones transversales verifica:

$$F(\xi, \xi_0) = K'_{Mmax} db K_{th}(\xi) \delta(\xi, \xi_0) \tag{28}$$

y, sustituyendo en la ecuación (25), resulta:

$$\delta(\xi, \xi_0) = \frac{F_T}{\frac{K'_{Mmax} b}{\varepsilon_\beta} \int_{l_{c-th}(\xi_0)} K_{th}(\xi) d\xi} = \frac{F_T \varepsilon_\beta}{K_{Mmax}} \frac{1}{I_{K-th}(\xi_0)} = \delta(\xi_0) \tag{29}$$

Como en el caso anterior, también ahora la deformación es la misma para todas las secciones transversales en contacto (pues δ no depende de ξ , sino únicamente de ξ_0), de manera que también ahora se puede hablar de un ángulo de retraso de la rueda de salida y, consecuentemente, del error de transmisión cuasi-estático. Por esta misma razón, se puede hablar también de una rigidez de engrane de la pareja de engranajes helicoidales, en cada punto del intervalo de engrane; la cual, por la propia definición de rigidez, vendrá dada por:

$$K_M(\xi_0) = \frac{F_T}{\delta(\xi_0)} = \frac{K_{Mmax}}{\varepsilon_\beta} I_{K-th}(\xi_0) \tag{30}$$

La función I_K describe, por tanto, la rigidez de engrane del engranaje helicoidal, y se la puede denominar rigidez de engrane normalizada. La Fig. 7 representa la función $I_{K-th}(\xi_0)$ -proporcional a la rigidez- y la deformación $\delta(\xi_0)$ -proporcional al error de transmisión cuasi-estático e inversamente proporcional a la

rigidez-, para un engranaje helicoidal de grado de recubrimiento transversal 1,525 y grado de recubrimiento en el salto 0,659.

3.2. Rigidez en el intervalo de contacto extendido

Ahora, la rigidez de la pareja de secciones transversales es:

$$\begin{aligned}
 K_{ex}(\xi) &= \cos b_0 (\xi_{in} - \xi_m) & \xi_{min} < \xi \leq \xi_{in} \\
 K_{ex}(\xi) &= \cos b_0 (\xi - \xi_m) & \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_o \\
 K_{ex}(\xi) &= \cos b_0 (\xi_o - \xi_m) & \xi_o \leq \xi \leq \xi_{max}
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

y la distancia de acercamiento para el inicio del contacto en el intervalo de engrane adicional:

$$\begin{aligned}
 \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 r_{b1} C_{p-in} (\xi_{in} - \xi)^2 & \xi_{min} < \xi \leq \xi_{in} \\
 \delta_G(\xi) &= 0 & \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_o \\
 \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 r_{b1} C_{p-o} (\xi - \xi_o)^2 & \xi_o \leq \xi \leq \xi_{max}
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

en la que C_{p-in} y C_{p-o} se calculan como antes, y ξ_{min} y ξ_{max} se determinan teniendo en cuenta que sus δ_G correspondientes describirían lo que se habría de deformar el engranaje en esa posición -es decir, $\delta(\xi_0)$ - para que el contacto empezara y terminara ξ_{min} y ξ_{max} . Y aunque $\delta(\xi_0)$ todavía no es conocido, es admisible utilizar el valor de $\delta_{th}(\xi_0)$, pues resulta congruente con la definición de rigidez; de manera que se tiene:

$$\begin{aligned}
 \xi_{min} &= \xi_{in} - \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_0)}{r_{b1} C_{p-in}}} = \xi_{min}(\xi_0) \\
 \xi_{max} &= \xi_o + \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_0)}{r_{b1} C_{p-o}}} = \xi_{max}(\xi_0)
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Se puede apreciar que ξ_{min} y ξ_{max} son ahora funciones de ξ_0 . La Fig. 8 representa la variación de ξ_{min} y ξ_{max} a lo largo del ciclo de engrane del engranaje helicoidal del ejemplo anterior. De acuerdo con ello, la fuerza sobre una sección transversal es:

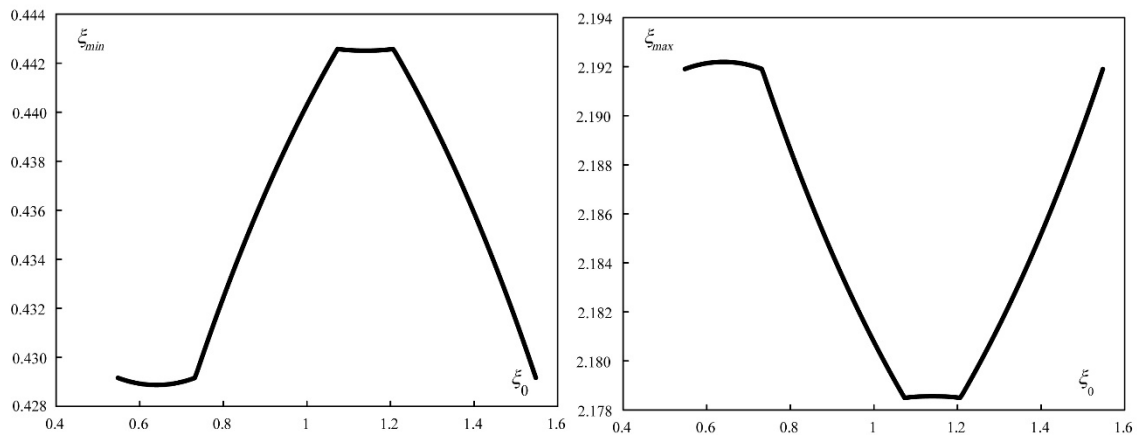


Fig. 8. Límites inferior (izquierda) y superior (derecha) del intervalo de contacto extendido en cada posición de engrane, de un engranaje helicoidal de $\epsilon_\alpha = 1,525$ y $\epsilon_\beta = 0,659$.

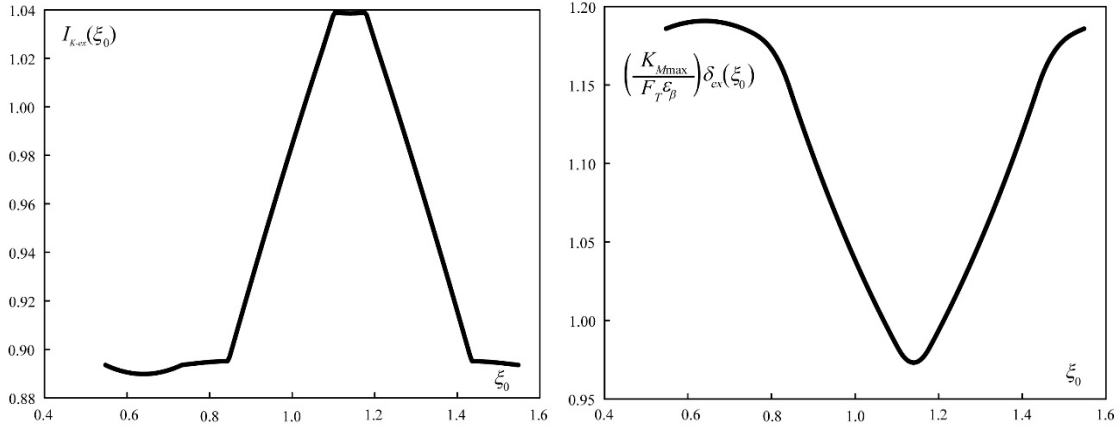


Fig. 9. Curvas de la función I_K (izquierda) y del error de transmisión cuasi-estático (derecha) según el modelo de contacto extendido, de un engranaje helicoidal de $\varepsilon_\alpha = 1,525$ y $\varepsilon_\beta = 0,659$.

$$F(\xi, \xi_0) = K'_{M \max} dbK_{th}(\xi) [\delta(\xi_0) - \delta_G(\xi)] \tag{34}$$

que integrada a lo largo de la línea de contacto extendida, resulta:

$$\delta(\xi_0) = \frac{\frac{\varepsilon_\beta F_T}{K_{M \max}} + \int_{l_{c-ex}(\xi_0)} K(\xi) \delta_G(\xi) d\xi}{\int_{l_{c-ex}(\xi_0)} K(\xi) d\xi} = \frac{\frac{\varepsilon_\beta F_T}{K_{M \max}} + \int_{l_{c-ex}(\xi_0)} K_{ex}(\xi) \delta_G(\xi) d\xi}{I_{K-ex}} \tag{35}$$

expresión que, sustituida en la ecuación (34), proporciona la distribución de carga a lo largo de la línea de contacto. El cálculo de I_{K-ex} es algo más complicado que el de I_{K-th} , pero se puede plantear del mismo modo:

$$I_{K-ex}(\xi_0) = \int_{l_{c-ex}(\xi_0)} K_{ex}(\xi) d\xi = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_0+j-\varepsilon_\beta}^{\xi_0+j} K_{ex}(\xi) d\xi = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_{jinf}}^{\xi_{jsup}} K_{ex}(\xi) d\xi \tag{36}$$

con:

$$\begin{aligned} \xi_{jsup} &= \xi_{min} + (\xi_0 + j) + \xi_{max} - \min(\xi_{min}, (\xi_0 + j)) - \max((\xi_0 + j), \xi_{max}) \\ \xi_{jinf} &= \xi_{min} + (\xi_0 + j - \varepsilon_\beta) + \xi_{max} - \min(\xi_{min}, (\xi_0 + j - \varepsilon_\beta)) - \max((\xi_0 + j - \varepsilon_\beta), \xi_{max}) \end{aligned} \tag{37}$$

La integral del numerador se puede plantear descomponiendo en los mismos intervalos que la anterior:

$$\int_{l_{c-ex}(\xi_0)} K_{ex}(\xi) \delta_G(\xi) d\xi = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_0+j-\varepsilon_\beta}^{\xi_0+j} K_{ex}(\xi) \delta_G(\xi) d\xi = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_{jinf}}^{\xi_{jsup}} K_{ex}(\xi) \delta_G(\xi) d\xi \tag{38}$$

En la Fig. 9 se muestran las curvas de $I_{K-ex}(\xi_0)$ y $\delta(\xi_0)$ del modelo de contacto extendido para el engranaje helicoidal del ejemplo anterior.

3.3. Dientes con modificación de perfil

En el caso de dientes con rebaje de perfil, la fuerza sobre una sección transversal viene dada por:

$$F(\xi, \xi_0) = K'_{M \max} dbK_{ex}(\xi) [\delta(\xi_0) - \delta_R(\xi) - \delta_G(\xi)] \tag{39}$$

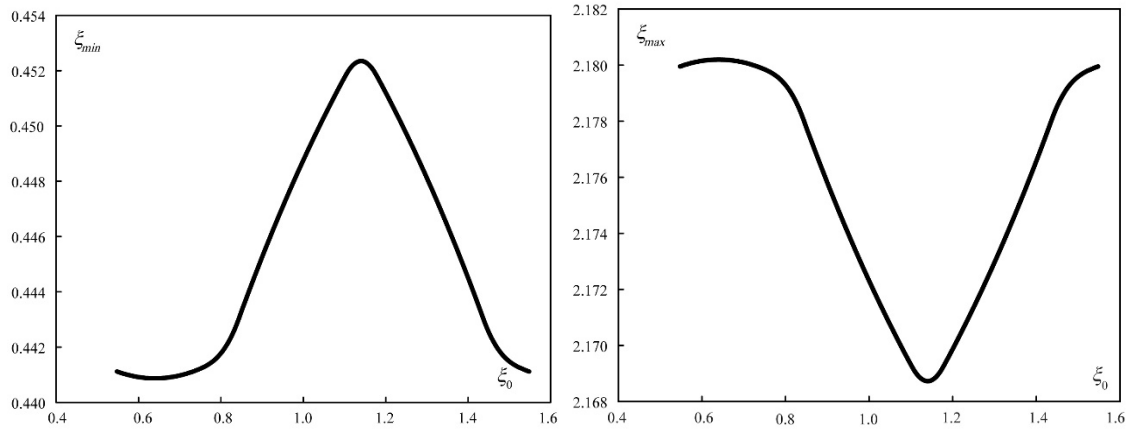


Fig. 10. Límites inferior (izquierda) y superior (derecha) del intervalo de contacto extendido en cada posición de engrane, de un engranaje helicoidal de $\varepsilon_\alpha = 1,525$ y $\varepsilon_\beta = 0,659$ con rebaje simétrico de longitud $\Delta\xi_{R-in} = \Delta\xi_{R-o} = 0,2$ y profundidad $\delta_{R-in} = \delta_{R-o} = 0,119$.

donde $K_{ex}(\xi)$ y $\delta_G(\xi)$ se definieron en el apartado anterior, y $\delta_R(\xi)$ como se definió para engranajes rectos:

$$\begin{aligned}
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-in} & \xi_{min} < \xi \leq \xi_{in} \\
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-in} \left(1 - \frac{\xi - \xi_{in}}{\Delta\xi_{R-in}}\right)^{z_{in}} & \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_{in} + \Delta\xi_{R-in} \\
 \delta_R(\xi) &= 0 & \xi_{in} + \Delta\xi_{R-in} \leq \xi \leq \xi_o - \Delta\xi_{R-o} \\
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-o} \left(1 - \frac{\xi_o - \xi}{\Delta\xi_{R-o}}\right)^{z_o} & \xi_o - \Delta\xi_{R-o} \leq \xi \leq \xi_o \\
 \delta_R(\xi) &= \delta_{R-o} & \xi_o \leq \xi \leq \xi_{max}
 \end{aligned} \tag{40}$$

Como siempre, la ecuación (39) es válida siempre que $\alpha(\xi_0) - \delta_R(\xi) - \delta_G(\xi) > 0$, pues en caso contrario no habría contacto, y la fuerza sería nula, pero nunca negativa. De nuevo eso se traduce en que los límites del intervalo efectivo de contacto varían con la posición de engrane, o lo que es lo mismo son funciones de ξ_0 , que se habrán de calcular buscando los valores de ξ que son soluciones de la ecuación:

$$\delta_{RG}(\xi) = \delta_{ex}(\xi_0) \tag{41}$$

para cada valor de ξ_0 . El resultado para el engranaje helicoidal del ejemplo anterior, con rebaje lineal en ambos extremos de longitud $\Delta\xi_{R-in} = \Delta\xi_{R-o} = 0,2$ y profundidad $\delta_{R-in} = \delta_{R-o} = 0,119$, se muestra en la Fig. 10. Una vez conocidos $\xi_{min-ef}(\xi_0)$ y $\xi_{max-ef}(\xi_0)$, la deformación se calcula con:

$$\delta(\xi_0) = \frac{\frac{\varepsilon_\beta F_T}{K_{M \max}} + \int_{l_{c-ef}(\xi_0)} K_{ex}(\xi) (\delta_G(\xi) + \delta_R(\xi)) d\xi}{\int_{l_{c-ef}(\xi_0)} K_{ex}(\xi) d\xi} \tag{42}$$

donde las integrales se pueden descomponer de la misma manera que antes:

$$\begin{aligned}
 I_{K-ex}(\xi_0) &= \int_{l_{c-ex}(\xi_0)} K_{ex}(\xi) d\xi = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_0 + j - \varepsilon_\beta}^{\xi_0 + j} K_{ex}(\xi) d\xi = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_{jinf}}^{\xi_{jsup}} K_{ex}(\xi) d\xi \\
 \int_{l_{c-ex}(\xi_0)} K_{ex}(\xi) \delta_G(\xi) d\xi &= \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_0 + j - \varepsilon_\beta}^{\xi_0 + j} K_{ex}(\xi) \delta_G(\xi) d\xi = \sum_{j=-E_\alpha}^{E_\gamma} \int_{\xi_{jinf}}^{\xi_{jsup}} K_{ex}(\xi) \delta_G(\xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{43}$$

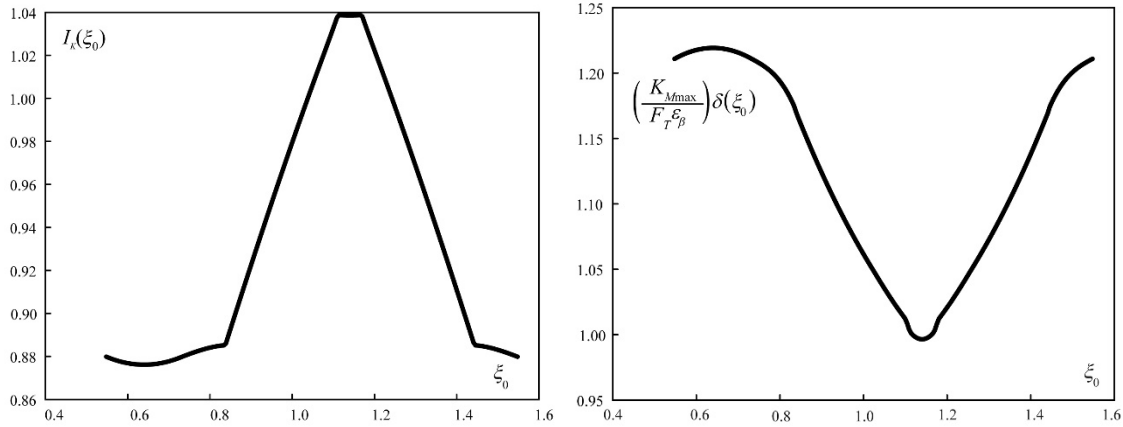


Fig. 11. Curvas de la función I_K (izquierda) y del error de transmisión quasi-estático (derecha) según el modelo de contacto extendido, de un engranaje helicoidal de $\epsilon_\alpha = 1,525$ y $\epsilon_\beta = 0,659$ con rebaje simétrico de longitud $\Delta\xi_{R-in} = \Delta\xi_{R-o} = 0,2$ y profundidad $\delta_{R-in} = \delta_{R-o} = 0,119$.

con:

$$\begin{aligned} \xi_{j\sup} &= \xi_{\min-ef} + (\xi_0 + j) + \xi_{\max-ef} - \min(\xi_{\min-ef}, (\xi_0 + j)) - \max((\xi_0 + j), \xi_{\max-ef}) \\ \xi_{j\inf} &= \xi_{\min-ef} + (\xi_0 + j - \epsilon_\beta) + \xi_{\max-ef} - \min(\xi_{\min-ef}, (\xi_0 + j - \epsilon_\beta)) - \max((\xi_0 + j - \epsilon_\beta), \xi_{\max-ef}) \end{aligned} \tag{44}$$

Finalmente, una vez calculada $\delta(\xi_0)$, la fuerza sobre cada sección transversal se obtiene sustituyendo la ecuación (44) en la ecuación (39). En la Fig. 11 se muestran las curvas de $I_{K-ex}(\xi_0)$ y $\delta(\xi_0)$ del modelo de contacto extendido para el engranaje helicoidal con rebaje simétrico del ejemplo anterior.

4. RESULTADOS

El modelo presentado en los apartados anteriores permite conocer tanto la distribución de la fuerza a lo largo de la línea de contacto -y eso en cada punto de la línea de engrane, en cada uno de los cuales hay una línea de contacto distinta-, así como la variación del error de transmisión quasi-estático dentro de un ciclo de engrane. El error de transmisión quasi-estático se puede calcular con la ecuación:

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\delta(\xi)}{r_{b2}} \tag{45}$$

donde $\delta(\xi_0)$ se obtiene a partir de las ecuaciones (35), para dentaduras sin rebaje, y (42) para dientes con perfil rebajado. También se puede obtener el error de transmisión quasi-estático teórico, mediante la ecuación (29). La Fig. 12 muestra las tres curvas de error de transmisión quasi-estático del engranaje helicoidal considerado en los ejemplos anteriores.

Las Figuras 5 y 6 muestran las mismas tres curvas de error de transmisión, para el caso de engranajes rectos. Se aprecia que, en las posiciones de contacto en que ninguna pareja está contactando dentro del intervalo de rebaje o del intervalo de contacto extendido, las tres curvas son coincidentes. Tiene todo el sentido, puesto que ésa es la situación que se supone que se da durante todo el ciclo de engrane, cuando se calcula la deformación y el reparto de carga teórico. Sin embargo esta situación no se da en el engranaje helicoidal de la Fig. 12, en la que no se aprecia ningún intervalo de coincidencia. La razón es muy clara: no existe ningún punto en el intervalo de engrane en el que todas las secciones transversales estén en contacto fuera de los intervalos de rebaje y de contacto extendido. Podría darse, no obstante, en engranajes helicoidales de muy bajo recubrimiento en el salto.

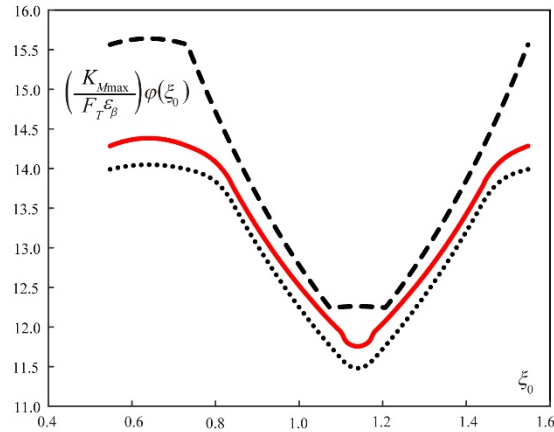


Fig. 12. Error de transmisión cuasi-estático de un engranaje helicoidal de $\epsilon_\alpha = 1,525$ y $\epsilon_\beta = 0,659$, según el modelo teórico (trazos), extendido (puntos) y con rebaje de perfil simétrico (continuo).

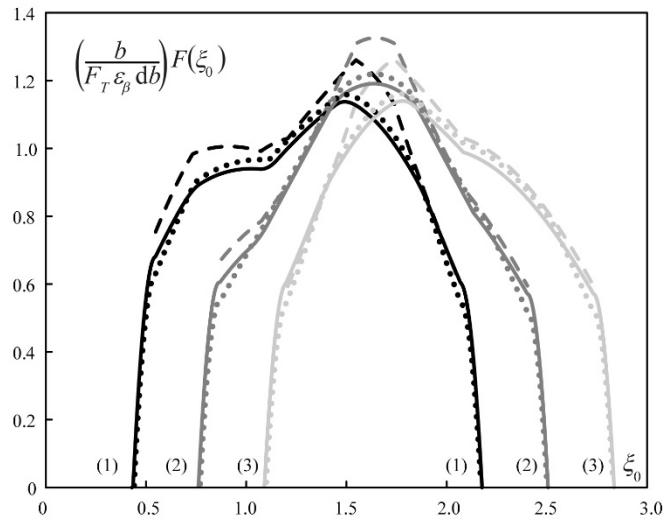


Fig. 13. Carga por unidad de ancho de cara en las secciones transversales extremas (1) y (3), e intermedia (2), de un engranaje helicoidal de $\epsilon_\alpha = 1,525$ y $\epsilon_\beta = 0,659$, según el modelo teórico (trazos), extendido (puntos) y con rebaje de perfil simétrico (continuo).

La distribución de la fuerza se puede determinar con las ecuaciones (34) y (39), para dentaduras sin rebaje y con rebaje, respectivamente; y con la ecuación (25) para la aplicación del modelo teórico, también válido para engranajes muy poco cargados. Puesto que la fuerza depende de dos parámetros, ξ y ξ_0 , su representación requerirá un diagrama en tres dimensiones, con toda probabilidad poco descriptivo. Sin embargo, puede resultar interesante representar la variación de la fuerza a lo largo del intervalo de engrane de una sección transversal concreta, aunque se ha de tener en cuenta que esa no será válida para las otras secciones transversales del engranaje. Se trata, en definitiva, de particularizar las ecuaciones (25), (34) y (39) para una sección transversal concreta, que vendrá caracterizada por la ecuación $\xi = \xi_0 - k$. La Fig. 13 muestra la variación de la carga a lo largo del intervalo de engrane del engranaje helicoidal de los ejemplos anteriores, para las dos secciones transversales extremas, $\xi = \xi_0$ y $\xi = \xi_0 - \epsilon_\beta$, y la sección intermedia, $\xi = \xi_0 - \epsilon_\beta / 2$. Para las tres secciones se representan las distribuciones de fuerza teórica, extendida y con rebaje. Se puede apreciar que la distribución de carga es bastante diferente de unas secciones transversales a otras, diferencia que se hace todavía más acusada si se compara con la distribución de carga en

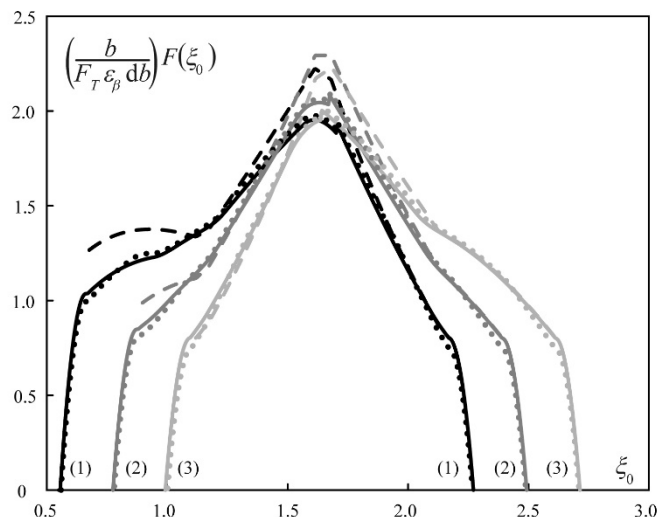


Fig. 14. Carga por unidad de ancho de cara en las secciones transversales extremas (1) y (3), e intermedia (2), de un engranaje helicoidal de $\varepsilon_\alpha = 1,495$ y $\varepsilon_\beta = 0,442$, según el modelo teórico (trazos), extendido (puntos) y con rebaje de perfil simétrico (continuo).

un engranaje recto. Se observa también una cierta simetría especular, que se traduce en que la sección intermedia presenta una curva de reparto de carga más o menos simétrica.

Como era de esperar, el modelo teórico sobreestima el valor de la fuerza transmitida, puesto que no toma en consideración el intervalo de engrane extendido. Por la misma razón, el diente rebajado ha de soportar cargas mayores, puesto que parte del intervalo extendido se evita con el rebaje. Por último, cabe destacar que la máxima carga se presenta en el punto medio del intervalo de engrane de la sección intermedia.

La Fig. 14 muestra una gráfica similar, para el caso de un engranaje helicoidal en que la suma de las partes decimales de los grados de recubrimiento transversal y en el salto son menores que 1, al contrario que en el caso anterior. La notable diferencia entre ambas figuras se explica por el hecho, bien conocido, de que la variación de la longitud de contacto a lo largo de la línea de engrane, es diferente en ambos casos. Se mantiene, no obstante, la simetría especular de las distribuciones en las secciones transversales, la simetría en la distribución de la sección transversal intermedia y la localización del máximo de carga en el punto medio del intervalo de engrane de esta sección intermedia.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un modelo para la determinación de la rigidez, la distribución de carga y el error de transmisión, en engranajes helicoidales de perfil de evolvente, incluyendo dentaduras con modificación de perfil. Está basado en un modelo similar desarrollado para engranajes rectos, para cuya aplicación se ha de considerar el engranaje helicoidal como una sucesión de engranajes rectos de espesor diferencial, girado cada uno de ellos respecto del anterior un ángulo constante, también diferencial. Este planteamiento debe considerarse válido porque se ha demostrado que, en condiciones de carga, todas las secciones transversales del engranaje helicoidal sufren idéntico retraso del diente de salida con respecto al de entrada por efecto de la deformación, por lo que la rigidez del acoplamiento entre las secciones puede considerarse infinita.

Con este planteamiento, se ha estudiado el reparto de carga y el error de transmisión cuasi-estático en condiciones teóricas de engrane, en condiciones reales a lo largo del intervalo de contacto extendido, y en presencia de modificaciones de perfil. Es de destacar que, a diferencia de los engranajes rectos, en los que las condiciones de carga son idénticas al inicio del engrane de todas las parejas de dientes, las distintas

secciones transversales de un engranaje helicoidal comienzan (y terminan) el engrane en condiciones de carga distintas, debido a que la línea de contacto, tanto en su ubicación como en su longitud, es diferente en cada punto del intervalo de engrane. Consecuencia de ello es que no es posible ajustar la profundidad de rebaje a las condiciones de carga, si el rebaje ha de ser el mismo en todas las secciones. Por esta razón, la influencia de los parámetros de rebaje en el reparto de carga y el error de transmisión es mucho más complicada y menos intuitiva que en el caso de engranajes rectos.

Se ha comprobado también que las curvas de reparto de carga son diferentes en las distintas secciones transversales, y que la máxima carga siempre se localiza en el punto medio del intervalo de engrane de la sección intermedia.

El modelo presentado permitirá el desarrollo de modelos de cálculo resistente y de error de transmisión, así como la realización de estudios influencia de determinados parámetros geométricos, en particular los grados de recubrimiento transversal y en el salto, cuya variación tiene efectos muy diversos y poco intuitivos, que abren un interesante campo a la optimización.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean dejar constancia de su agradecimiento a la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación por la financiación del proyecto de investigación PID2019-110996RB-I00 “Simulación y control del error de transmisión en engranajes cilíndricos”, así como a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la UNED por la acción 2021-MEC23, “Control del error de transmisión en engranajes cilíndricos con modificación del perfil”.

REFERENCIAS

- [1] Harris, S.L., “Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears”, *Proc. Institution of Mechanical Engineers*, **172**, (1958)
- [2] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Sánchez, M.B., “Load sharing model for spur gears with tip relief”, *Proc. International Conference on Gears 2017*, Munich (Alemania) (2017)
- [3] Lin, H.H., Oswald, F.B., Townsend, D.P., “Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications”, *Mechanism and Machine Theory*, **29** (1994)
- [4] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **139** (2019)
- [5] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Sánchez, M.B., “Control del error de transmisión cuasi-estático mediante rebaje de punta en engranajes rectos de perfil de evolvente”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* **22** (2018)
- [6] Sigg, H., “Profile and longitudinal corrections on involute gears”, AGMA 109.16, Semi-Annual Meeting of the American Gear Manufacturers Association, Chicago, Illinois (1965)
- [7] Tavakoli, M.S., Houser, D.R., “Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears”, *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, **108** (1986)
- [8] Lee, C., Lin, H.H., Oswald, F.B., Townsend, D.P., “Influence of linear profile modification and loading conditions on the dynamic tooth load and stress of high-contact-ratio spur gears”, *Journal of Mechanical Design*, **113** (1990)
- [9] Lin, H.H., Oswald, F.B., Townsend, D.P., “Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications”, *Mechanism and Machine Theory*, **29** (1994)
- [10] Kahraman, A., Blankenship, G.W., “Effect of involute tip relief on dynamic response of spur gear pairs”, ASME. *Journal of Mechanical Design*, **121** (1999)
- [11] Yildirim, N., Munro, R.G., “A systematic approach to profile relief design of low and high contact ratio spur gears”, *Proc. Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **213**, (1999)

- [12] Yildirim, N., Munro, R.G., “A new type of profile relief for high contact ratio spur gears”, *Proc. Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **213** (1999)
- [13] Beghini, M., Presicce, F., Santus, C., A method to define profile modification of spur gear and minimize the transmission error, AGMA Paper 04FTM3, Alexandria, Virginia (2004)
- [14] Wang, J., Howard, I., “Comprehensive analysis of spur gears in mesh with various types of profile modifications”, *Proceedings International Conference on Mechanical Transmissions*, Chongqing, P.R. China (2006)
- [15] Tesfahunegn, Y.A., Rosa, F., Gorla, C., “The effects of the shape of tooth profile modifications on the transmission error, bending and contact stress of spur gears”, *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **224** (2010)
- [16] Velex, P., Bruyere, J., Houser, D.R., “Some analytical results on transmission errors in narrow-faced spur and helical gears: influence of profile modifications”, *Journal of Mechanical Design*, **133** (2011)
- [17] Ghribi, D., Bruyere, J., Velex, P., Octrue, M., Haddar, M., “A contribution to the design of robust profile modifications in spur and helical gears by combining analytical results and numerical simulations”, *Journal of Mechanical Design*, **134** (2012)
- [18] Bruyere, J., Velex, P., “Derivation of optimum profile modifications in narrow-faced spur and helical gears using a perturbation method”, *Journal of Mechanical Design*, **135** (2013)
- [19] Chen, Z., Shao, Y., “Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack”, *Mechanism and Machine Theory*, **62** (2013)
- [20] Bruyere, J., Gu, X., Velex, P., “On the analytical definition of profile modifications minimizing transmission error variations in narrow-faced spur and helical gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **92** (2015)
- [21] Velex, P., Bruyere, J., Gu, X., “An alternative approach to the definition of profile modifications in high-contact-ratio spur gears”, *Journal of Mechanical Design*, **137** (2015)
- [22] Ghosh, S.S., Chakraborty, G., “On optimal tooth profile modification for reduction of vibration and noise in spur gear pairs”, *Mechanism and Machine Theory*, **105** (2016)
- [23] Díez-Ibarbia, A., del Rincon, A.F., de Juan, A., Iglesias, M., Garcia, P., Viadero, F., “Frictional power losses on spur gears with tip reliefs. The load sharing role”, *Mechanism and Machine Theory*, **112** (2017)
- [24] Díez-Ibarbia, A., del Rincon, A.F., de Juan, A., Iglesias, M., Garcia, P., Viadero, F., “Frictional power losses on spur gears with tip reliefs. The friction coefficient role”, *Mechanism and Machine Theory*, **121** (2018)
- [25] Ma, H., Zeng, J., Feng, R., Pang, X., Wen, B., “An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief”, *Mechanism and Machine Theory*, **98** (2016)
- [26] Ma, H., Pang, X., Feng, R., Wen, B., “Evaluation of optimum profile modification curves of profile shifted spur gears based on vibration responses”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **70-71** (2016)
- [27] Sun, Y., Ma, H., Huangfu, Y., Chen, K., Che, L.Y., “A revised time-varying mesh stiffness model of spur gear pairs with tooth modifications”, *Mechanism and Machine Theory*, **129** (2018)
- [28] Wen, Q., Du, Q., Zhai, X., “An analytical method for calculating the tooth surface contact stress of spur gears with tip relief”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **151** (2019)
- [29] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Artés, M., Antona, J.A., Load distribution model along the line of contact for involute external gears, *Mechanism and Machine Theory*, **45** (2010)
- [30] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears”, *Meccanica*, **48** (2013)
- [31] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J. I., “Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects”, *Mechanism and Machine Theory*, **109** (2017)
- [32] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Muñoz, M., “Critical stress and load conditions for pitting calculations of involute spur and helical gear teeth”, *Mechanism and Machine Theory*, **46** (2011)
- [33] Sánchez, M.B., Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., “Critical stress and load conditions for bending calculations of involute spur and helical gears”, *International Journal of Fatigue*, **48** (2013)
- [34] Sánchez, M.B., Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., “Contact stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gear teeth”, *Mechanism and Machine Theory*, **64** (2013)
- [35] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Tooth-root stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gears”, *Meccanica*, **49** (2014)

- [36] Pleguezuelos, M., Sánchez, M.B., Pedrero, J.I., “Load transfer among spur gear teeth with tip relief under non-nominal loading conditions”, *Mechanism and Machine Science*, Aachen (Alemania) (2018)

MODEL FOR LOAD SHARING AND TRANSMISSION ERROR FOR HELICAL GEARS WITH TIP RELIEF

Abstract – The start of contact, at the driven tooth tip, of each transverse section of a helical tooth occurs under different load conditions, since the length of contact varies along the meshing cycle, and therefore the meshing stiffness and the load per unit length vary accordingly. This results in a different teeth deflection, and therefore a different advance of the effective start of contact for each transverse section. This means that whatever the tip relief, it will be suitable to absorb the teeth deflection at the start of contact only for one -or a few- transverse sections, but it will be small or too large for all the rest. In this work a simple model is presented for the calculation of mesh stiffness, load distribution and teeth deflection for helical gears with tip relief, which includes the simulation of the start of contact in the transverse sections in which the relief depth does not adjust to the instantaneous load conditions.

Keywords – Helical gears, Meshing stiffness, Load sharing, Transmission error, Tip relief.