



## ANÁLISE DA ESTABILIDADE E DETECÇÃO DO COMPORTAMENTO CAÓTICO EM UM SISTEMA NÃO-IDEAL DE CÁPSULA

LUIZ GUSTAVO PEREIRA ROÉFERO<sup>1</sup>, FÁBIO ROBERTO CHAVARETTE<sup>2</sup>, THIAGO CARRETA MORO<sup>3</sup>, ROBERTO OUTA<sup>1,4</sup>, JOSELMA PINHEIRO GONÇALVES VICENTE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UNESP - Univ. Estadual Paulista  
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica  
Avenida Brasil, 56, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil

<sup>2</sup>UNESP - Univ. Estadual Paulista  
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Matemática  
Rua Rio de Janeiro, 266, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil

<sup>3</sup>UNESP - Univ. Estadual Paulista  
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Civil  
Avenida Brasil, 56, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil

<sup>4</sup>FATEC – Faculdade de Tecnologia de Araçatuba,  
Departamento de Biocombustíveis  
Av. Prestes Maia, 1764 - Jd. Ipanema, CEP: 16052-045, Araçatuba, Brasil

*(Recibido 11 de febrero de 2019, revisado 11 de junio de 2019, para publicación 30 de julio de 2019)*

**Resumo** – No estudo da engenharia, não é raro encontrar estruturas que colapsaram pela ocorrência de excitações que não estavam previstas em projeto. Dentro deste ramo encontramos as excitações não-ideais que ocorrem quando a própria excitação é influenciada pela resposta da estrutura, este fenômeno ocorre frequentemente em motores com algum tipo de desbalanceamento. Neste trabalho, buscou-se analisar o comportamento de um sistema de cápsula através de um modelo matemático, que se movimentava com base em um sistema vibro-impacto, quando excitado por um motor desbalanceado (fonte não-ideal), tornando o modelo inédito na literatura. Para realizar esta avaliação, foram utilizados métodos matemáticos, como o Método de Runge Kutta de 4ª Ordem, o Primeiro Método de Estabilidade de Lyapunov e os Expoentes de Lyapunov a fim de detectar instabilidades e parâmetros que façam com que o sistema desempenhe um comportamento caótico, necessitando de um projeto de controlador para a correção e utilização deste sistema em situações práticas.

**Palavras-chave** – Fonte Não-Ideal, Caos, Vibro-Impacto, Simulação numérica, Sistema de Cápsula.

### 1. INTRODUÇÃO

As chamadas vibrações não-ideais são importantes para o desenvolvimento de projetos no ramo da Engenharia, principalmente no que diz respeito a sistemas que funcionem sobre uma grande carga de excitação decorrente de uma fonte de movimento. Este tipo de excitação ocorre quando a fonte de energia é limitada e faz com que a mesma seja influenciada pela resposta do sistema, um exemplo prático é explicitado por um motor desbalanceado [8,9].

Embora a dinâmica não-ideal seja de fundamental importância para o funcionamento de dispositivos que estão submetidos a uma grande carga, não há uma variada gama de trabalhos publicados nesta área devido à dificuldade de lidar com os efeitos decorrentes deste tipo de vibração. Neste sentido, a elaboração de pesquisas voltada a essa área é de fundamental importância para a divulgação deste fenômeno, o qual pode trazer uma grande evolução para os conceitos atuais de Engenharia, facilitando a compreensão de comportamentos ainda tidos como um obstáculo para os pesquisadores [1].

Em 1889, C. Laval criava um dos primeiros experimentos ligados à pesquisa de vibrações não-ideais, constituído de uma turbina Single-Stage. Ao variar a frequência de rotação desta turbina, ele percebeu que quando se ultrapassava a frequência de ressonância do dispositivo, havia uma queda brusca de amplitude da vibração

do sistema, caracterizando o então chamado Efeito Sommerfeld que é tido como uma das maiores dificuldades encontradas no dimensionamento de sistemas submetidos à vibrações não-ideais, devido à instabilidade criada nas regiões próximas da ressonância, bem como um aumento exacerbado de amplitude da vibração do dispositivo [1,10].

Ainda dentro deste conceito de sistemas submetidos à vibração, existe uma subcategoria chamada de vibro-impactos, os quais tem uma grande notoriedade, devido ao fato de utilizarem dois fenômenos, vibração e impacto, que inicialmente seriam prejudiciais ao dispositivo, para desempenhar funções que facilitem a vida dos seres humanos. Exemplos comumente encontrados são britadeiras e furadeiras de impacto [4].

O modelo estudado neste trabalho é uma simplificação do modelo estudado por Daniela Rus, Andrew e Erna Viterbi do Departamento de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação do MIT, o dispositivo tem o objetivo de se locomover no sistema digestivo retirando objetos indesejados que foram ingeridos por descuidos.

Utilizando este conceito e buscando suprir a demanda do mercado no que diz respeito a mecanismos que se movam independentemente de forças externas, no trabalho [3] os autores equacionaram matematicamente um modelo de cápsula que, internamente teria uma massa excitada por uma força periódica, e que tem a capacidade de se movimentar sem o auxílio de qualquer componente externa ao encapsulamento.

Neste caso, como em qualquer modelo submetido à uma excitação, a dinâmica nos mostra que ocorrerão parâmetros que farão com que o sistema desempenhe comportamentos instáveis, assim é necessária uma avaliação da estabilidade do modelo utilizando o Primeiro Método de Lyapunov, o qual lida com os autovalores obtidos da matriz de linearização do sistema de equações, mais conhecida como matriz Jacobiana [5].

Ainda dentro do conceito de estabilidade de sistemas, há uma teoria que define um estado de instabilidade muito característico de situações em que o dispositivo tem uma grande sensibilidade a condições iniciais, ou a qualquer influência do meio externo. Esta sensibilidade é chamada de estado caótico, ou caos, e é quantificada pelos Expoentes de Lyapunov [7]. Esta teoria segue o seguinte critério: tem-se um expoente para cada equação que descreve o sistema já no espaço de estados, se qualquer um destes expoentes for positivo o sistema é considerado em estado caótico, se todos forem negativos o sistema é dissipativo, e se a soma dos expoentes for zero, o movimento é conservativo [7].

Neste trabalho, buscou-se executar uma análise tanto de estabilidade como de detecção de estados caóticos de um modelo de sistema de cápsula totalmente inédito na literatura, uma vez que a fonte de excitação interna é um motor desbalanceado. Almejou-se comparar alguns dos resultados obtidos por [6] e verificar os ganhos e as perdas de uma vibração não-ideal. Os métodos matemáticos utilizados neste trabalho foram escolhidos devido à sua robustez e confiabilidade com relação aos resultados fornecidos e seu tempo de simulação reduzido quando compara aos outros métodos matemáticos.

Para realizar este trabalho foram utilizadas simulações computacionais das teorias previamente citadas, no software livre OCTAVE, mostrado em [2], e os gráficos obtidos com tais simulações serão encontrados no decorrer deste trabalho.

## 2. METODOLOGIA

O modelo matemático da cápsula submetida a uma vibração não-ideal, o qual é inédito na literatura, é ilustrado na Fig. 1 sendo:

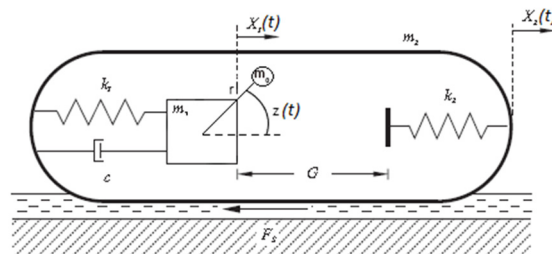


Fig. 1. Modelo vibro-impacto.

O modelo é constituído de uma cápsula externa  $m_2$  que interage com um meio viscoso, tendo assim uma força de atrito  $F_s$ . Interiormente a esta cápsula temos uma massa  $m_1$  que oscila entre duas molas com rigidez  $k_1$  e  $k_2$ , esta massa também está conectada a um amortecedor com coeficiente de amortecimento  $c$  e está submetida a um motor desbalanceado que fornece a excitação não-ideal ao sistema. No motor não ideal, temos o raio de giro  $r$ , o ângulo  $z$  de rotação, uma grandeza  $d$  que é a excentricidade da massa desbalanceadora  $m_0$ , já os parâmetros  $a$  e  $b$  encontrados nas Equações 4 e 8 são as constantes do motor não-ideal.

Quando o deslocamento relativo da massa  $m_1$ ,  $X_1 - X_2$ , for maior que a distância  $G$ , a massa interna entra em contato com a placa conectada à capsula e desempenha sobre ela uma força que, caso seja maior que a força de atrito seco  $F_s$ , faz com que a massa  $m_2$  acelere. É também verdade que a massa  $m_2$  se pode mover mesmo que não ocorra este contato.

## 2.1. Equações Matemáticas

Para auxiliar na representação e nos cálculos deste sistema, definimos as variáveis adimensionais.

$$\tau = \Omega_0 t, \quad x_i = \frac{k_1}{P_f} X_i, \quad y_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{k_1}{\Omega_0 P_f} \dot{X}_i, \quad \dot{y}_i = \frac{dy_i}{d\tau} = \frac{k_1}{\Omega_0^2 P_f} \ddot{X}_i, \quad f_s = \frac{F_s}{P_f}, \quad f_b = \frac{F_b}{P_f} \quad (1)$$

E também os seguintes parâmetros.

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \xi = \frac{c}{2m_1\Omega_0}, \quad \delta = \frac{k_1}{P_f} G, \quad \beta = \frac{k_2}{k_1}, \quad \gamma = \frac{m_2}{m_1} \quad (2)$$

onde  $i = 1, 2$  e  $P_f$  é o limiar de fricção de Coulomb.

As equações, já no espaço de estados, que descrevem a dinâmica deste sistema, foram adaptadas à inserção do motor não ideal e estão descritas a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = \frac{(x_2 - x_1) + 2\xi(y_2 - y_1) - H_3\beta(x_1 - x_2 - \delta) + d(w^2 \cos z + \sin z (a - bw))}{1 - dr \sin^2 z} \\ \dot{x}_2 = y_2(H_1(1 - H_3) + H_2H_3) \\ \dot{y}_2 = \frac{(H_1(1 - H_3) + H_2H_3)(-f_s - (x_2 - x_1) - 2\xi(y_2 - y_1) + H_3\beta(x_1 - x_2 - \delta))}{\gamma} \\ \dot{z} = w \\ \dot{w} = \frac{a - bw - (rz(x_2 - x_1 + d(w^2 \cos z - (a - bw) \sin z) - 2\xi(y_1 - y_2) + \beta H_3(\delta - x_1 + x_2)))}{dr \sin^2 z - 1} \end{array} \right. \quad (3)$$

Sendo  $H()$  a função Heaviside e as funções  $H_i (i = 1, 2, 3)$  são definidas como.

$$\begin{aligned} H_1 &= H(|(x_2 - x_1) + 2\xi(y_2 - y_1)| - f_b) \\ H_2 &= H(|(x_2 - x_1) + 2\xi(y_2 - y_1)| - \beta(x_1 - x_2 - \delta)| - f_b) \\ H_3 &= H(x_1 - x_2 - \delta) \end{aligned} \quad (4)$$

É possível obter o sistema linearizado utilizando a matriz jacobiana 6x6 que se encontra expressa a seguir.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & 0 & 0 \\ k & l & m & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ o & p & q & r & s & t \end{bmatrix} \quad (5)$$

Em que as variáveis são expressas no apêndice deste trabalho.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para executar as simulações do Primeiro Método de Estabilidade de Lyapunov, utilizou-se os parâmetros mostrados na Tabela 1.

E as condições iniciais mostradas na Tabela 2.

Tabela 1. Parâmetros adimensionais utilizados nas simulações computacionais.

Parâmetros	Valores
$f_b$	1
$f_s$	0,5
$\tau$	0-2000
$\xi$	0,1
$\beta$	30
$\gamma$	1
$\delta$	0,02
$r$	0,05
$d$	0,01

Tabela 2. Condições iniciais utilizadas.

Condições Iniciais	Valores
$x_1(0)$	0,5
$y_1(0)$	0,5
$x_2(0)$	0
$y_2(0)$	0
$z(0)$	1
$w(0)$	0

#### 3.1. Estabilidade pelo Primeiro Método de Lyapunov

Optou-se por variar os parâmetros  $a$  e  $b$  do motor de 0 até 0.5, devido ao fato de eles aparecerem excessivamente na matriz Jacobiana, influenciando de forma decisiva na estabilidade do sistema, e também porque os mesmos alteram a forma como o motor interage com a estrutura, sendo interessante a avaliação destes parâmetros. Definiu-se o passo de 0.01 entre as iterações do algoritmo. Foram obtidos três diagramas de estabilidade, sendo o relacionado à massa interna mostrado na Fig. 2, o da Fig. 3 está relacionado à dinâmica da cápsula e o da Fig. 4 está relacionado ao motor não-ideal.

Nos diagramas, os círculos indicam um ponto de parâmetros estáveis, já os asteriscos mostram pontos com comportamento instáveis.

Neste diagrama mostrado na Fig. 2, pode-se notar que em qualquer par de parâmetros  $a$  e  $b$ , entre o intervalo de 0 a 0.5, a massa interna apresenta comportamento estável. Entretanto, é necessário que se

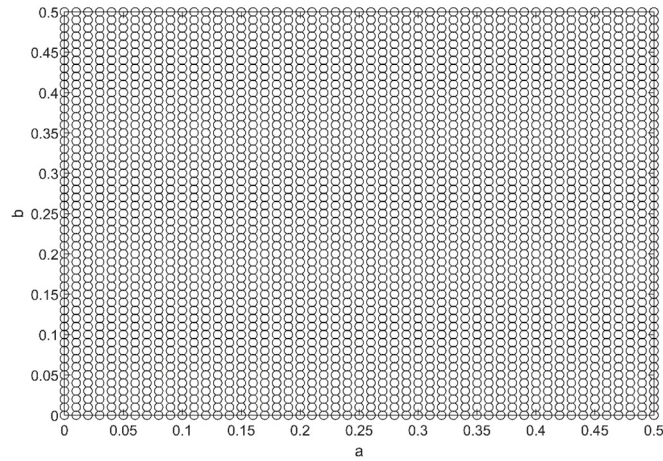


Fig. 2. Diagrama de estabilidade da massa interna.

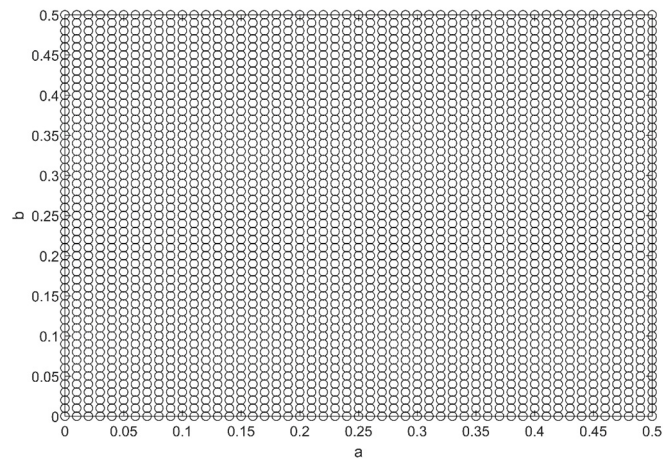


Fig. 3. Diagrama de estabilidade da cápsula externa.

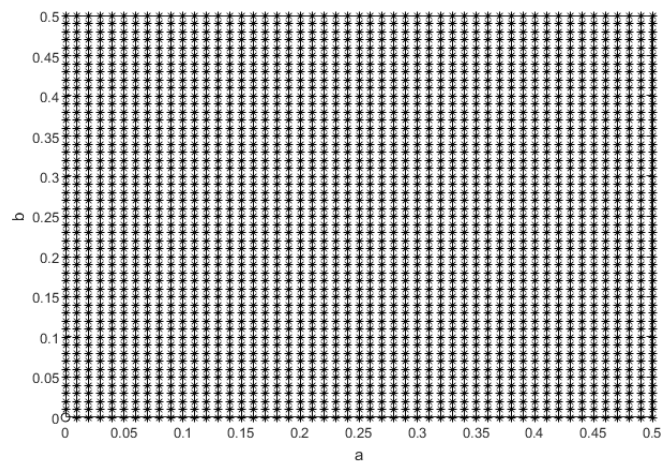


Fig. 4. Diagrama de estabilidade da cápsula externa.

analise os diagramas referentes a capsula externa e o motor não ideal, a fim de que haja uma certeza sobre a estabilidade global do sistema.

Assim como no diagrama de estabilidade da massa interna, o diagrama da Fig. 3, que é referente à cápsula externa, apresenta todos os pontos analisados sendo classificados como estáveis, o que nos poderia levar precocemente a uma decisão de que o sistema é estável globalmente. Ambos os diagramas são iguais pois os sistemas apresentam o mesmo comportamento com relação a estabilidade, para os pontos analisados.

Analisando o diagrama mostrado na Fig. 4, podemos notar que o sistema é instável para quase todos os parâmetros escolhido, fazendo com que todo o dispositivo se torne instável como um todo, visto que para que o dispositivo seja classificado como estável todos os componentes de desempenhar comportamento estável. Entretanto, no par de ponto (0,0), onde não há o movimento do motor, faz com que o dispositivo fique parado, logo apenas este ponto é estável.

### 3.2. Detecção de parâmetro caótico pelo método dos Expoentes de Lyapunov

Foi escolhido aleatoriamente o ponto (0.1, 0.01) e aplicado a teoria dos Expoentes de Lyapunov, utilizando o algoritmo de Wolf [7], a fim de detectar a existência de comportamento caótico na dinâmica do dispositivo quando projetado com estes parâmetros.

Na Fig. 5, verifica-se que o expoente  $\lambda_1$  se demonstra positivo após o período transiente, evidenciando um comportamento caótico, como diz a teoria de Lyapunov. Com isso, pode-se cumprir toda a parte de estabilidade e detecção de caos do dispositivo, no presente neste trabalho. Pode-se ver que os expoentes  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  também se mostram positivos no diagrama, entretanto seus valores são bem próximos de zero, evidenciando que caso  $\tau \rightarrow \infty$ , ambos os expoentes terão valor nulo.

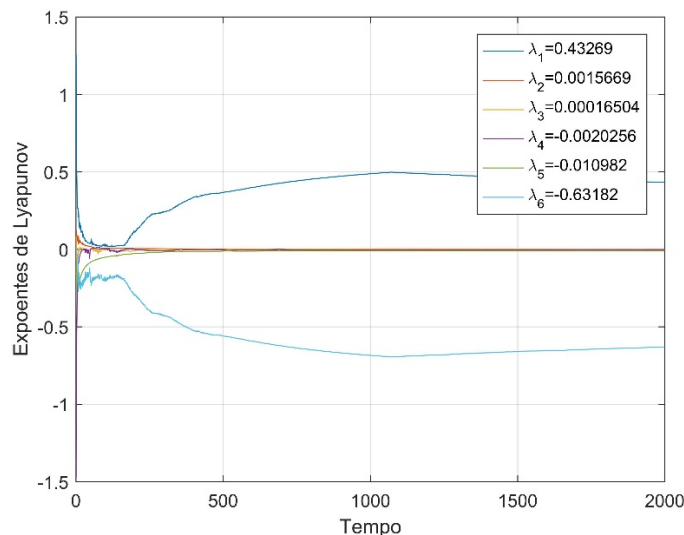


Fig. 5. Dinâmica dos Expoentes de Lyapunov.

### 3.3. Comportamento dinâmico

Partindo do equacionamento proposto nas Eq. 3-8, decidiu-se observar a evolução temporal das variáveis que descrevem o sistema de cápsula. Para isso, utilizou-se o método de Runge Kutta de 4ª Ordem para efetuar a aproximação numérica das equações não-lineares supracitadas.

Verificando a Fig. 6 pode-se ver um salto abrupto no intervalo  $0 < r < 120$  de simulação, seguido de um deslocamento não constante. Assim, uma característica que se pode observar são os saltos frequentes, característico das funções *heavisides*, que simulam o impacto da massa interna com a cápsula.

Na Fig. 7a, nota-se que a massa acompanha o deslocamento da cápsula, como esperado, tendo uma pequena oscilação ao redor da trajetória, característico de um sistema massa mola. Já na Fig. 7b, notou-se que inicialmente a velocidade da massa é de grande amplitude, o que explica o salto que se tem no deslocamento da cápsula, seguido de uma redução abrupta e uma oscilação com amplitude pouco variável.

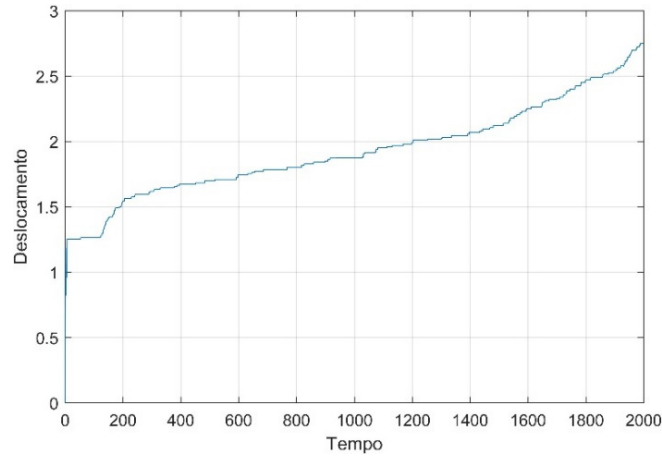


Fig. 6. Deslocamento da cápsula externa.

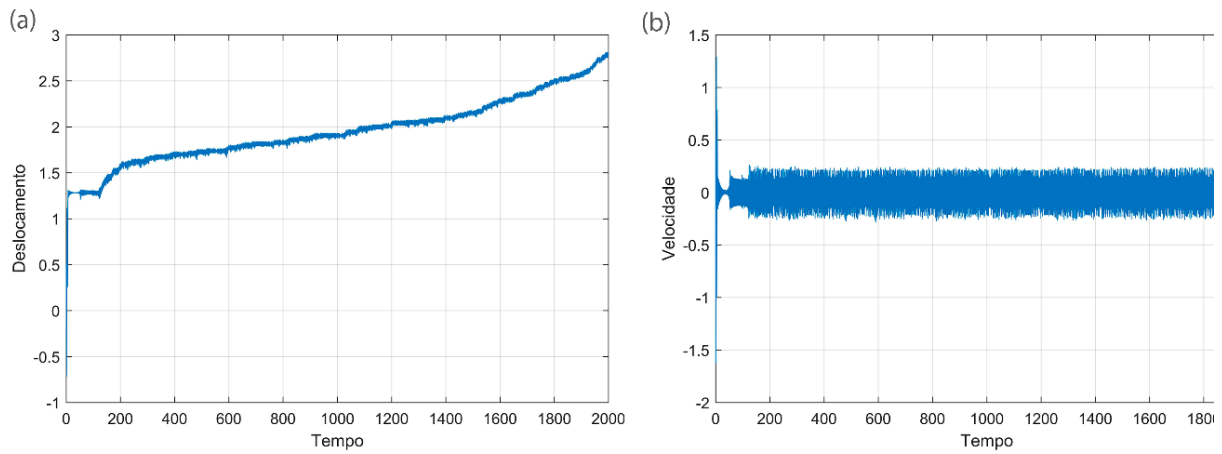


Fig. 7. (a) Deslocamento da massa interna (b) Velocidade da massa interna.

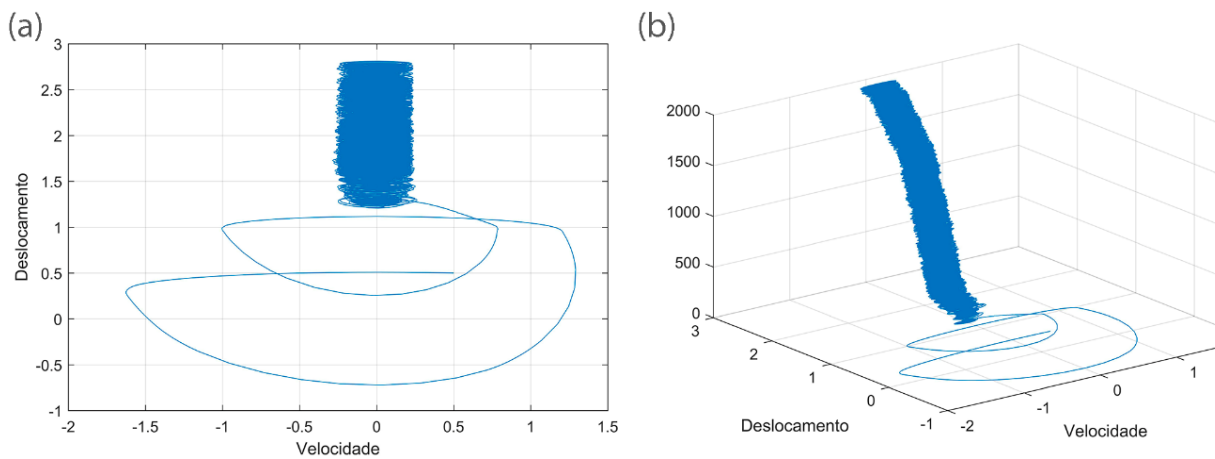


Fig. 8. Plano de fase da massa (a) 2D (b) 3D.

Nos gráficos presentes na Fig. 8, pode-se ver um período transiente que após um tempo entra em uma órbita, a qual não converge para um ponto de equilíbrio. Assim, com o. Pode-se comparar este plano de fase com o obtido por [6], onde o autor utilizou uma fonte ideal de excitação cossenoidal.



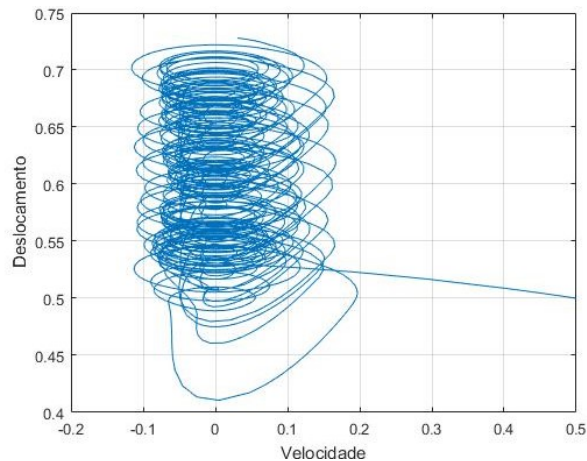


Fig. 9. Plano de fase da massa com fonte ideal.

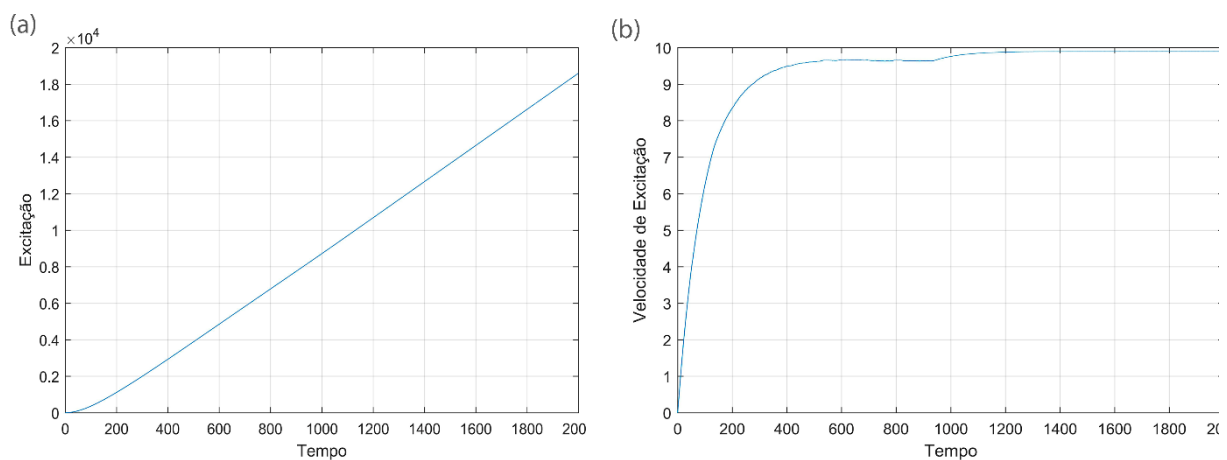


Fig. 10. Excitação (a) Ângulo (b) Velocidade Angular.

Pode-se perceber, analisando as Figuras 8 e 9, que o motor desbalanceado fez com que houvesse um período transiente maior na dinâmica do dispositivo, bem como uma maior amplitude de oscilação da velocidade da massa interna.

Por último, na Fig. 10, têm-se o gráfico que demonstra a evolução temporal da excitação do sistema, bem como sua velocidade.

Na Fig. 10, verifica-se que após um certo período a velocidade de excitação permaneceu quase que constante, sendo que o ângulo variou de forma muito próxima à linear. Com isso podemos evidenciar que, mesmo desbalanceado, o motor girou quase em um movimento circular uniforme, sendo evidente a influência da resposta da cápsula na dinâmica da fonte não-ideal, como diz a teoria de vibrações não-ideais e fontes limitadas.

Nesta seção simulou-se a evolução temporal das variáveis que descrevem o sistema, permitindo uma verificação da dinâmica do dispositivo não-ideal e seu comportamento com o decorrer do funcionamento.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi proposto um novo modelo matemático do tipo não-ideal para o comportamento de uma cápsula e, através deste, realizou-se a análise e detecção do comportamento caótico do sistema, comportamento esse característico de sistemas não-ideais.



Em comparação com o modelo ideal proposto na literatura, verificou-se que a excitação não ideal modifica o comportamento dinâmico da cápsula. Assim, pode-se notar que a excitação não é mais periódica, e sim com velocidade constante a partir de um determinado trecho, o que modifica totalmente como se dá a movimentação da cápsula.

Assim, como há parâmetros que fazem com que o sistema desempenhe um comportamento caótico, se faz necessário um controlador para que o sistema possa operar em todas as condições desejadas. Com isso, propõe-se como trabalho futuro a supressão do caos presente no dispositivo utilizando a modelagem de Bouc-Wen de um amortecedor magneto reológico. Este dispositivo é capaz de controlar as transições bruscas de velocidade e limitar a amplitude de vibração da massa interna.

Outro ponto a se ressaltar é que o estudo se aplica a um modelo bidimensional, sendo que em aplicações reais a movimentação do dispositivo se dará de forma tridimensional, necessitando de uma melhora na modelagem matemática para uma melhor proximidade entre o modelo teórico e o comportamento real do dispositivo.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS), pertencente à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), bem como ao Laboratório de Sistemas Complexos (SisPLEXOS) pela estrutura fornecida e pelo suporte computacional prestado ao desenvolvimento do trabalho, sem os quais não seria possível a conclusão do mesmo. Entretanto os autores gostariam de agradecer principalmente à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro dado através do processo 2017/17601-8, sem o qual não seria possível que o aluno participasse de eventos e divulgasse os conhecimentos desenvolvidos durante seu trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Brasil, R.M., Fenili, A., Belato, D., Felix, J., "An overview on non-ideal vibrations", *Meccanica*, **38**(6), 613–621 (2003)
- [2] Eaton, J.W., Bateman, D., Hauberg, S., *Gnu octave*. Network Theory London (1997)
- [3] Liu, Y., Wiercigroch, M., Pavlovskaja, E., Yu, H., "Modelling of a vibro-impact capsule system", *International Journal of Mechanical Sciences*, **66**, 2–11 (2013)
- [4] Lourenço, R.F.B., "Análise computacional do comportamento dinâmico de um sistema vibro-impacto", Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (2017)
- [5] Monteiro, L.H.A., *Sistemas dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física (2011)
- [6] Roéfero, L.G.P., Chavarette, F., "Detecção de comportamento caótico em cápsulas". CON18-0420 (2018)
- [7] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A., "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16**(3), 285-317 (1985)
- [8] Cvetičanin, L., "Dynamics of the non-ideal mechanical systems: A review", *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, **4**(2), 75-86 (2010)
- [9] Tusset, A.M., Balthazar, J.M., Chavarette, F.R., Felix, J.L.P., "On energy transfer phenomena, in a nonlinear ideal and nonideal essential vibrating systems, coupled to a (MR) magneto-rheological damper", *Nonlinear Dynamics*, **69**(4), 1859-1880 (2012)
- [10] Chavarette, F.R., Balthazar, J.M., Felix, J.L., Rafikov, M., "A reducing of a chaotic movement to a periodic orbit, of a micro-electro-mechanical system, by using an optimal linear control design", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**(5), 1844-1853 (2009)

## ANALYSIS OF STABILITY AND DETECTION OF CAOTIC BEHAVIOR IN A NON-IDEAL CAPSULE SYSTEM

**Abstract** – In the study of engineering, it is not uncommon to find structures that collapsed by the occurrence of excitations that were not predicted in design. Within this branch we find the non-ideal excitations that occur when the excitation itself is influenced by the structure response. The aim of this work was to analyze the behavior of a capsule system through a mathematical model, which is based on a vibro-impact system, when excited by an unbalanced motor (non-ideal source), making the model unprecedented in literature. To perform this evaluation, mathematical theories were used as the Runge Kutta 4th Order method, the First Lyapunov stability method and Lyapunov exponents in order to detect instabilities and parameters that make the system perform a chaotic behavior, necessitating of a controller design for the correction and use of this system in practical situations.

**Keywords** – Non-Ideal Source, Chaos. Vibro-Impact, Numerical Simulation, Capsule System.