
X

a)

X

b) X

) X

)

!

)

" # $

! %

---

a) La situación que tenemos es la de un ex e imento aleato io consistente en la selección al a a de una de las com onentes eléct icas en estudio o se ando en ella la du ación de ésta asta que de e de unciona

Como no todas las com onentes tienen la misma du ación el tiem o en días X de la com onente que ext aigamos es una a ia le aleato ia la cual es de ti o continuo al eni ca acte i ada su ley de o a ilidad o una unción de densidad —o alte nati amente o ode toma cualquie alo en un inte alo en este caso 0 $\infty)$

Po ex e iencias e ias osi lemente o la o ma de los istog amas en situaciones ante io es) se admite como modelo de o a ilidad a a X una dist i ución ex onencial dist i ución de o a ilidad cuya unción de densidad es

$$_{\theta} \quad) = \theta\, e^{-\theta x}$$

a a > 0 y siendo θ un a ámet o tam ién ositi o Utili amos aquí la notación $_{\theta}$ en luga de la que a a ece en CB $_{X}$ o se más a itual destaca el a ámet o del que de ende la dist i ución que la a ia le aleato ia de la cual es unción de densidad al deduci se ésta a itualmente del contexto)

Po tanto la dist i ución de X queda totalmente definida sal o el a- lo del a ámet o el cual una e es ecificado dete mina á totalmente la dist i ución de X es deci su com o tamiento o a le

Ha itualmente el alo de θ se estima á de los datos como e emos más adelante Aquí lo su onemos conocido ien o que ya lo emos estimado o sim lemente o que ex e iencias e ias así lo aconse an La alidación del modelo es un tema que se eali a á ent e ot os mediante las ue as ^{2})

La egunta de este a a tado es la de e la elación existente ent e la media o es e an a de X y el a ámet o θ

La media o es e an a de X es o definición CB-sección 4 2) al se X una a ia le aleato ia continua la siguiente integ al

$$_X = \quad [X] = \int_{-\infty}^{\infty} \quad {}_\theta \quad)$$

Como ${}_\theta$) es ce o si ≤ 0 la integ al ante io la cual se uede descom one en la integ al asta ce o más la integ al desde ce o queda á igual a

$$\begin{aligned}
[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \quad {}_\theta \quad) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \quad {}_\theta \quad) \quad + \int_{0}^{\infty} \quad {}_\theta \quad) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \quad \cdot 0 \quad + \int_{0}^{\infty} \quad \theta \, e^{-\theta x} \\
&= \theta \int_{0}^{\infty} \quad e^{-\theta x}
\end{aligned}$$

La integ al ante io se esuel e a o a o a tes tomando como $=$ y como $= e^{-\theta x}$ El esultado es

$$\begin{aligned}
[X] &= \theta \int_{0}^{\infty} \quad e^{-\theta x} \\
&= \theta \left[- \quad \frac{e^{-\theta x}}{\theta} \bigg|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\theta} \, e^{-\theta x} \quad \right] \\
&= \theta \left[0 + \frac{1}{\theta} \int_{0}^{\infty} e^{-\theta x} \quad \right] \\
&= \frac{1}{\theta}
\end{aligned}$$

Al deci nos el enunciado que el modelo su uesto a a X e a una ex o-nencial de media 1000 días se á

$$\frac{1}{\theta} = 1000$$

es deci $\theta = 0'001$ y o tanto $X \leadsto \quad 0'001)$

b) La unción de dist i ución de una a ia le aleato ia continua es CB-sección 4 2)

$${}_{\theta} \quad) = \int_{-\infty}^{x} \quad {}_{\theta} \quad)$$

Como nuest a unción de densidad es 0 si la a ia le es meno que ce o se á si es ≤ 0

$${}_{\theta} \quad) = \int_{-\infty}^{x} \quad {}_{\theta} \quad) \qquad = \int_{-\infty}^{x} 0 \qquad = 0$$

ya que si es ≤ 0 la de ${}_{\theta} \quad)$ de dent o de la integ al ante io de e á se $\leq \quad \leq 0$ y o tanto ${}_{\theta} \quad) = 0$

Po ot o lado si es > 0 se á

$$\begin{aligned}
{}_{\theta} \quad) &= \int_{-\infty}^{x} \quad {}_{\theta} \quad) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \quad {}_{\theta} \quad) \qquad + \int_{0}^{x} \quad {}_{\theta} \quad) \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \qquad + \int_{0}^{x} \theta \, e^{-\theta y} \\
&= \theta \int_{0}^{x} e^{-\theta y} \\
&= \theta \left. \frac{e^{-\theta y}}{-\theta} \right|_{0}^{x} \\
&= -e^{-\theta x} + e^{0} \\
&= 1 - e^{-\theta x}
\end{aligned}$$

Po tanto la unción de dist i ución de la $\quad \theta)$ es

$$\theta \quad) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si} \quad > 0 \end{cases}$$

y la de X que es $\quad 0'001)$

$$) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \leq 0 \\ 1 - e^{-0'001x} & \text{si} \quad 0 \end{cases}$$

c) Para calcular la varianza de ,

$$(\quad) = \quad {}_{-\infty}^{\infty} (\quad - \quad {}_X)^2 \quad {}_\theta(\quad)$$

utilizaremos la formula, valida ara todas la varia les aleatorias no solo la ara la e onencial,

$$(\quad) = \quad {}^2 - (\quad)^2 = \quad {}_{-\infty}^{\infty} \quad {}^2 \quad {}_\theta(\quad) \quad - \quad {}^2_X$$

ara lo ue necesitamos calcular reviamente

$${}^2 \quad = \quad {}_{-\infty}^{\infty} \quad {}^2 \quad {}_\theta(\quad)$$

iguiendo asos analogos a los ue dimos en el calculo de la media anterior utilizando ue allı o tuvimos ue dicha media era

$${}_0^{\infty} \quad {}^{-\theta x} \quad = -$$

es decir,

$${}_0^{\infty} \quad {}^{-\theta x} \quad = \frac{}{{}^2}$$

tenemos ue es

$${}^2 \quad = \quad {}_{-\infty}^{\infty} \quad {}^2 \quad {}_\theta(\quad) \quad = \quad {}_0^{\infty} \quad {}^2 \quad {}^{-\theta x}$$

$$= \quad {}_0^{\infty} \quad {}^2 \quad {}^{-\theta x}$$

$$= \quad - \; ^2 \frac{-\theta x}{} \Big|_0^\infty \quad \int_0^\infty \frac{-\theta x}{}$$

$$= \quad 0 \quad - \int_0^\infty \quad ^{-\theta x}$$

$$= \quad - \cdot \frac{}{2}$$

$$= \frac{}{2}$$

a varianza sera, or tanto,

$$(\quad) = \quad ^2 - (\quad)^2 = \frac{}{2} - \frac{}{2} = \frac{}{2}$$

igual, en nuestro caso, a

$$(\quad) = \frac{}{2} = \frac{}{0'00 \; ^2} = \; 000^2$$

a desviacion tı ica sera, or tanto,

$$(\quad) = \sqrt{\quad (\quad)} = \; 000$$

dıas

d) a le de ro a ilidad de una varia le aleatoria, e resada ien a traves de su funcion de densidad o ien mediante su funcion de distri u-cion, tiene recisamente como ro osito el determinar el com ortamiento, en terminos de ro a ilidades, de la varia le en estudio ste es el uso ue haremos de ella en este a artado en el siguiente

a ro a ilidad edida es,

$$\{ \qquad 00\}$$

utilizando la ro iedad (-seccion , ro iedad **(c)**) de ue la ro a-ilidad de un suceso es igual a menos la ro a ilidad del suceso com le-mentario, sera

$$\{ \qquad 00\} = \; - \; \{ \quad \leq \quad 00\}$$

omo la funcion de distri ucion de una varia le aleatoria es, or de ni-cion

$$_X(\ ) = \{\ \leq\ \}$$

sera

$$\{\ 00\} = - \{\ \leq\ 00\} = - (\ 00)$$

Utilizando la e resion de la funcion de distri ucion antes calculada, sera

$$\{\ 00\} = - (\ 00) = - - ^{-0'001\cdot 1500} = ^{-1'5} = 0'$$

) a ro a ilidad edida es una ro a ilidad condicionada: a de, su uesto ue la com onente ha durado mas de 00 dıas (es decir, de ue es 00) calcular de nuevo la de ue sea 00 s decir, la ro a ilidad edida es

$$\{\ 00\ \ 00\}$$

Utilizando la de nicion de ro a ilidad condicionada (-seccion 7), esta ro a ilidad sera igual a

$$\{\ 00\ \ 00\} = \frac{\{\ 00 \cap\ 00\}}{\{\ 00\}}$$

i la duracion de la com onente tiene ue ser ma or de 00 ma or de 00, siendo ma or de 00, cum liremos las dos condiciones ue re uiere el suceso interseccion cu a ro a ilidad ueremos calcular en el numerador anterior Por tanto, sera

$$\{\ 00\ \ 00\} = \frac{\{\ 00 \cap\ 00\}}{\{\ 00\}} = \frac{\{\ 00\}}{\{\ 00\}}$$

Utilizando, de nuevo la ro iedad de la ro a ilidad del suceso com lementario la funcion de distri ucion sera

$$\begin{aligned} \{\ 00\ \ 00\} &= \frac{\{\ 00\}}{\{\ 00\}} \\ &= \frac{- \{\ \leq\ 00\}}{- \{\ \leq\ 00\}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{- \quad (\quad 00)}{- \quad (\; 00)} \\
&= \frac{- (\quad - \quad {}^{-0'001\cdot1500})}{- (\quad - \quad {}^{-0'001\cdot600})} \\
&= \frac{{}^{-1'5}}{{}^{-0'6}} \\
&= \frac{0'}{0'} \\
&= 0' \;\; 0
\end{aligned}
$$

ro a ilidad ue, al ser ma or ue la calculada en el a artado anterior, nos dice ue, entre las com onentes ue a ha ıan so revivido a los 00 dıas, es mas ro a le durar mas de 00, ue eligiendo una al azar de entre todas igamos ue, una vez eliminadas las ue se rom en ra ido (las ue duran menos de 00 dıas) las otras son mas resistentes