Muchas teorías sobre la esquizofrenia sugieren alteraciones en la actividad de una sustancia del sistema nervioso central denominada *dopamina*. Con objeto de analizar esta hipótesis se trató a 10 pacientes esquizofrénicos hospitalizados, con una medicación antipsicótica y se les clasificó, después del tratamiento, en dos grupos: el de *psicóticos* (es decir, el de los que seguían padeciendo la enfermedad después del tratamiento) y el de *no psicóticos*. Se les extrajo una muestra de fluido cerebro-espinal a cada paciente y se anotó la actividad de la enzima *dopamina b-hidroxilasa* (DBH) obteniéndose los siguientes datos en donde las unidades vienen expresadas en *nmol/(ml)(h)/(mg)* de proteína:

No psicóticos	$0'0105$	$0'0145$	$0'0160$	$0'0130$	$0'0156$	$0'0104$
Psicóticos	$0'0222$	$0'0245$	$0'0320$	$0'0150$		

Suponiendo que los datos anteriores proceden de dos distribuciones normales independientes, una para cada uno de los dos grupos de pacientes, ¿difiere la actividad DBH entre estos dos grupos, a nivel $\alpha = 0'05$?

Si llamamos X_1 a la variable aleatoria *actividad DBH de los individuos del primer grupo* —no psicóticos— y X_2 a la *actividad DBH de los individuos del segundo grupo* —psicóticos—, el enunciado del problema nos indica que podemos suponer $X_1 \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2)$, siendo el objetivo que se persigue el contrastar $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2$ frente a la alternativa $H_1 \colon \mu_1 \neq \mu_2$.

En esta situación, del contraste para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes y muestras pequeñas (CB-sección 7.6), al ser las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas, es necesario primero poder concluir si éstas pueden suponerse iguales o no.

Para ello contrastaremos primero, a nivel $\alpha = 0'05$ como nos dice el enunciado, la hipótesis nula $H_0 \colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ frente a $H_1 \colon \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (CB-sección 7.5), hipótesis nula que se acepta cuando y sólo cuando sea

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \in \left[F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2}\ ,\ F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}\right].$$

A partir de nuestros datos obtenemos que es

$$\begin{array}{lll} \overline{x}_1 = 0'0133 & S_1^2 = 0'0000061 & n_1 = 6 \\ \overline{x}_2 = 0'0234 & S_2^2 = 0'0000491 & n_2 = 4 \end{array}$$

Como es

$$F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2} = F_{5,3;0'975} = \frac{1}{F_{3,5;0'025}} = \frac{1}{7'7636} = 0'1288$$

utilizando las propiedades de la distribución F de Snedecor y la tabla 6 de la distribución, y además

$$F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2} = F_{5,3;0'025} = 14'885$$

la región de aceptación será el intervalo $[0'1288\,,\,14'885]$.

Al ser el estadístico de contraste igual a

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0'0000061}{0'0000491} = 0'1242 \notin [0'1288\,,\,14'885]$$

no aceptaremos la hipótesis nula, concluyendo con que es razonable admitir como distintas las varianzas de las poblaciones normales.

Supuestas distintas las varianzas poblaciones, la hipótesis nula de igualdad de la actividad DBH en los dos grupos, $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ se aceptará cuando y sólo cuando sea

$$\frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \leq t_{f;\alpha/2}$$

en donde los grados de libertad f de la t de Student se determinan mediante la aproximación de Welch, siendo éste el entero más próximo a

$$\frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1}} - 2 = \frac{\left(\dfrac{0'0000061}{6} + \dfrac{0'0000491}{4}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{0'0000061}{6}\right)^2}{7} + \dfrac{\left(\dfrac{0'0000491}{4}\right)^2}{5}} - 2 = 3'83$$

con lo que tomaremos $f = 4$, siendo, por la tabla 5 de la t de Student, el punto crítico igual a $t_{f;\alpha/2} = t_{4;0'025} = 2'776$. Como el estadístico es igual a

$$\frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{|0'0133 - 0'0234|}{\sqrt{\dfrac{0'0000061}{6} + \dfrac{0'0000491}{4}}} = 2'770 < 2'776 = t_{f;\alpha/2}$$

se aceptará (con muchas reservas) la hipótesis nula de igualdad (en promedio) de la actividad DBH en los dos grupos, no pudiendo confirmar, con estos datos, las teorías a las que se hizo referencia en el enunciado del problema.