En un estudio sobre el efecto de la contaminación industrial en los alrededores de una gran ciudad, se eligieron al azar 10 huevos de pelícano de la isla de Anacapa situada frente a la ciudad californiana de Los Ángeles, observándose en ellos la concentración, en partes por millón, de bifemil policlorado PCB, un agente contaminante industrial. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$260 \, , \; 270 \, , \; 166 \, , \; 175 \, , \; 204 \, , \; 225 \, , \; 220 \, , \; 185 \, , \; 235 \, , \; 250$$

Suponiendo que la concentración del contaminante en estudio sigue una distribución normal de media μ, se pide:

a) **Determinar la estimación de máxima verosimilitud de μ.**

b) **Calcular la probabilidad de que μ y su estimador de máxima verosimilitud difieran, en valor absoluto, menos de 10 partes por millón.**

Si llamamos X a la variable aleatoria *concentración, en partes por millón, de PCB*, el enunciado del problema nos indica que se puede suponer para X una distribución normal $N(\mu, \sigma)$.

a) El estimador de máxima verosimilitud para μ, en esta situación de variable aleatoria normal de varianza desconocida, viene determinado en CB-ejemplo 5.4, resultando ser la media muestral,

$$\hat{\mu} = \overline{x}$$

por lo que la estimación de máxima verosimilitud buscada será

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{260 + \cdots + 250}{10} = \frac{2190}{10} = 219.$$

b) La probabilidad pedida es

$$P\left\{|\overline{x} - \mu| < 10\right\}$$

para lo que necesitamos conocer la distribución en el muestreo de la media muestral, en la situación en la que nos movemos aquí de una población normal de varianza desconocida. En esta situación (véase CB-sección 5.4) la distribución de la media muestral (tipificada) es una t de Student:

$$\frac{\overline{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

en donde S es la cuasidesviación típica muestral,

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2}.$$

La probabilidad pedida será, por tanto,

$$\begin{aligned}
P\{|\overline{x}-\mu| < 10\} &= P\left\{\frac{|\overline{x}-\mu|}{S/\sqrt{n}} < \frac{10}{S/\sqrt{n}}\right\} \\
&= P\left\{|t_9| < \frac{10}{35'99/\sqrt{10}}\right\} \\
&= P\{|t_9| < 0'88\} \\
&= 1 - 2\cdot P\{t_9 > 0'88\} \\
&\approx 1 - 2\cdot 0'2 = 0'6
\end{aligned}$$

en donde la probabilidad

$$P\{t_9 > 0'88\} \approx P\{t_9 > 0'883\} = 0'2$$

se obtiene de la tabla 5 de la distribución t de Student.