Un fondo de inversión mixto *RVM* está compuesto, fundamentalmente, por activos de renta variable y en un pequeño porcentaje por activos de renta fija independientes de la evolución de la bolsa pero cuyo valor puede también variar a lo largo del tiempo. En consecuencia, la variación del fondo de inversión depende de la variación, σ_1^2, de los activos de renta variable y de la variación, σ_2^2, de los activos de renta fija, estando combinadas ambas variaciones en la variación del fondo a través de su cociente σ_1^2/σ_2^2.

Con objeto de estimar dicho cociente se anotó el precio de 13 valores de renta variable y 8 de renta fija del fondo de inversión, elegidos al azar, calculándose con ellos los valores de la cuasivarianzas muestrales S_1^2 y S_2^2.

Supuesto que los precios de los activos de renta variable y de renta fija siguen distribuciones normales de medias desconocidas, calcular la probabilidad de que el cociente S_1^2/S_2^2 estime, razonablemente, el cociente σ_1^2/σ_2^2 en el sentido de que no sobrestime en más de tres veces el valor de σ_1^2/σ_2^2 ni lo subestime en más de una tercera parte de su valor.

Este problema puede ser un ejemplo de que, en muchas ocasiones, lo más difícil de su resolución radica en su formalización, en términos matemáticos.

Parece razonable decir que la probabilidad pedida es

$$P\left\{\frac{1}{3}\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leq\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq 3\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right\}$$

ya que si, por ejemplo fuera $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 30$ y $S_1^2/S_2^2 > 90$, S_1^2/S_2^2 estaría sobrestimado σ_1^2/σ_2^2 en más de tres veces su valor, por lo que el suceso que cumple —en la parte de sobrestimación— el requisito requerido en el enunciado será $S_1^2/S_2^2 \leq 90 = 3\sigma_1^2/\sigma_2^2$. Por otro lado, si fuera $S_1^2/S_2^2 < 10$, S_1^2/S_2^2 estaría subestimado σ_1^2/σ_2^2 en más de una tercera parte de su valor, por lo que el suceso que cumple —en la parte de subestimación— el requisito requerido en el enunciado será $S_1^2/S_2^2 \geq 10 = \sigma_1^2/(3\sigma_2^2)$.

Ahora, el cálculo de la probabilidad anterior requiere del conocimiento de la distribución en el muestreo de S_1^2/S_2^2, para la situación en la que estamos, de dos poblaciones normales independientes (por suponerse independientes los precios de los valores de renta fija y renta variable) de medias desconocidas. En esta situación (CB-sección 5.7) es

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F_{(n_1-1,n_2-1)}$$

siendo n_1 y n_2 los tamaños de las muestras extraídas, respectivamente, de la primera y segunda población. Por tanto, la probabilidad pedida será

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{3}\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq 3\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right\} &= P\left\{\frac{1}{3} \leq F_{(12,7)} \leq 3\right\} \\ &= P\left\{F_{(12,7)} \leq 3\right\} - P\left\{F_{(12,7)} < \frac{1}{3}\right\} \\ &= 1 - P\left\{F_{(12,7)} > 3\right\} - P\left\{F_{(12,7)} < \frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

al ser $n_1 = 13$ y $n_2 = 8$.

Si observamos la tabla de la $F_{(12,7)}$ vemos que no aparecen las colas de la izquierda, es decir, probabilidades para abscisas pequeñas. En estos casos debemos utilizar la propiedad de la F de Snedecor (CB-sección 5.3.3) de ser una variable aleatoria $F_{(n,m)}$ igual a $1/F_{(m,n)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{3}\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq 3\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right\} &= 1 - P\left\{F_{(12,7)} > 3\right\} - P\left\{F_{(12,7)} < \frac{1}{3}\right\} \\ &= 1 - P\left\{F_{(12,7)} > 3\right\} - P\left\{\frac{1}{F_{(7,12)}} < \frac{1}{3}\right\} \\ &= 1 - P\left\{F_{(12,7)} > 3\right\} - P\left\{F_{(7,12)} > 3\right\} \\ &= 1 - 0'0817 - 0'0469 = 0'8714 \end{aligned}$$

en donde las últimas probabilidades se han obtenido por interpolación a partir de la tabla 6 de la distribución F de Snedecor: $P\left\{F_{(12,7)} > 3\right\} = 0'1 - (0'05 \times 0'3319/0'9066) = 0'0817$ y $P\left\{F_{(7,12)} > 3\right\} = 0'05 - (0'025 \times 0'0866/0'6931) = 0'0469$.