
El origen de la civilización etrusca sigue siendo todavía un misterio para los antropólogos. En concreto, una cuestión que se plantea es la de si fueron originarios de la península italiana o si inmigraron a ella procedentes de algún otro lugar. Se pensó que una forma de contestar a esta pregunta sería comparar a los actuales italianos con los restos arqueológicos etruscos mediante un estudio antropométrico. Para ello, se midió, en milímetros, la máxima anchura, X , de 8 cráneos de restos de varones etruscos y la máxima anchura, Y , de la cabeza de 10 varones italianos, todos ellos elegidos al azar. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Etruscos	141	132	154	142	141	150	134	140		
Italianos	133	138	136	125	135	130	127	131	116	128

En base a los datos obtenidos y utilizando un contraste de Wilcoxon-Mann-Whitney, ¿se puede concluir con la existencia de diferencias significativas entre las dos poblaciones a nivel $\alpha = 0'05$?

Estamos ante un caso de comparación de dos poblaciones independientes mediante la comparación de sus medianas, al realizar el contraste de la hipótesis nula $H_0 : M_X = M_Y$ frente a la alternativa $H_1 : M_X \neq M_Y$, utilizando el *test de Wilcoxon-Mann-Whitney* (CB-sección 13.4.1 y PREB-problema 11.5).

La única suposición que necesitamos hacer es la de que las variables $X = \text{máxima anchura del cráneo de los etruscos}$, e $Y = \text{máxima anchura del cráneo de los italianos}$, sean de tipo continuo, lo cual es bastante razonable puesto que ambas variables son mediciones que pueden tomar cualquier valor entre dos valores dados.

El estadístico del test de Wilcoxon-Mann-Whitney es

$$U = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^{10} D_{ij}$$

con

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si es } Y_j < X_i \\ 0 & \text{si es } Y_j > X_i \end{cases}$$

es decir, el número de observaciones Y_j que preceden a cada X_i fijo. Si subrayamos los valores Y_j en la muestra combinada de las 18 observaciones, obtenemos

116 , 125 , 127 , 128 , 130 , 131 , 132 , 133 , 134

135 , 136 , 138 , 140 , 141 , 141 , 142 , 150 , 154

que proporcionan un valor para U de

$$U = 6 + 7 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 73.$$

Fijado el nivel de significación $\alpha = 0'05$, la tabla 12 de Wilcoxon-Mann-Whitney proporciona el punto crítico $c_{8,10;\alpha/2} = c_{8,10;0'025} = 62$ siendo, por tanto, la región crítica del test igual a

$$C = \{U \leq n \cdot m - u_{m,n;\alpha/2}\} \cup \{U \geq u_{m,n;\alpha/2}\}$$

siendo $u_{m,n;\alpha/2} = c_{m,n;\alpha/2} + 1 = 63$. Es decir,

$$C = \{U \leq 17\} \cup \{U \geq 63\} = [0, 17] \cup [63, 80].$$

El valor de U obtenido ($U = 73$), al pertenecer a la región crítica, conduce a rechazar la hipótesis nula y concluir con que ambas poblaciones presentan diferencias significativas en los tamaños de sus cráneos y que, utilizando esta característica como definitoria de la población, que la civilización etrusca tiene un origen distinto del de los habitantes actuales de Italia.