

AMPLIACIÓN DE CÁLCULO

Examen primera semana de febrero de 2006

1. Determinése la ecuación del plano osculador a $x^2 + y^2 + z^2 = 11$, $x^2 + y^2 = 2$, $z > 0$ en el punto $(0, \sqrt{2}, 3)$.

Solución. $z = 3$

La curva dada es la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$, $z = 3$. Unas paramétricas son $x = \sqrt{2} \cos \theta$, $y = \sqrt{2} \sin \theta$, $z = 3$, y el valor del parametro en el punto dado es $\theta = \pi/2$, con lo cual los vectores derivadas en el punto son $(x', y', z') = (-\sqrt{2}, 0, 0)$ y $(x'', y'', z'') = (0, -\sqrt{2}, 0)$. La ecuación del plano osculador viene dada por

$$\begin{vmatrix} x & y - \sqrt{2} & z - 3 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = 3$$

Directamente. La curva es plana y el plano que la contiene es $z = 3$.

2. Dígase que clase de punto es $(0,0,0)$ en la superficie engendrada al girar $z = y^4$, $x = 0$ alrededor del eje z .

a) Elíptico b) Parabólico c) Hiperbólico d) Plano e) Ninguna de ellas

Solución.d). Plano.

Determinemos la ecuación de la superficie por el procedimiento general estudiado en las Unidades Didácticas Tomo 1, pag. 289. La ecuación de la generatriz es $\alpha(u) = (0, u, u^4)$, $a = (0, 0, 0)$, $v = (0, 0, 1)$. La superficie de revolución viene dada por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + u^8; z - u^4 = 0$$

Eliminando u queda $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{z} + z^2$, es decir, $z = (x^2 + y^2)^2$. Es claro que todas las derivadas segundas de la superficie en el punto son cero y se trata de un punto plano

3. Dígase cuál es el valor de la integral de línea $\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 - y^3)dy$, siendo C la circunferencia unidad orientada positivamente. (Aplíquese el teorema de Green).

a) $2\pi/5$ b) $\pi/2$ c) $\pi/8$ d) $3\pi/2$ e) 0 f) Ninguno de ellos

Solución. d).

$$\begin{aligned} I &= \int_M [D_1 Q(x, y) - D_2 P(x, y)] dx dy = \int_M (3x^2 + 3y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^2 \rho d\rho d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right] d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Sean F y G dos campos vectoriales tales que $\nabla \cdot F = 0$ y $\nabla \cdot G = 0$. Indíquense los campos que tienen divergencia cero

a) $F \wedge G$ b) $(F + G) \cdot F$ c) $(F \wedge G) \cdot F$ d) Ninguno de ellos

Solución.d).

Compruébese por ejemplo con los campos $F = (x, -y, 0)$ y $G = (-x^2, 0, 2xz)$ que a) no es cierto. b) y c) son campos escalares y no tiene sentido.

5. Sea $\cosh \frac{1}{z}$. Dígase que clase de singularidad es $z = 0$.

- a) Un polo de orden 1 b) Un polo de orden 2 c) No es una singularidad
 d) Una singularidad evitable e) Una singularidad esencial f) Ninguna de las anteriores

Solución. e)

$\cosh \frac{1}{z} = \frac{1}{2} [e^{1/z} + e^{-1/z}]$. Como no existe límite cuando z tiende a 0, la singularidad es esencial.

Compruébese que no existe límite utilizando las sucesiones $a_n = \frac{1}{2n\pi i}$; $b_n = \frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})i}$, con lo cual $f(a_n) \rightarrow 1$; $f(b_n) \rightarrow 0$.

6. $|z| - 3 \operatorname{Im} z = 6$ es la ecuación de

- a) Una recta b) Una circunferencia c) Una parábola
 d) Una elipse e) Una hipérbola f) Ninguna de las anteriores

Solución. e).

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - 3y = 6 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 9y^2 + 36y + 36 \Rightarrow \\ x^2 - 8y^2 - 36y - 36 = 0 &\Rightarrow -\frac{x^2}{8} + \left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

7. Dígase el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

- a) 0 b) ∞ c) 1 d) 1/2 e) $1/\sqrt{2}$ f) Ninguno de ellos

Solución. b).

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\ln in}\right|}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup |\ln in| = \infty$$

8. Compruébese el teorema de Stokes para $f(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$, siendo S la superficie del paraboloido

$2z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 2$ y C su contorno.

Considérese en S la normal exterior a la superficie y en C la orientación determinada.

Solución.

De acuerdo con el teorema de Stokes, debemos comprobar que

$$\int_S (\operatorname{rot} f \cdot n) dS = \int_C f \cdot d\alpha.$$

Cálculo de la primera integral: Unas ecuaciones paramétricas de la superficies son $r(x, y) \cong x = x$; $y = y$; $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$

el vector saliente n viene dado por $n = \frac{\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}(x, y, -1)$

$$\operatorname{rot} f = \nabla \wedge f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)i + (-z - 3)k \text{ y } dS = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy$$

Si R es el recinto proyección sobre el plano xy , $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, entonces

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_R \left[\left(\left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 + x, 0, -\frac{x^2 + y^2}{2} - 3 \right) \cdot (x, y, -1) \right] dx dy = \\
&= \iint_R \left[x \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 + x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + 3 \right] dx dy
\end{aligned}$$

pasando a polares, $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \operatorname{sen} \theta$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{1}{4} \rho^5 \cos \theta + \rho^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \rho^2 + 3 \right] \rho d\rho d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{128}{28} \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} 8 d\theta = \\
&= 0 + \int_0^{2\pi} 4 \frac{1 + \operatorname{sen} 2\theta}{2} d\theta + 16\pi = 4\pi + 16\pi = 20\pi
\end{aligned}$$

Cálculo de la segunda integral: Las ecuaciones $\alpha(\theta)$ de C son $x = 2 \cos \theta$; $y = 2 \operatorname{sen} \theta$; $z = 2$; $\theta \in [2\pi, 0]$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_C f \cdot d\alpha. = \int_C 3y dx - xz dy + yz^2 dz = - \int_{2\pi}^0 (12 \operatorname{sen}^2 + 8 \cos^2 \theta) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} (8 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta = 16\pi + 4 \int_{2\pi}^0 \frac{1 - \operatorname{sen} 2\theta}{2} d\theta = 20\pi
\end{aligned}$$