Aritmética y codificación BG

1.- Aritmética binaria

2.- Formatos de números y su representación

3.- Definiciones y codificación de la información

4.- Codigos binarios

5.- Tipos

1.- Aritmética binaria

Suma

$$\begin{array}{r} 111 \\ +\ 1100 \\ \hline 10011 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 12 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101,1 \\ +\ 110,11 \\ \hline 1100,01 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 5,5 \\ 6,75 \\ \hline 12,25 \end{array}$$

Resta

$$\begin{array}{r} 1100 \\ -\ 111 \\ \hline 0101 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -\ 1 \\ \hline 01111 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ 1 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110,11 \\ -\ 101,1 \\ \hline 001,01 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 6,75 \\ 5,5 \\ \hline 1,25 \end{array}$$

2.- Formatos de los números y su representación

Nº reales:
- Naturales: 0, 1, 2, 3 . . .
- Enteros: .. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .
- Racionales: cociente entre enteros $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; . . .
- Irracionales: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, transcendentes $\left\{ \begin{array}{l} \pi \\ e \end{array} \right.$

Rango representación: intervalo entre el menor y el mayor nº representable → **Tipos**
- simétrico
- asimétrico

Resolución de la representación: la mayor diferencia que ∃ entre un nº representable y su inmediato siguiente o sucesor ⇒ Máximo error en la representación

Mediante sistemas **polinomiales**:
- Naturales
- Enteros
- Racionales

Representaciones

Coma fija sin signo $\Rightarrow$ $\boxed{\text{parte entera, parte fraccionaria}}$

Represen. N^{os} naturales en binario puro

↳ Coma fija sin signo y sin fraccionaria

$\Downarrow$

n bits $\Rightarrow$. rango $= 2^n \Rightarrow \emptyset \div 2^n - 1$

Coma fija con signo $\Rightarrow$ digito izda = signo $\begin{cases} 0 = \text{positivos} \\ 1 = \text{negativos} \end{cases}$

8 bits

0 1 1 1 1 1 1 1 ⟶ 127
0 1 1 1 1 1 1 0 ⟶ 126
⋮
0 0 0 0 0 0 0 1 ⟶ 1
0 0 0 0 0 0 0 0 ⟶ ∅
1 0 0 0 0 0 0 0 ⟶ -∅
1 0 0 0 0 0 0 0 ⟶ -1
⋮
1 1 1 1 1 1 1 1 ⟶ -127

Rango = -127 ÷ 127 ⇒ 255

$\emptyset \begin{cases} 00000000 \\ 10000000 \end{cases}$

$\Downarrow$

Doble representación

$\Downarrow$

Problema

Complementos $\Rightarrow$ transformaciones para convertir restas en sumas.

→ **a la base** $\Rightarrow$ $N + C_b(N) = b^n \Rightarrow \underline{Cb(N) = b^n - N}$

72 → 28
28 → 72

$$C_2(110{,}01) = \begin{array}{r} {}^{000} \\ -\,110{,}01 \\ \hline 001{,}11 \end{array} = 001{,}11$$

$$C_2(0) = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array} = 0$$

→ a la base menos uno = $\boxed{C_{b-1}}$ Binario = invertir bits

$\Downarrow$

$C_2 = C_1 + 1$

72 → 27
27 → 72

110,01 → 001,10

0 → 1

N^{os} binarios

↓

Complemento
- Positivos ⇒ bit signo = 0 + valor absoluto
- Negativos ⇒ complemento

−42 (8 bits) ⇒ 42 = 00101010 ⇒ C1 = 11010101

$$\begin{array}{r} C2 = \quad\quad\quad +1 \\ \hline 11010110 \end{array}$$

↑
signo

+42 = 00101010

+0 ⇒ C1 = 0000 0000 ; C2 = 00 000000

−0 ⇒ C1 = 1111 1111 ; C2 = 00000000

C1 → 0 doble representación ⇒ rang. simé

C2 → 0 única representación ⇒ " asimétri

Comparación

	Coma fija con signo	C1	C2
+127	0 111 1111	0 111 1111	0 111 1111
⋮	⋮	⋮	⋮
1	0 0000001	0 000 0001	0 000 0001
0	0 0000000	0 0000000	0 0000000
−0	1 0000000	11111111	00000000
−1	1 0000001	11111110	11111111
⋮	⋮	⋮	⋮
−127	1 1111111	1 0000000	1000 0001 / 1000 0000 → −128

AC 3.Δ

Exceso M $\Rightarrow$ Los nºs se aumentan en M

$M = 2^{n-1}$ (Normalmente)

⇓

8 bits

1111 1111 $\Rightarrow$ 255 $\Rightarrow$ 255 − 128 = 127

+127 ←	1111 1111
⋮	⋮
1	1000 0001
0	1000 0000
−1	0111 1111
−2	0111 1110
⋮	⋮
−128	0000.0000

0000 0000 $\Rightarrow$ 0 $\Rightarrow$ 0 − 128 = −128

Decimal	Coma fija+signo	Comple. a 1	Comple. a 2	Exceso 128
+127	0111 1111	0111 1111	0111 1111	1111 1111
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	0000 0010			
1	0000 0001	0000.0001	0000 0001	1000 0001
+0	0000 0000	0000 0000	0000 0000	1000 0000
−0	1000 0000	1111 1111	0000 0000	
−1	1000 0001	1111 1110	1111 1111	0111 1111
−2	1000 0010	1111 1101	1111 1110	0111 1110
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−127	111.1 1111	1000 0000	1000 0001	
−128			1000.0000	0000 0000

N^{os} reales en binario

Coma fija ⇒ la coma en punto fijo y un nº bits fijos para entero y fraccionario

error absoluto → $< 2^{-q}$ → q = nº bits parte fraccionaria

Caracte
- ventajas → sist. digitales simples
- Inconvenientes → rango de valores limitados

Coma flotante

Componentes
- Signo → 0 ⇒ > 0 ; 1 ⇒ < 0 $\quad + 4{,}52 \cdot 10^{-12}$
- Mantisa → coma fija
- Base → 2
- Exponente → coma fija

Representación normalizada ⇒ bit más significativo = 1

IEEE 754 ⇒ 32 bit
- MSB = signo
- 8 bit = exponente
- 23 bit = mantisa

} repres. normalizada

Exponente → exceso $\underbrace{2^{8-1} - 1}$ ⇒ exceso 127

Mantisa → $\underbrace{1,m}$

32 bit
- MSB = SIGNO
- 8 bit = Exponente exceso 127
- Mantisa = 23 bit = Normalizada ⇒ 1,..... (IMPLICITO)

16 bit
- MSB = SIGNO
- 8 bit = expon exc 127
- 7 bit = mantisa

Especiales
- $N = \frac{0}{0}$ ⇒ E = 255 $\quad M \neq 0$
- $N = \infty$ ⇒ S = 0 $\quad$ E = 255 $\quad$ M = 0
- $N = -\infty$ ⇒ S = 1 $\quad$ E = 255 $\quad$ M = 0
- N = 0 ⇒ E = 0 $\quad$ M = 0
- $N \simeq 0$ ⇒ E = 0 $\quad M \neq 0$

Ejemplo

$-6,125_{10} \rightarrow$ JEEE 754 en 32 bits

$6,125_{10} \rightarrow 110,001$

Signo = 1

Mantisa = 1,10001

Exponente : 2 $\Rightarrow$ 127 + 2 = 129 $\Rightarrow$ 10000001

$$-6,125 = \overset{31}{1}.10000001.100010\ldots\ldots\overset{0}{0}$$

3.3 Definiciones y codificación de la información

Símbolo = objeto material que representa a otro objeto y que se usa para recibir, conservar o transmitir información relacionada al objeto representado

Código = correspondencia entre alfabeto fuente y alfabeto código

Palabra código = secuencia de símbolos.

Longitud de la palabra = nº de símbolos

Base = nº de símbolos distintos

Propiedades código
- Uniformidad → ∀ símbolo fuente ⇒ ! palabra código
- No singularidad → ∀ símbolo fuente le corresponde palabras de código distintas

Fuente	Código
α	$\emptyset$
β	1
(ji) χ	00
(delta) δ	11

⇒ $\alpha\alpha$ — 00
χ — 00

Decodificación unívoca ⇒ si y sólo si su extensión de orden n es no singular para cualquier valor finito n

simb. fuente	Cod A	Cod B	Cod C
α	00	0	0
β	01	10	01
χ	10	110	011
δ	11	1110	0111

Decodificación instantanea ⇒ permite decodificar palabras sin necesidad de conocer los símbolos que le preceden. Ninguna palabra prefijo de otra

símbolos ≤ del código

ACG

Código A	Prefijos	
00	00	0
01	01	0
10	10	1
11	11	1

Cod B	Prefi			
0	0	-		
10	10	1	-	
110	110	11	1	-
1110	1110	111	11	1

Cod C	Prefi			
0	0	-		
01	01	0	-	
011	011	01	0	
0111	0111	011	01	0

- Códigos
  - No uniforme (No bloque)
  - Uniforme (bloque)
    - Singulares
    - No singulares
      - No univocos
      - Univocos
        - No instantaneos
        - Instantaneos

3.4 Códigos binarios ⇒ símbolos [0, 1]

Ponderados ⇒ ∀ dígito ⇒ un peso

Distancia ⇒ entre 2 palabras de un código ⇒ Nº dígitos que se invierten

Distancia de binario ⇒ la menor de las distancias

Adyacentes (palabras) ⇒ distancia = 1

Continuos: Códigos con palabras consecutivas adyacentes

Cíclicos: 1ª y última palabra adyacentes

Denso: con "n" bits ⇒ 2^n palabras código

Autocomplementarios al nº N: ⇒ palabra + C1 = N

Tipos
- Numéricos
- Alfanuméricos
- Detectores error
- Correctores "

Numéricos

Decimal	BIN. natural	BCD Natur. 8 4 2 1	BCD Aiken 2 4 2 1	BCD Aiken 5 4 2 1	BCD 6 4 2 -3
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1
2	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 0 1
4	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0
5	0 1 0 1	0 1 0 1	1 0 1 1	1 0 0 0	1 0 1 1
6	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 0 0	1 0 0 1	0 1 1 0
7	0 1 1 1	0 1 1 1	1 1 0 1	1 0 1 0	1 1 0 1
8	1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1	1 0 1 0
9	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1	1 1 0 0	1 1 1 1
10	1 0 1 0	1 0 0 0 0			
11	1 0 1 1	1 0 0 0 1			
12	1 1 0 0	1 0 0 1 0			
13	1 1 0 1				
14	1 1 1 0				
15	1 1 1 1				
16					

Decimal	BCD exceso 3	Gray Reflejado	Johnson
0	0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 0 0 0
1	0 1 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0 1
2	0 1 0 1	0 0 1 1	0 0 0 1 1
3	0 1 1 0	0 0 1 0	0 0 1 1 1
4	0 1 1 1	0 1 1 0	0 1 1 1 1
5	1 0 0 0	0 1 1 1	1 1 1 1 1
6	1 0 0 1	0 1 0 1	1 1 1 1 0
7	1 0 1 0	0 1 0 0	1 1 1 0 0
8	1 0 1 1	1 1 0 0	1 1 0 0 0
9	1 1 0 0	1 1 0 1	1 0 0 0 0
10		1 1 1 1	
11		1 1 1 0	
12		1 0 1 0	
13		1 0 1 1	
14		1 0 0 1	
15		1 0 0 0	
		Reflejado	Progresivo

Propiedades

	Bin natur	Nat 8421 (BCD)	Aiken 2421 (BCD)	Exceso 3 (BCD)	Gray	Johnson
Ponderado	Si	Si	Si	No	No	No
Distancia	1	1	1	1	1	1
Continuo	No	No	No	No	Si	Si
Cíclico	No	No	No	No	Si	Si
Denso	Si	No	No	No	Si	No
Autocomplemen.	2^n-1	No	a 9	a 9	No	No

Conversión Bin. nat. a Gray ⇒ O exclusiva del num. consigo mismo desplazado a la dcha despreciando menor bit

$101011_{(BIN}$ ⇒

$$\begin{array}{r|l} 101011 & \\ 10101 & 1 \\ \hline 111110 & \end{array}$$

Conversión de Gray a Bin nat. ⇒ sumando de izda a dcha cada bit del bin. obtenido B_{i+1} al Gray G_i sin acarreo o con la $\oplus$

$$B_i = B_{i+1} \oplus G_i$$

$$\begin{array}{lr} G & 111110 \\ & 10101 \\ \hline & 101011 \end{array}$$

Alfanuméricos

EBCDIC → Extended BCD Interchange Code

ASCII → American Standard Comitee on Information Interchange

↳ 2^7 símbolos ↓ 7 bits
- 26 let mayus
- 26 " minus
- 10 nºs
- Otros

ASCII extendido ⇒ 8 bit

Detectores de error

- Condición necesaria ⇒ código no denso
- " " y suficiente para que un código permita detectar errores en un bit es que la distancia superior a la unidad

Códigos
- Paridad ⇒ añadir un bit
  - par → nº 1 par
  - impar → " 1 impar
- Peso fijo
  - 2 entre 5
  - biquinario

	2 entre 5	Biquinario 50 43210
0	0 1100	01 00001
1	1 1000	01 00010
2	1 0100	01 00100
3	1 0010	01 01000
4	0 1010	01 10000
5	0 0110	10 00001
6	1 0001	10 00010
7	0 1001	10 00100
8	0 0101	10 01000
9	0 0011	10 10000

Correctores de error

Condición necesaria y suficiente → distancia mínima del código = 2

⇓

Detectar F bit erróneos ⇒ distancia min $2F+1$

Hamming

Palabra de n bits añadir k bits de paridad

t.q. $2^k > n+k$

Posiciones
- Numerar de dcha a izda los bits con 1, 2, 3, ...
- Posición de los bit de paridad $2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \ldots$ → P_1 P_2 P_4 P_8
- Resto bits de datos

Posición → 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Palabra → D_7 D_6 D_5 $\underline{P_8}$ D_4 D_3 D_2 $\underline{P_4}$ D_1 $\underline{P_2}$ $\underline{P_1}$

Correspondencias
- $B_3 \Rightarrow P2, P1$
- $B_5 \Rightarrow P_4, P1$
- $B6 \Rightarrow P_4, P2$
- $B_7 \Rightarrow P_4, P2, P1$
- $B9 \Rightarrow P8, P1$
- $B10 \Rightarrow P8, P2$
- $B_{11} \Rightarrow P8, P_2, P_1$

sufijo del bit Bi

i = config. binaria de los bit de paridad

Paridades
- $P1$, $B3$, $B5$, B_7, B_9, B_{11}
- P_2, B_3, $B6$, B_7, B_{10}, B_{11}
- P_4, B_5, B_6, B_7
- $P8$, B_9, B_{10}, B_{11}

$$P1 = B3 \oplus B5 \oplus B7 \oplus B9 \oplus B_{11}$$
$$P2 = B3 \oplus B6 \oplus B7 \oplus B10 \oplus B_{11}$$
$$P4 = B5 \oplus B6 \oplus B7$$
$$P8 = B9 \oplus B10 \oplus B_{11}$$

Para emitir

<u>En la recepción</u>

Errores:

$$E_1 = P_1 \oplus B_3 \oplus B_5 \oplus B_7 \oplus B_9 \oplus B_{11}$$
$$E_2 = P_2 \oplus B_3 \oplus B_6 \oplus B_7 \oplus B_{10} \oplus B_{11}$$
$$E_3 = P_4 \oplus B_5 \oplus B_6 \oplus B_7$$
$$E_4 = P_8 \oplus B_9 \oplus B_{10} \oplus B_{11}$$

Bit error en la posición $\underline{E_4}\ \underline{E_3}\ \underline{E_2}\ \underline{E_1}$