Algebra de Boole y Funciones Lógicas

- Algebra de Boole
- Funciones lógicas elementales
- Tabla de la verdad
- Formas canónicas
- Simplificación de funciones (Redundancia)
- Logigrama (Orden)

Algebra de Boole

George Boole desarrollo el algebra de Boole ⇒ herramienta matemática utilizada en el estudio de computadores.

- La aplicación en computadores es del tipo binario ⇒ $\left\{ \begin{matrix} \emptyset \\ 1 \end{matrix} \right.$
- El estado de un elemento del circuito lógico viene representado por una variable que puede valer ∅ ó 1.

Función: expresión que indica la relación entre las variables y el nº de variables

$F = f(a, b, c, \ldots)$

$F(a, b, c) = abc + \bar{b}(c + \bar{d})$

Tabla de la verdad: tabla que recoge todas las combinaciones de las var. de entrada y los valores de las salidas.

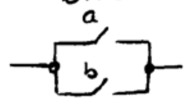
$F = abc + ab\bar{c} + \bar{a}bc$

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

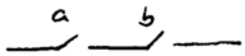
Operaciones en el álgebra de Boole

Binorio

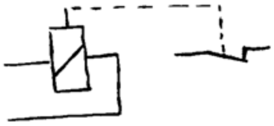
Unión o adición : $F = a + b$



Intersección o producto : $F = a \cdot b$



Complementación : $F = \bar{a}$



a	b	a + b	a · b	$\bar{a}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Leyes fundamentales

$a + \bar{a} = 1$

$a \cdot \bar{a} = 0$

$0 + a = a$

$1 \cdot a = a$

$1 + a = 1$

$0 \cdot a = 0$

$a + a = a$

$a \cdot a = a$

Conmutativa $a + b = b + a$ / $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativa $a + b + c = (a+b) + c = a + (b+c)$ / $a b c = (ab) c = a(bc)$

Distributiva $a + bc = (a+b)(a+c)$ / $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Absorción $a + ab = a(1+b) = a$ $a \cdot (a+b) = aa + ab = a$

Morgan $\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$

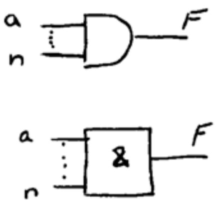
Teorema de Shanaon : $F = f(a,b,c) = a \cdot f(1,b,c) + \bar{a} \cdot f(0,b,c)$

$F = bc \Rightarrow F = abc + \bar{a} b c$

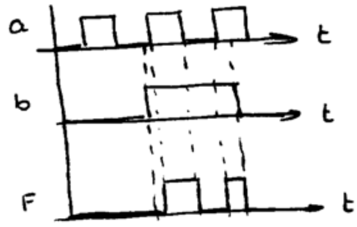
Funciones lógicas elementales

AND (Y)

$F = a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot n$

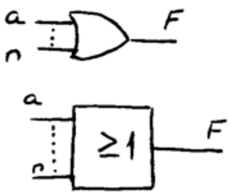


a	b	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

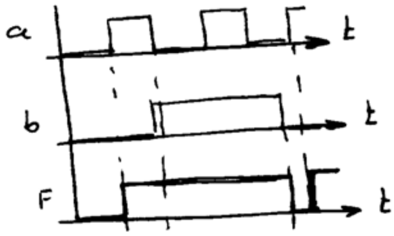


OR (O)

$F = a + b + c + \ldots + n$

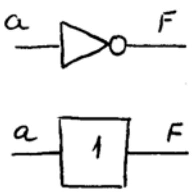


a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

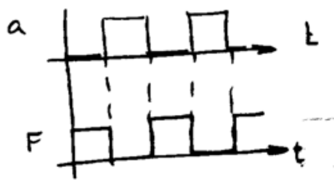


INVERSION (NOT)

$F = \bar{a}$

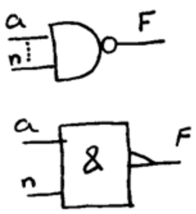


a	F
0	1
1	0

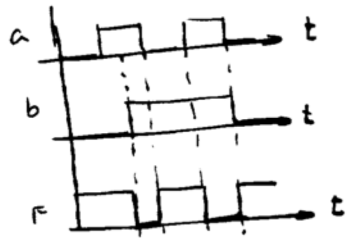


NAND

$F = \overline{a \cdot b \cdot c \ldots n}$

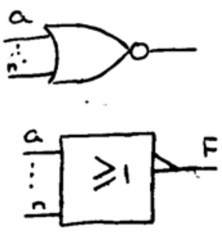


a	b	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

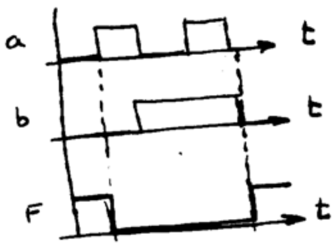


NOR

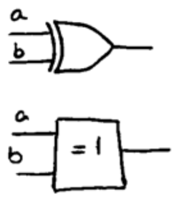
$F = \overline{a + b + c + \ldots + n}$



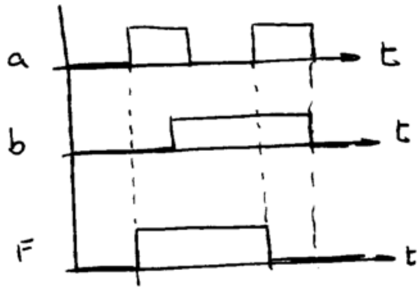
a	b	F
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



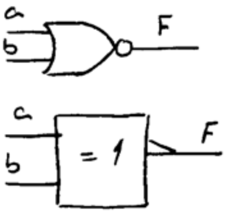
O exclusiva $F = a \oplus b$



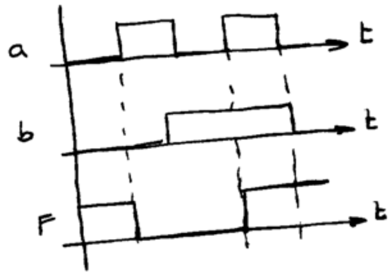
a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



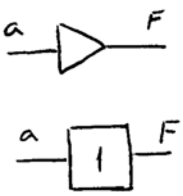
Equivalencia (NOR exclusiva) $F = \overline{a \oplus b}$



a	b	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Seguidor (Buffer) $F = a$



a	F
0	0
1	1

Simplificación de funciones

Función canónica = la representada como producto de sumas (maxterm) o suma de productos (minterm), pero en cada término aparecen todas las variables.

Las funciones expresadas en forma no canónica se pueden transformar aplicando el teorema de Shannon

$$F = f(a,b,c) = a + bc$$

$$F = a + [bc(a+\bar{a})] = a + abc + \bar{a}bc =$$

$$a = a(b+\bar{b}) = ab + a\bar{b} = ab(c+\bar{c}) + a\bar{b}(c+\bar{c}) = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c}$$

$$F = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + abc + \bar{a}bc = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$$

AFS

Obtención de la función canónica a partir de la tabla verdad

Minterms ⇒ Términos mínimos

Tomar todas las salida que son "1" y expresarlo como suma de términos producto en los que las variables que son "1" se expresan como literales y las que son "0" como invertidas.

$$F = f(a,b,c) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f(i) \cdot m_i$$

Maxterms ⇒ Términos máximos

Tomar todas las salidas que son "0" y expresar-lo como producto de términos suma en los que las variables que son "0" se expresan como literales y las que son "1" como invertidas

$$F = f(a,b,c) = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left(f(2^n-1-i) + M_i \right)$$

	a	b	c	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Minterms

$$F = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

$$F = \sum (m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7)$$

Maxterms

$$F = (a+b+c) \cdot (a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+b+c)$$

$$F = \prod (M7 \cdot M4 \cdot M3) \cdot$$

- La suma de los términos minterm y maxterm cubren todas las combinaciones.

Simplificación de funciones
- Aplicar leyes del álgebra de Boole
- Mapas Karnaugh

Mapas karnaugh

Mapa karnaugh es un cuadro que recoge todas las combinaciones de las variables de entrada. ⇒ 2^n cuadros (n = nº var)

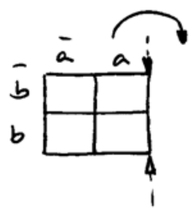
2 variables ⇒ $2^2 = 4$

a, b

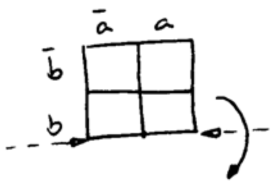
	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	m_0	m_1
b	m_2	m_3

3 variables ⇒ $2^3 = 8$ ⇒ Duplicar la de 2 var. respecto al eje de simetría vertical u horizontal de los extremos

a, b, c



	$\bar{c}$		c	
	$\bar{a}$	a	a	$\bar{a}$
$\bar{b}$	m_0	m_1	m_5	m_4
b	m_2	m_3	m_7	m_6



		$\bar{a}$	a
$\bar{c}$	$\bar{b}$	m_0	m_1
	b	m_2	m_3
c	b	m_6	m_7
	$\bar{b}$	m_4	m_5

4 variables ⇒ $2^4 = 16$ ⇒ Duplicar la de 3 var.

a, b, c, d

		$\bar{c}$		c	
		$\bar{a}$	a	a	$\bar{a}$
$\bar{d}$	$\bar{b}$	m_0	m_1	m_5	m_4
	b	m_2	m_3	m_7	m_6
d	b	m_{10}	m_{11}	m_{15}	m_{14}
	$\bar{b}$	m_8	m_9	m_{13}	m_{12}

Tener en cuenta que las columnas de los extremos son adyacentes entre sí y las líneas de los extremos también

AFY

Simplificación

Una vez obtenidas la función canónica y el mapa de Karnaugh, posicionar los términos con salida "1" en los cuadros correspondientes para poder simplificar.

1º Agrupar las áreas que contengan "1" y que sean adyacentes, procurando agrupar de mayor cantidad de "1" a menor

2º Las áreas han de ser de forma cuadrada o rectangular y siempre simétricas con respecto a los ejes de doblado del mapa o quedando totalmente a un lado de estos.
Las áreas han de ser de 2, 4, 8, .. 2^n número de "1" adyacentes

3º El mapa se puede considerar una esfera; esto es las columnas de los extremos y las líneas extremas son adyacentes entre ellas.

4º Una vez agrupados minimizar usando adyacencia y absorción (variables que cambian de valor desaparecen) y sumar los resultados

5º A veces es mejor usar los "0"; cuando la cantidad de "0" es menor que la de "1". Si se minimiza usando los "0" hay que complementar el resultado.

AFB

Ejemplo

Simplificar la función $F = \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + \bar{a}bc\bar{d}$

1º Buscar la función canónica

$$F = \bar{a}\bar{c}\bar{d}(b+\bar{b}) + \bar{a}\bar{b}d(c+\bar{c}) + a\bar{b}\bar{c}(d+\bar{d}) + ab\bar{c}(d+\bar{d}) + \bar{a}bc\bar{d}$$

$$F = \underbrace{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{m_0} + \underbrace{\bar{a}b\bar{c}\bar{d}}_{m_4} + \underbrace{\bar{a}\bar{b}cd}_{m_3} + \underbrace{\bar{a}\bar{b}\bar{c}d}_{m_1} + \underbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{m_8} + \underbrace{a\bar{b}\bar{c}d}_{m_9} + \underbrace{ab\bar{c}d}_{m_{13}} + \underbrace{ab\bar{c}\bar{d}}_{m_{12}} + \underbrace{\bar{a}bc\bar{d}}_{m_6}$$

$$F = \sum(m_0, m_1, m_3, m_4, m_6, m_8, m_9, m_{12}, m_{13})$$

2º Mapa Karnaugh

	$\bar{b}\,\bar{d}$	$\bar{b}\,d$	$b\,d$	$b\,\bar{d}$
$\bar{a}\ \bar{c}$	m_0	m_1	m_5	m_4
$\bar{a}\ c$	m_2	m_3	m_7	m_6
$a\ c$	m_{10}	m_{11}	m_{15}	m_{14}
$a\ \bar{c}$	m_8	m_9	m_{13}	m_{12}

	$\bar{b}\,\bar{d}$	$\bar{b}\,d$	$b\,d$	$b\,\bar{d}$
$\bar{a}\ \bar{c}$	1	1		1
$\bar{a}\ c$		1		1
$a\ c$				
$a\ \bar{c}$	1	1	1	1

3º Agrupaciones

$1 \rightarrow a\bar{c}$ $\quad 2 \rightarrow \bar{c}\bar{d}$ $\quad 3 \rightarrow \bar{a}\bar{b}d$ $\quad 4 \rightarrow \bar{a}b\bar{d}$

$$F = a\bar{c} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d + \bar{a}b\bar{d}$$

Redundancias, términos indiferentes o indiferencias

Son aquellos términos que son prohibidos por alguna razón y que por lo tanto las salidas correspondientes se pueden tomar como "0" o "1" (X) según nos interese para una mayor simplificación

Ejemplo: Problema Resuelto 1.6 de Sistemas

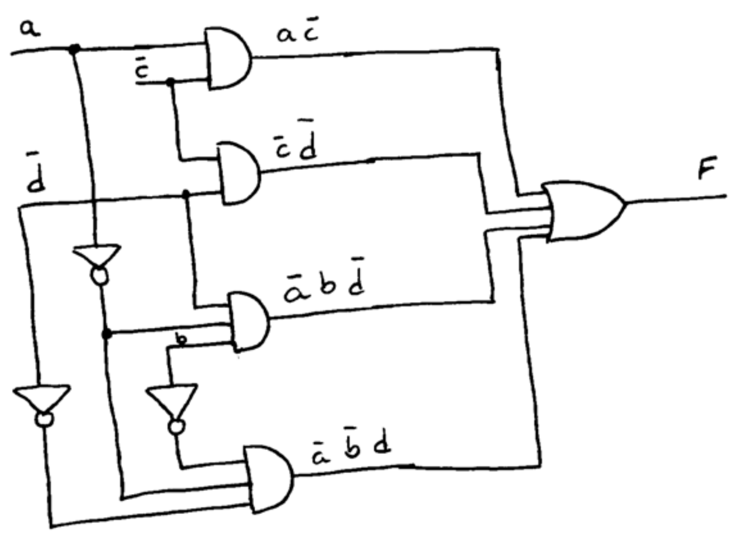
Logigrama

El último paso consiste en traducir la función simplificada a un logigrama, pero para ello hay que tener en cuenta dos factores:

1º No siempre la función más simplificada es la óptima que utiliza la menor cantidad de puertas lógicas

2º Hay que tener en cuenta el "orden de un circuito lógico"; que es el nº máximo de veces que una variable booleana debe atravesar circuitos lógicos en serie hasta alcanzar la salida.

" $F = a\bar{c} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d + \bar{a}b\bar{d}$ "



Ordenes

a → 3

b → 3

$\bar{c}$ → 2

$\bar{d}$ → 3